И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

33

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 57

Я.С.Дербенев, С.А.Хейфец

# ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ БЕЗ ГИПОТЕЗЫ О ЗАТУХАНИИ КОРРЕЛЯЦИЙ

Новосибирск
1976

ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ БЕЗ ГИПОТЕЗЫ О ЗАТУХАНИИ КОРРЕЛЯЦИЙ

Я.С.Дербенев, С.А.Хейфец

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено поведение нелинейного осциллятора, взаимодействующего с дискретной системой осцилляторов (без учета обратного влияния на эту систему). Показано, что характер движения зависит от параметра стохастичности К. Найден способ построения рядов по степеням К при $K \ll I$ и $K^{-I}$ при $K \gg I$, описывающих движение системы, соответственно, в устойчивом и стохастическом случаях. При $K \gg I$ получено кинетическое уравнение, исследованы поведение гармоник функции распределения, двухчастичного коррелятора и характер расцепления корреляций. Обсуждается переход к линейному случаю.

## I. Введение

Существует два подхода к получению кинетического уравнения (к.ур.). В одном исходным является описание динамики системы в вероятностных терминах. Более последовательным и строгим является другой подход, где за основу принимаются динамические уравнения, из которых к ур. выводится при некоторых дополнительных условиях и ограничениях. Примером такого подхода является классическая работа Н.Н.Боголюбова и Н.М.Крылова /I/, где был дан вывод к. ур. для линейных осцилляторов, подверженных возмущению с непрерывным спектром. Впоследствии формулировка к.ур. основывалась не столько на детальном анализе динамики системы, сколько на использовании дополнительных принципов - принципа ослабления корреляций (или эквивалентного ему приближения хаотических фаз), или принципа причинности (как у Пригожина). Для газовых систем принцип ослабления корреляций был введен Боголюбовым и для них он имеет наглядный физический смысл. Обобщение этого принципа на другие случаи, например, на системы с дискретным спектром и дальнодействием не является тривиальным, поскольку понятия столкновения, свободного пробега и т.д. требуют в этих условиях уточнения. Что же касается принципа причинности, то нам представляется, что его использование при выводе к.ур. является нежелательным, так как понятие причинности само может возникать в теории, выводящей статистические законы эволюции из динамических /4/.

Требуемый анализ динамики может основываться на прогрессе в понимании характера движения нелинейных механических систем. Среди прочих достижений в этой области особую эвристическую ценность для статистической физики, с нашей точки зрения, имеет критерий стохастичности Б.В.Чирикова /2/, сформулированный им еще в 1959 г. и неоднократно подтвержденный экспериментом и численным моделированием. Согласно Чирикову, движение нелинейной системы становится неустойчивым и приобретает эргодические свойства, если динамический сдвиг частоты превышает расстояние между гармониками в спектре возмущения. Для системы из многих тел такая ситуация может быть типичной, поскольку спектр взаимодействия всегда богат гармониками одного порядка величины.

В свете идей Чирикова, вопрос о возникновении необратимости в движении такой системы является количественным и, следовательно, поведение системы может быть устойчивым либо стохастическим в зависимости от величины ее параметров. Любая схема вывода к.ур. должна отражать зависимость от количественных параметров типа параметра стохастичности и приводить к ограничениям на область применимости уравнения.

В ряде работ /3/ расцепление корреляций при получении к. ур. обосновывалось с помощью критерия стохастичности путем апелляции к уже известным свойствам простейших нелинейных систем, для которых был более или менее подробно изучен процесс перемешивания.

В данной работе мы предприняли попытку, оставаясь в рамках обычного для статистической физики подхода, т.е. вводя усреднение по ансамблю и предъявляя к точности определения динамических характеристик системы требования лишь статистического характера, получить к.ур. без использования каких-либо гипотез или аналогий, так чтобы в ходе самого вывода выявить роль количественных параметров системы и определить границы применимости описания системы на языке к. ур.

В качестве модели мы рассмотрим нелинейный (в предельном случае - линейный) осциллятор, взаимодействующий с системой осцилляторов с дискретным спектром, без учета обратного влияния на эту систему. Очевидна преемственность этой модели с моделью работы /I/. Учет обратного воздействия пробного осциллятора на систему позволил бы получить к. ур. для конечной системы типа сгустка взаимодействующих частиц в накопителе, ядра (без квантовых эффектов) и т.д. Однако это обобщение нетривиально, и его рассмотрение требует отдельного исследования. Но уже и в этой постановке задача может иметь отношение к эксперименту, если обратное воздействие несущественно.



## 2. Модель

Рассмотрим поведение пробного одномерного нелинейного осциллятора, взаимодействующего с системой $N$ осцилляторов (или волн), движение которых будем считать заданным. Для простоты предполагается, что для пробного осциллятора зависимость частоты $\omega$ от действия $I$ линейна:

$$\frac{\partial\omega}{\partial I} = \omega' = Const\ ,$$

взаимодействие имеет всего одну гармонику, и можно пренебречь зависимостью ее амплитуды от действия. Мы будем рассматривать одномерный случай, поэтому можно перейти к переменным частота-угол. С этими оговорками уравнения принимают вид:

$$\dot\theta = \omega\ , \qquad \dot\omega = \omega' V e^{-i\theta} n(t) + к.с. \tag{2.I}$$

Возмущение $n(t)$, создаваемое внешними осцилляторами, можно охарактеризовать распределением $N$ осцилляторов по частотам и фазам, т.е. числами заполнения $m_{\mu\nu}(\varphi,\omega)$:

$$n(t) = \sum_{\rho=1}^{N} e^{i(\varphi_\rho+\omega_\rho t)} = \sum_{\mu,\nu=0}^{K} m_{\mu\nu}(\varphi,\omega)\, e^{i(\varphi_\mu+\omega_\nu t)} \tag{2.2}$$

Последняя сумма идет по $(K+1)^2$ ячейкам фазового пространства внешних осцилляторов, так что

$$\sum_0^K m_{\mu\nu} = N$$

Набор чисел заполнения $\{m_{\mu\nu}(\varphi\omega)\}$ мы будем называть определенной реализацией возмущения.

Возможны различные постановки задачи о движении осциллятора под воздействием возмущения $n(t)$. В самом простом случае требуется описать движение осциллятора, усредненное по различным реализациям возмущения. Такая ситуация возникает, если состояние внешних осцилляторов известно с определенной вероятностью (или погрешностью), или если проводится серия наблюдений пробного осциллятора, а описание должно дать среднее по серии поведение. Усреднение по реализациям наиболее просто проделать, если состояния внешних осцилляторов независимы и задана вероятность данному осциллятору попасть в ячейку ($\mu$, $\nu$). Например, если предположить равномерное распределение по фазам для внешних осцилляторов, то как показано в Приложении I в пределе $N \to \infty$, $\Delta\omega_\Sigma \to \infty$, $\frac{N}{\Delta\omega_\Sigma} \to \frac{dN}{d\omega} = Const$, среднее по реализациям

$$
\begin{aligned}
&\langle n(\tilde t)\rangle = \langle n^*(\tilde t)\rangle = 0 \\
&\langle n(\tilde t) n^*(\tilde t')\rangle = \mathcal{K}\,\delta(\tilde t - \tilde t') \qquad (2.3)\\
&\langle n(\tilde t_1) n(\tilde t_2) n^*(\tilde t_3) n^*(\tilde t_4)\rangle = \langle n(\tilde t_1) n^*(\tilde t_3)\rangle\langle n(\tilde t_2) n^*(\tilde t_4)\rangle + \\
&+ \langle n_1 n_4^*\rangle\langle n_2 n_3^*\rangle + \mathcal{K}'\,\delta(\tilde t_1 + \tilde t_2 - \tilde t_3 - \tilde t_4)
\end{aligned}
$$

и т.д.

Вычисление средних от более сложных выражений будет обсуждаться ниже. Здесь мы перешли к безразмерным переменным

$$\tilde t = t\sqrt{\omega' V}\,,\quad \tilde\omega = \frac{\omega}{\sqrt{\omega' V}}\,,\quad \mathcal{K} = 2\pi\frac{dN}{d\tilde\omega} = 2\pi\frac{dN}{d\omega}\sqrt{\omega' V} \qquad (2.4)$$

Отметим во избежание недоразумений, что в рассматриваемом пределе спектральная плотность $dN/d\omega$ остается конечной, что означает дискретность, а не непрерывность спектра возмущения.

В более сложном случае требуется описать поведение осциллятора в данном эксперименте. При наличии в системе неустойчивости, т.е. при определенных условиях на параметры системы, в этом случае возникает возможность описания поведения осциллятора с помощью кинетического уравнения. В этом смысле поведение осциллятора становится универсальным и перестает (с известной точностью) зависеть от конкретной реализации. От точности описания зависит лишь область применимости к. ур.

В дальнейшем мы рассмотрим оба эти случая.



## 3. Метод

Рассмотрим сначала первый случай, когда усреднение по реализациям оправдано физической постановкой задачи. Уравнения движения в безразмерных переменных (2.4) (тильды опускаем)

$$\dot\theta = \omega\,,\qquad \dot\omega = \xi(t)\,,\qquad \xi(t) \equiv n(t)e^{-i\theta} + к.с. \qquad (3.1)$$

имеют формальное решение

$$
\begin{aligned}
&\theta_\Gamma(t) \equiv \theta(t,\omega_0,\theta_0) = \theta_0 + \omega_0 t + \psi_\Gamma(t) \\
&\omega_\Gamma(t) \equiv \omega(t,\omega_0,\theta_0) = \omega_0 + \chi_\Gamma(t)
\end{aligned} \qquad (3.2)
$$

где

$$\chi_\Gamma(t) = \int_0^t dt'\,\xi_\Gamma(t')\,,\qquad \psi_\Gamma(t) = \int_0^t \chi_\Gamma(t')\,dt' = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\,\xi_\Gamma(t_2)$$

представляют приращение частоты и фазы, обусловленное взаимодействием.

Индекс $\Gamma$ соответствует определенной траектории, которая задается начальными условиями $\theta_0$, $\omega_0$.

Среднее от произведения $n(t), n^*(t)$ выражается через свертки, введенные в конце приложения I:

$$\langle n(t_1)\dots n(t_s)\, n^*(t_1')\dots n^*(t_s')\rangle_{2s} = \mathcal{K}\,\delta(t_1 + t_2 + \dots t_s - t_1' - \dots - t_s') \qquad (3.3)$$

$$s = 1, 2, \dots$$

Индекс $2s$ назовем порядком свертки. Например, последнее соотношение в (2.3) означает, что среднее $\langle n(t_1)n(t_2)n^*(t_3)n^*(t_4)\rangle$ выражается через произведение двух сверток второго порядка и одну свертку 4-го порядка:

$$\langle n_1 n_2 n_3^* n_4^*\rangle = \langle n_1 n_3^*\rangle\langle n_2 n_4^*\rangle + \langle n_1 n_4^*\rangle\langle n_2 n_3^*\rangle + \langle n_1 n_2 n_3^* n_4^*\rangle_4$$

Прежде чем приступать к выводу к. ур., попробуем представить, как зависит характер движения пробного осциллятора от параметров задачи, исследуя средние $\langle x(t)\rangle$, $\langle x^2(t)\rangle$ $\langle x^4(t)\rangle$. Задача об отыскании этих средних достаточно сложна. Например, в выражении

$$x^2(t)=\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\left[n_1 n_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}+n_1 n_2^* e^{-i(\theta_1-\theta_2)}+к.с.\right] \qquad (3.4)$$

$\theta_1=\theta(t_1)$, $\theta_2=\theta(t_2)$ под интегралом сами зависят от взаимодействия, т.е. правая часть представляет собой бесконечный ряд по степеням $n, n^*$.

Рассмотрим структуру такого ряда для $\langle x^2(t)\rangle$. Низший член этого ряда равен:

$$\int_0^t dt_1\int_0^t dt_2\langle n_1 n_2^*+к.с.\rangle = 2\mathcal{K}t$$

и получается из (3.4) заменой $exp[i(\psi_1-\psi_2)]$ на единицу. Следующий неисчезающий член возникнет при разложении $exp(i\psi)$ и будет содержать $(nn^*)^2$, например:

$$\frac{(-i)^2}{2}\int_0^t dt_1 dt_2\, n_1 n_2^* \psi_1\psi_2 ,$$

при его усреднении возникнут произведения двух сверток второго порядка, что даст величину порядка ( $-\mathcal{K}^2t^4$ ), и одна свертка 4-го порядка $(-\mathcal{K}t^5)$.

Всегда, при усреднении данной степени $nn^*$ переход от произведения двух любых сверток более низкого порядка к одной свертке более высокого порядка будет давать множитель $t/\mathcal{K}$.

Таким образом, структура ряда может быть изображена следующей таблицей

Таблица I

| Степень $nn^*$ / Свертка | $nn^*$ | $(nn^*)^2$ | $(nn^*)^3$ | ... |
|---|---|---|---|---|
| $②^n$ | $\mathcal{K}t$ | $-\mathcal{K}^2t^4$ | $\mathcal{K}^3t^7$ | ... |
| $④\cdot②^{s-2}$ | | $-\mathcal{K}t^5$ | $\mathcal{K}^2t^8$ | ... |
| $⑥\cdot②^{s-3}+④^2\cdot②^{s-4}$ | | | $\mathcal{K}t^9$ | ... |
| ... | | | | |



В каждом столбце приведен порядок величины членов, получающихся при усреднении соответствующей степени $nn^*$. В первой строке идут члены, возникающие при разбиении среднего только на произведения сверток второго порядка. Следующая строка получается после выделения в среднем одной свертки 4-го порядка, а оставшиеся множители выражаются через произведения сверток 2-го и т.д. Переход в данном столбце на строку вниз получается умножением на $t/\mathcal{K}$ без изменения знака. В данной строке члены знакопеременны и представляют ряд по $\mathcal{K}t^3$.

Полное суммирование всех членов ряда эквивалентно точному решению задачи и вряд ли возможно. Рассмотрим поэтому два предельных случая малых и больших $\mathcal{K}$.

При $\mathcal{K}<<1$ следует отсуммировать все члены ряда (стоящие по диагонали в табл.I), пропорциональные первой степени К, т.е. свертки максимально возможного порядка. Это приближение соответствует учету взаимодействия с одной внешней гармоникой, по частоте которой проводится усреднение (см.Приложение I).

В применении к $\langle x^2(t)\rangle$ такая сумма (см.Приложение 2) равна:

$$\langle x^2(t)\rangle = \mathcal{K}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\nu}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}x^2(t,\nu,\varphi) \qquad (3.5)$$

где $x(t,\nu,\varphi)=\dot\psi(t,\nu,\varphi)$

и $\psi$ определяется уравнением

$$\ddot\psi(t,\nu,\varphi)=2\cos(\nu t-\varphi+\psi);\quad \psi(0)=\dot\psi(0)=0 \qquad (3.6)$$

Если ввести медленную фазу

$$\chi(t)=\nu t-\varphi+\psi,\qquad \chi(0)=-\varphi,\quad \dot\chi(0)=\nu$$

то движение, описываемое уравнением (3.6), соответствует движению с гамильтонианом

$$H=\dot\chi^2/2-2\sin\chi$$

$$\langle x^2(t)\rangle = 4\mathcal{K}\int\frac{d\nu\, d\varphi}{(2\pi)^2}\left(\int_0^t dt'\cos\chi(t')\right)^2$$

так что

$$\langle x^2(t)\rangle = 4\mathcal{K}\int \frac{d\nu\, d\varphi}{(2\pi)^2}\Big(\int_0^t dt' \cos\chi(t')\Big)^2 \tag{3.7}$$

$$\langle x^2\rangle \approx \mathcal{K}$$

В размерных единицах

$$\langle (I-I_0)^2\rangle \sim \frac{dN}{d\omega}\,\nu^{3/2}/\sqrt{\omega'} \tag{3.8}$$

Полученный результат показывает, что движение осциллятора в этом приближении сводится к движению в поле одной гармоники с частотой $\nu$ . При $\nu<\sqrt{8}$ движение по $\chi$ финитно, что соответствует движению в сепаратрисе. При $\nu>\sqrt{8}$ движение по $\chi$ инфинитно, при $\nu\gg\sqrt{8}$ $\chi\simeq\nu t-\varphi$. В отличие от случая линейного осциллятора $(\omega'\to 0,\ (\Delta I)^2\to\infty)$, $\langle x^2(t)\rangle$ при $\mathcal{K}\ll 1$ остается конечным, не нарастая со временем при $t\to\infty$ .

Последующее интегрирование по $\nu$ , $\varphi$ является усреднением по реализациям, и результат (3.7) есть просто отношение ширины сепаратрисы $\sqrt{\omega' V}$ к среднему расстоянию по частоте между гармониками возмущения ( $dN/d\omega$ ).

Аналогично можно показать, что сумма членов, пропорциональных $\mathcal{K}^2$ , соответствует взаимодействию с двумя гармониками возмущения (см.Приложение 2), описывая отличие в воздействии одновременно двух гармоник от независимого воздействия каждой из них. $\langle x^2(t)\rangle$ получается из решения этой динамической задачи последующим усреднением по частотам этих гармоник (см.П.(2.6) $\div$ (2.8)). Вообще, члены, пропорциональные $\mathcal{K}^\lambda$, описывают отличие в поведении осциллятора в поле $\lambda$ одновременно действующих гармоник от их независимого, парного и т.д. до ( $\lambda-1$ ) воздействия.



Как видно из вывода, доказательство, приведенное для $\langle x^2(t)\rangle$ , можно без изменения повторить для любого функционала $\Phi(x)$ .

Таким образом, при $\mathcal{K}\ll 1$ воздействие отдельных гармоник сигнала можно, с точностью до членов $O(\mathcal{K}^2)$, считать независимым. Движение осциллятора остается обратимым (устойчивым), даже при усреднении по конечной ячейке фазового пространства.

Может показаться, что в предельном случае линейного осциллятора ( $\omega'\to 0$ ), результат (3.8) можно интерпретировать как возникновение необратимости в движении осциллятора. В действительности при $\mathcal{K}\ll 1$ величина $\langle x^2(t)\rangle$ при больших временах не является показательной характеристикой. Аналогично (3.5) найдем, например, что момент

$$\langle x^4(t)\rangle = \frac{16\mathcal{K}}{(2\pi)^2}\int d\nu\, d\varphi\Big(\int_0^t dt'\cos\chi(t')\Big)^4 \tag{3.9}$$

Очевидно, что при $t\to\infty$ $\langle x^4\rangle\sim\mathcal{K}$ , так что

$$\langle x^4\rangle \sim \mathcal{K}^{-1}\langle x^2\rangle^2 \gg \langle x^2\rangle^2 \tag{3.I0}$$

Большая величина дисперсии $\langle x^4\rangle-\langle x^2\rangle^2$ означает сильную зависимость характера движения от конкретной реализации возмущения, что связано с чувствительностью поведения линейного осциллятора (при $t\to\infty$ ) к положению частот внешнего сигнала. Как будет подробно показано ниже, представление о диффузионном росте амплитуд при $\mathcal{K}\ll 1$ может быть справедливым лишь для времен $t<\mathcal{K}$ (в размерных единицах $t< dN/d\omega$ ).

При $\mathcal{K}>1$ размер сепаратрисы становится больше расстояния между резонансами, и определяющим становится взаимодействие резонансов. Рассмотрим сначала времена $t\ll\mathcal{K}$ , хотя потом будет видно, что это ограничение можно снять. Поскольку в табл.I каждый член нижней строки получается из расположенного над ним умножением на $t/\mathcal{K}\ll 1$ , то главный вклад дает сумма членов верхней строки, которые возникают при разбиении среднего на произведение сверток второго порядка. Вычисление $\langle x^2(t)\rangle$ при этом становится тривиальным. Действительно, заметим, что в приближении сверток второго порядка из (2.3) следует, что

$$\langle n(t_1) e^{i\theta(t)}\rangle_{②} = 0 \text{ , если } t_1 \ge t \qquad (3.II)$$

т.к. $\theta(t)$ выражается через интегралы от $n(t')$ с $t' \le t$. Поэтому $\langle x^2(t)\rangle_{②} = 0$ только за счет свертки $\langle n_1 n_2^*\rangle$, стоящей под интегралом в (3.4) в предэкспоненте.
Это дает

$$\langle x^2(t)\rangle = \int_0^t dt_1 dt_2 \, \mathcal{K}\delta(t_1 - t_2)\langle e^{i(\theta_1 - \theta_2)}\rangle + к.с. = 2\mathcal{K}t \qquad (3.I2)$$

Следовательно, все члены первой строки табл.I кроме первого, обращаются в нуль.

Поправка к (3.I2) возникает от членов, стоящих во второй строке табл.I, которые получаются, если в $\langle x^2(t)\rangle$ учесть одну свертку 4-го порядка. При $\mathcal{K}t^3 \ll 1$ поправка определяется первым членом этой строки, т.е. равна $\sim\mathcal{K}t^5$, что меньше, чем (3.I2), в $t^{-4} \gg \mathcal{K}^{4/3} \gg 1$ раз. При $\mathcal{K}t^3 \gg 1$ следует отсуммировать все члены второй строки. При суммировании знакопеременного ряда первый член почти полностью компенсируется и, как показано в Приложении 3 (см.П. 3.6), сумма имеет порядок $2\mathcal{K}t\cdot\mathcal{K}^{-4/3}$. Тем же методом можно отсуммировать члены третьей строки табл.I, которые дадут поправку порядка $2\mathcal{K}t\cdot\mathcal{K}^{-8/3}$, и т.д.

Очевидно, вклад более высоких сверток не может дать членов, растущих при больших временах быстрее, чем по линейному закону. Поэтому описанным способом может быть построен ряд по обратным степеням $\mathcal{K}$, справедливый при всех временах. Как было показано, главный вклад в $\langle x^2(t)\rangle$ дают свертки второго порядка:

$$\langle x^2(t)\rangle = 2\mathcal{K}t\left[1 - O(\mathcal{K}^{-4/3})\right] \qquad (3.I3)$$



Таким образом, при $\mathcal{K} \gg 1$ взаимодействие резонансов приводит к разрушению парных корреляций и линейному росту $\langle x^2(t)\rangle$ со временем. При этом величина $\langle x^2(t)\rangle$, в отличие от случая $\mathcal{K} \ll 1$, является показательной характеристикой движения осциллятора. Так, при $\mathcal{K} \gg 1$ (см.Приложение 3)

$$\langle x^4(t)\rangle \approx 3\langle x^2(t)\rangle^2 \qquad (3.I4)$$

– соотношение, характерное для моментов функции распределения диффузионного уравнения. Действительно, как будет показано в П.4, возможность ограничиться свертками второго порядка позволяет описывать поведение системы с помощью уравнения диффузии. В линейном случае $\langle x^2(t)\rangle = 2\mathcal{K}t$, но

$$\langle x^4(t)\rangle = 3\langle x^2(t)\rangle^2(1 + t/3\mathcal{K})$$

где член $t/\mathcal{K}$ возникает за счет свертки четвертого порядка. Таким образом, при $t > \mathcal{K}$ свертки 2-го порядка не являются в линейном случае главными, и соотношение между моментами, характерное для диффузии, имеет место лишь при $t \ll \mathcal{K}$ (размерное время $t \ll dN/d\omega$). Это замечание поясняет, в каком смысле кинетическое уравнение может применяться для описания системы линейных осцилляторов (см.также раздел 6).
В заключение отметим, что для усреднения по реализациям нетрудно построить некоторую диаграммную технику. Использованный метод эквивалентен суммированию определенных классов диаграмм.

## 4. Кинетическое уравнение

Получим кинетическое уравнение, по-прежнему, считая, что усреднение по реализациям физически оправдано. Функция распределения (ф.р.) $f(\omega,\theta,t)$ может быть получена из своего значения при $t=0$, если использовать решение (3.2), описывающее движение по траектории:

$$f(\omega,\theta,t)=\int d\Gamma f(\Gamma,0)\delta(\omega-\omega_r(t))\delta(\theta-\theta_r(t)) \qquad (4.1)$$

где

$$d\Gamma=d\overset{\circ}{\omega}d\overset{\circ}{\theta}, \quad \omega_r(0)=\overset{\circ}{\omega}, \quad \theta_r(0)=\overset{\circ}{\theta}$$

$$f(\Gamma,0)=f(\overset{\circ}{\omega},\overset{\circ}{\theta},0), \quad \int d\Gamma f(\Gamma,0)=1$$

$f(\Gamma,0)$ – начальное распределение при $t=0$.

Усредним (4.1) по реализациям:

$$\langle f(\omega,\theta,t)\rangle=\int d\Gamma f(\Gamma,0)G(\omega\theta|\overset{\circ}{\omega}\overset{\circ}{\theta},t) \qquad (4.2)$$

Здесь введена функция Грина

$$G(\omega\theta|\overset{\circ}{\omega}\overset{\circ}{\theta},t)\equiv G(1|\overset{\circ}{1},t)=\langle\delta(\omega-\omega_r(t))\delta(\omega-\theta_r(t))\rangle \qquad (4.3)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет функция Грина. Используем ее фурье-разложение

$$G(1|\overset{\circ}{1},t)=\sum_\kappa\int\frac{d\eta}{(2\pi)^2}G_\kappa(\eta,t)e^{i\kappa\theta+i\eta\omega}$$

и рассмотрим фурье-гармонику

$$G_\kappa=\langle g_\kappa(\eta,t)\rangle, \qquad g_\kappa(\eta,t)=e^{-i\kappa\theta_r(t)-i\eta\omega_r(t)}$$

Дифференцируем $G_\kappa(\eta,t)$ по времени, используя уравнения движения (3.1)

$$\dot G_\kappa=\kappa\frac{\partial G_\kappa}{\partial\eta}-i\eta\langle\zeta_r(t)g_\kappa(\eta,t)\rangle \qquad (4.4)$$

Для определения последнего среднего перепишем уравнение



в виде

$$g_\kappa(t)=g_\kappa(0)-i\int_0^t dt'[\kappa\omega_r(t')+\eta\zeta_r(t')]g_\kappa(t') \qquad (4.5)$$

Теперь $\langle\zeta_r(t)g_\kappa(t)\rangle$ легко вычисляется. Как было показано в П.3 при $\mathcal{K}\gg1$, а также при $\mathcal{K}\lesssim1$, $t\ll\mathcal{K}$ следует учитывать только свертки второго порядка. Поэтому все последующее рассмотрение применимо в обоих этих случаях (П.4.5).

В приближении сверток второго порядка

$$\langle\eta(t)\theta_r(t)\rangle_{②}=\langle n(t)\int_0^{t'}dt''\omega_r(t'')\rangle_{②}=c \qquad \text{при } t\geq t'$$

$$\langle\zeta_r(t)\zeta_r(t')\rangle_{②}=2\mathcal{K}\delta(t-t')$$

Поэтому (сравни (3.11)) $\langle\zeta_r(t)\rangle=0$ и, поскольку $g_\kappa(t)$ является функционалом от $\theta(t)$, $\omega(t)$, то

$$\langle\zeta_r(t)g_\kappa(t)\rangle_{②}=-i\eta\mathcal{K}G_\kappa(\eta,t) \qquad (4.6)$$

Окончательно находим:

$$\dot G_\kappa-\kappa\,\partial G_\kappa/\partial\eta+\mathcal{K}\eta^2G_\kappa=0$$

Для функции Грина отсюда следует уравнение диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}G(1|\overset{\circ}{1},t)+\omega\,\partial G/\partial\theta-\mathcal{K}\frac{\partial^2G}{\partial\omega^2}=0 \qquad (4.7)$$

Решение (4.7) с начальным условием (4.3) имеет вид:

$$G(1|\overset{\circ}{1},t)=\sum_\kappa\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{K}t}}e^{-\frac{(\omega-\overset{\circ}{\omega})^2}{4\mathcal{K}t}-i\kappa\frac{\omega+\overset{\circ}{\omega}}{2}t-\frac{1}{12}\mathcal{K}\kappa^2t^3} \qquad (4.8)$$

Тому же уравнению удовлетворяет, естественно и ф.р. (4.2). При $\mathcal{K}\gg1$, из (4.2), (4.8) видно, что все фазовые гармоники ф.р. ($\kappa\neq0$) после усреднения по реализациям при $\mathcal{K}t^3\gg1$ затухают со временем экспоненциально. Поэтому их величина определяется не формулой (4.8), а их дисперсией, т.е. величиной их флуктуаций.

В Приложении 3 приведено выражение поправки к $G_0(\eta,t)$, возникающей при учете одной свертки четвертого порядка. Соответствующие поправки ко всем моментам ф.р., легко определяемые через $G_0(\eta,t)$, имеют при $\mathcal{K}\gg 1$ относительный порядок $\lesssim \mathcal{K}^{-4/3}$, как и следовало ожидать. Таким образом, при $\mathcal{K}\gg 1$, либо $\mathcal{K}\lesssim 1,\ t\ll\mathcal{K}$ возможность ограничиться свертками низшего порядка и, в частности, свертками второго порядка, сразу приводит к дифференциальному по времени уравнению (4.7), т.к. масштаб временных корреляций (2.3) в этих условиях стремится к нулю. При этом получается и правильный знак диффузионного члена. Использование вместо (4.5) "опережающего" интегрального уравнения (с интегрированием от $t$ до $\infty$) не приводит к его изменению, т.к. $g(t)$ функционально зависит от $n(t')$ с $t'<t$, так что факторизация, подобная (4.6), не будет иметь место.

## 5. Зависимость от реализаций

Перейдем теперь к случаю, когда требуется описать поведение осциллятора в данном эксперименте (ср.конец П.2). Физический интерес представляют моменты ф.р., то есть средние от плавных функций $\Phi(\omega,\theta)$:

$$\bar{\Phi} = \int d\omega\, d\theta\, f(\omega,\theta,t)\,\Phi(\omega,\theta)$$

где $f(\omega,\theta,t)$ – точная одночастичная ф.р. (4.I).

Описание поведения системы в данном эксперименте с помощью усредненной ф.р. $\langle f(\omega,\theta,t)\rangle$ можно сохранить, если зависимость от реализации является слабой, т.е. $\bar{\Phi}\approx\langle\Phi\rangle$. Это требование можно записать как требование малости относительной дисперсии:

$$\mathcal{D} = \frac{\langle(\bar{\Phi})^2\rangle - \langle\bar{\Phi}\rangle^2}{\langle\bar{\Phi}\rangle^2} \ll 1 \qquad (5.I)$$



Здесь $\langle\bar{\Phi}\rangle = \int d\omega d\theta \langle f(\omega,\theta,t)\rangle \Phi(\omega,\theta)$

где усредненная по реализациям ф.р. $\langle f(\omega,\theta,t)\rangle$ удовлетворяет при $\mathcal{K}\gg 1$ кинетическому уравнению (4.6), а

$$\langle(\bar{\Phi})^2\rangle = \int d(1)d(2)\langle f(1,t)f(2,t)\rangle \Phi(1)\Phi(2)$$

выражается через усредненную двухчастичную ф.р.

$$\langle f(1,2,t)\rangle = \langle f(1,t)f(2,t)\rangle$$

Условие (5.I) можно, обычно, заменить условием малости двухчастичного коррелятора

$$R(1,2,t) = \langle f(1,2,t)\rangle - \langle f(1,t)f(2,t)\rangle$$

т.е. требованием

$$R(1,2,t) \ll \langle f(1,t)\rangle\cdot\langle f(2,t)\rangle \qquad (5.2)$$

хотя, вообще говоря, условия (5.I) и (5.2) эквивалентны не для любых физических величин $\Phi(\omega,\theta)$. Подчеркнем, что моменты, полученные с помощью одночастичной усредненной ф.р. $\langle f(1,t)\rangle$ показательны лишь при условии малости двухчастичного коррелятора. В противном случае величины всех одночастичных моментов будут определяться не только $\langle f(1,t)\rangle$, но и их дисперсией, то есть коррелятором $R(1,2,t)$.

Уравнение для двухчастичной ф.р. $\langle f(1,2,t)\rangle$ можно получить так же, как это было сделано для одночастичной ф.р. Введем функцию Грина.

$$G(1,2|\mathring{1}\mathring{2},t) = \langle\delta(\omega_1-\omega_1(t))\delta(\omega_2-\omega_2(t))\delta(\theta_1-\theta_1(t))\delta(\theta_2-\theta_2(t))\rangle$$

где $\omega_{1,2}(t)$, $\theta_{1,2}(t)$ – траектории первой и второй частиц с начальными условиями $\omega_{1,2}(0)=\mathring{\omega}_{1,2}$, $\theta_{1,2}(0)=\mathring{\theta}_{1,2}$. Функция Грина при $t=0$ имеет вид:

$$G(12|\mathring{1}\mathring{2},t) = \delta(\omega_1-\mathring{\omega}_1)\delta(\omega_2-\mathring{\omega}_2)\delta(\theta_1-\mathring{\theta}_1)\delta(\theta_2-\mathring{\theta}_2) \qquad (5.4)$$

Усредненная двухчастичная ф.р. выражается через интеграл функции Грина с начальным условием $f(1,2,0)=f(\mathring{1}\mathring{2})$

$$\langle f(1,2,t)\rangle = \int d\mathring{1}\, d\mathring{2}\, f(\mathring{1}\mathring{2})\, G(12|\mathring{1}\mathring{2},t) \tag{5.5}$$

Введем фурье-гармонику функции Грина (5.3)

$$G_{m_1m_2}(\eta_1\eta_2 t)=\langle g_{m_1m_2}(\eta_1\eta_2 t)\rangle=\langle \exp[-i(\eta_1\omega_1+\eta_2\omega_2+m_1\theta_1+m_2\theta_2)]\rangle$$

Аналогично (4.4) ее производная по времени

$$\frac{\partial G_{m_1m_2}}{\partial t}=\Big(m_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}+m_2\frac{\partial}{\partial\eta_2}\Big)G_{m_1m_2}-i\langle(\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2)g_{m_1m_2}\rangle \tag{5.6}$$

выражается через среднее

$$-i\langle(\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2)g_{m_1m_2}\rangle_{2}=-\Big\langle(\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2)\int_0^t dt'\, g_{m_1m_2}(t')\,[\zeta_1(t')\eta_1+\zeta_2(t')\eta_2]\Big\rangle_{2}$$

В приближении сверток второго порядка $(\mathcal{K}\gg 1$, либо $\mathcal{K}\lesssim 1$ и $t\ll\mathcal{K})$ не исчезают лишь члены, в которых $n(t)$, входящие в $\zeta(t)$, свертываются между собой (ср. с П.4).

При этом

$$\langle\zeta_1(t)\zeta_2(t')g_{m_1m_2}(t')\rangle=\langle[n e^{-i\theta_1}+\text{к.с.}]_t(n e^{-i\theta_2}+\text{к.с.})_{t'}\, g_{m_1m_2}(t')\rangle=$$
$$=2\mathcal{K}\,\delta(t-t')\langle \cos(\theta_1-\theta_2)_t\, g_{m_1m_2}(t)\rangle \tag{5.7}$$

Таким образом

$$-i\langle(\zeta_1\eta_1+\zeta_2\eta_2)g_{m_1m_2}\rangle=-\mathcal{K}(\eta_1^2+\eta_2^2)G_{m_1m_2}-\mathcal{K}\eta_1\eta_2(G_{m_1+1,m_2-1}+G_{m_1-1,m_2+1})$$

возвращаясь к функции Грина, окончательно находим

$$\frac{\partial G_{12}}{\partial t}+\Big[\omega_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\omega_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}-\mathcal{K}\Big(\frac{\partial^2}{\partial\omega_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2}\Big)\Big]G_{12}=2\mathcal{K}\cos(\theta_1-\theta_2)\frac{\partial^2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}G_{12} \tag{5.8}$$

Как видно, двухчастичная функция Грина не сводится к произведению одночастичных, хотя прямого взаимодействия между частицами I,2 нет. Причиной этого является динамическая корреляция между частицами (правая часть (5.8)), возникающая вследствие взаимодействия каждой из них с одной и той же внешней системой.



В отличие от цепочки ББКГИ, уравнения (4.7), (5.8) независимы и имеют диффузионный характер без привлечения гипотезы расцепления корреляций. По отношению к одночастичной ф.р. уравнение (5.8) служит лишь для определения пределов применимости (4.7) для описания данного эксперимента.

При наличии стохастичности естественно ожидать, что двухчастичная функция Грина при достаточно больших временах будет факторизоваться как произведение одночастичных. Момент, с которого начинается факторизация, зависит от начальных условий. Очевидно, что если при $t=0$ частицы находятся в одной точке, то есть $\mathring{\omega}_1=\mathring{\omega}_2$, $\mathring{\theta}_1=\mathring{\theta}_2$, то ясно, что их траектории будут совпадать и в дальнейшем, т.е. $G(12|\mathring{1}\mathring{2},t)\sim\delta(1-2)$ в любой момент времени. Из уравнения (5.8) видно, что такое решение действительно имеет место. Рассмотрим поэтому, как ведут себя близкие в начальный момент траектории. С помощью (5.8) нетрудно получить соотношения:

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\omega)^2\rangle=8\mathcal{K}\Big\langle \sin^2\frac{\Delta\theta}{2}\Big\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\theta)^2\rangle=2\langle\Delta\theta\Delta\omega\rangle \tag{5.9}$$
$$\frac{d}{dt}\langle\Delta\omega\Delta\theta\rangle=\langle(\Delta\omega)^2\rangle$$

где $\Delta\theta=\theta_1-\theta_2$, $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$. При условии $\langle(\Delta\theta)^2\rangle\ll 1$ получаем замкнутую систему уравнений для трех моментов, одно из решений которой экспоненциально растет со временем:

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle\sim\Delta^2 e^{\lambda t},\quad \langle(\Delta\omega)^2\rangle\sim(\mathcal{K}\Delta^2/\lambda)e^{\lambda t}$$
$$\lambda=(4\mathcal{K})^{1/3},\quad \Delta^2=\frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{\Delta\mathring{\omega}}{\lambda}\Big)^2+\Big(\Delta\mathring{\theta}+\frac{\Delta\mathring{\omega}}{\lambda}\Big)^2\Big] \tag{5.I0}$$

Из (5.I0) видно, что экспоненциальное расхождение траекторий имеет место при достаточной малости начального расстояния между частицами:

$$\Delta\mathring{\theta}\ll 1,\quad \Delta\mathring{\omega}\ll\mathcal{K}^{1/3} \tag{5.II}$$

При этом время, за которое разность фаз становится порядка единицы, то есть время расцепления корреляций, весьма слабо, лишь логарифмически, растет с уменьшением расстояния $\Delta$ :

$$\tilde{\tau}_c \sim \mathcal{K}^{-1/3} \ln (1/\Delta^2) \qquad (5.\mathrm{I}2)$$

Этот результат согласуется с утверждением Б.В.Чирикова /2/. Экспоненциальный рост прекращается, начиная с момента $t \sim \tilde{\tau}_c$, после чего $\langle(\Delta\omega)^2\rangle$ растет со временем лишь линейно:

$$\langle(\Delta\omega)^2\rangle \to 4\mathcal{K}t \ , \quad t \gg \tilde{\tau}_c \qquad (5.\mathrm{I}3)$$

При этом двухчастичная функция Грина факторизуется, дисперсия становится малой. Если начальное расстояние по частоте велико $\Delta\mathring{\omega}_0 > \mathcal{K}^{1/3}$, то факторизация наступает раньше, с времен

$$t > (\Delta\mathring{\omega})^{-1} \qquad (5.\mathrm{I}4)$$

Дисперсия ф.р. и ее моментов (5.I) зависит от ширины начальной ф.р. $f(\mathring{1}\mathring{2})$, точнее говоря, от вклада близких начальных условий в интеграл (5.5).

Для времен (5.I3), (5.I4) можно ожидать, что корреляция частиц I,2, обусловленная правой частью (5.8), мала. Поэтому решение на этих временах можно искать итерациями, приняв за нулевое приближение решение (5.8) без правой части. Введем функцию Грина однородного уравнения (5.8):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \mathcal{K}\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2}\right)\right] \mathring{G}(12|1'2',t) = 0 \qquad (5.\mathrm{I}5)$$

с начальным условием $\mathring{G}(12|1'2',0) = \delta(1-1')\,\delta(2-2')$.
Фазовые гармоники $\mathring{G}$ имеют вид

$$\mathring{G}_{m_1m_2} = (4\pi\mathcal{K}t)^{-1} \exp\Big\{-(m_1^2+m_2^2)\mathcal{K}t^3/12 - \left[(\omega_1-\omega_1')^2 + (\omega_2-\omega_2')^2\right]/4\mathcal{K}t - \frac{it}{2}\left[m_1(\omega_1+\omega_1') + m_2(\omega_2+\omega_2')\right]\Big\} \qquad (5.\mathrm{I}6)$$



Уравнение (5.8) для фазовых гармоник функции $G_{12}$ можно записать в виде:

$$G_{m_1m_2}(\omega_{1,2}|\mathring{\omega}_{1,2},t) = \mathring{G}_{m_1m_2}(\omega_{1,2}|\mathring{\omega}_{1,2},t) + \mathcal{K}\int_0^t dt' \int d\omega_1' d\omega_2' \, \mathring{G}_{m_1m_2}(\omega_{1,2}|\omega_{1,2}',t-t') \frac{\partial^2}{\partial\omega_1'\partial\omega_2'}\left[G_{m_1-1,m_2+1}(\omega_{1,2}'|\mathring{\omega}_{1,2},t') + G_{m_1+1,m_2-1}(\omega_{1,2}'|\mathring{\omega}_{1,2},t')\right] \qquad (5.\mathrm{I}7)$$

Первый член в (5.I7), являющийся решением однородного уравнения (5.I6), при $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$ экспоненциально затухает со временем. Вследствие этого зависимость фазовых гармоник ф.р. (5.5) от начальных условий экспоненциально мала при рассматриваемых временах. Наоборот, для среднего по фазам ( $m_1 = m_2 = 0$ ) главным остается факторизованное решение (5.I6) $\mathring{G}_{00}$. Интегральный член в (5.I7) дает в этом случае малую поправку, определяющую величину дисперсии нулевой гармоники. Величины остальных гармоник определяются взаимодействием их с нулевой гармоникой. В рассматриваемой модели, где во взаимодействии есть лишь одна гармоника, возбуждение гармоник функции Грина (и, следовательно, гармоник ф.р.) идет последовательно: $G_{00}$ возбуждает $G_{\pm1,\mp1}$, в свою очередь первая гармоника возбуждает вторую и т.д. Вследствие того, что взаимодействие зависит от разности фаз, при больших временах оказываются возбужденными лишь гармоники вида $G_{n,-n}$.

Для первой гармоники, после интегрирования в (5.I7) по частотам, получим:

$$G_{1,-1} = \mathcal{K}\int_0^t dt' \exp\Big\{-\frac{\mathcal{K}}{6}(t-t')^3 - \frac{\mathcal{K}t'}{2t}(t-t')^3 - i(\omega_1-\omega_2)(t-t')\Big\} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\mathring{\omega}_1\partial\mathring{\omega}_2} G_{00}(\omega_{1,2}|\mathring{\omega}_{1,2},t) \exp\Big\{i\frac{(t-t')^2}{2t}\left[(\omega_1-\mathring{\omega}_1) - (\omega_2-\mathring{\omega}_2)\right]\Big\} \qquad (5.\mathrm{I}8)$$

Оценка этого интеграла различна в зависимости от соотношения между $\Delta\mathring{\omega}$ и $\mathcal{K}^{1/3}$. Для близких траекторий $\Delta\mathring{\omega} < \mathcal{K}^{1/3}$ асимптотический режим, согласно (5.I2), наступает для времен $t > \mathcal{K}^{-1/3}\ln(1/(\Delta\mathring{\omega})^2)$. При этом характерные $|t-t'| \sim \sqrt{(\mathcal{K}t)^{-1/2}}$, и для характерных $|\omega_1-\mathring{\omega}_1| \sim |\omega_2-\mathring{\omega}_2| \sim \sqrt{\mathcal{K}t}$

$$G_{1,-1} \sim \sqrt{\mathcal{K}/t}\, \frac{\partial^2 G_{00}}{\partial\omega_1\partial\omega_2} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}t^3}}\, G_{00} \qquad (5.I9)$$

Если $\Delta\mathring{\omega} > \mathcal{K}^{1/3}$, то асимптотический режим начинается раньше, с $t > (\Delta\mathring{\omega})^{-1}$. Характерные $t-t'$ и $G_{1,-1}$ порядка:

$$t-t' \sim (\Delta\mathring{\omega})^{-1}, \quad G_{1,-1} \sim \frac{1}{\Delta\mathring{\omega} t}\, G_{00}; \quad \frac{1}{\Delta\mathring{\omega}} < t < \frac{(\Delta\mathring{\omega})^2}{\mathcal{K}} \qquad (5.20)$$

$$t-t' \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}t}}, \quad G_{1,-1} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}t^3}}\, G_{00}; \quad t > (\Delta\mathring{\omega})^2/\mathcal{K} \qquad (5.2I)$$

Относительная величина $G_{1,-1}/G_{00}$ всегда, таким образом, порядка $[t\,\Delta\omega(t)]^{-1}$, где $\Delta\omega(t)$ – текущая разность частот, равная начальному значению или определяемая динамическим расхождением траекторий $\Delta\omega \sim \sqrt{\mathcal{K}t}$.

Аналогично гармоники $G_{\pm1,\mp1}$ возбуждают гармоники $G_{\pm2,\mp2}$, для которых относительная величина $G_{\pm2;\mp2}/G_{00}$ порядка $[t\,\Delta\omega(t)]^{-2}$, и т.д.

Поскольку фазовые гармоники ( $m\neq0$ ) одночастичной функции Грина (и ф.р.) затухают со временем экспоненциально (4.8), то их величина определяется дисперсией (5.I9) – (5.2I), которая уменьшается со временем степенным образом, пока не станет порядка термодинамических флуктуаций. Отметим, что фазовые гармоники возбуждаются, даже если начальное распределение их не содержало, точнее – их начальное значение вообще не играет роли. Следовательно, утверждение о сохранении во времени равномерности распределения по фазам, имевшей место при $t$ =0, верно лишь асимптотически.

Дисперсия нулевой гармоники определяется обратным влиянием первой в (5.I7) с $G_{\pm1,\mp1}$ из (5.I9) – (5.2I). Оценка дает:



(5.22)

так что относительная дисперсия нулевой гармоники уменьшается обратно пропорционально $\Delta\mathring{\omega} t$ или $\sqrt{\mathcal{K}t^3}$.

За факторизацией двухчастичной ф.р. можно проследить более подробно, если в качестве нулевого приближения использовать решение, полученное в пренебрежении дисперсией $\cos(\theta_1-\theta_2)$. Перепишем уравнение (5.8), выделив из правой части "самосогласованную" часть:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \left[\omega_1\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} - \mathcal{K}\left(\frac{\partial^2}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2} + 2C(t)\frac{\partial^2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\right)\right] G = \qquad (5.23)$$

$$= 2\mathcal{K}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) - C(t)\right]\frac{\partial^2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\, G\,,$$

где

$$C(t) = \langle \cos(\theta_1-\theta_2)\rangle = \int d(1)\,d(2)\,G(12|\mathring{1}\mathring{2},t)\cos(\theta_1-\theta_2);$$

решение $G$ удовлетворяет прежним начальным условиям (см. (5.4)). Такое представление удобно тем, что на временах, пока диффузия относительной фазы мала, правой частью можно пренебречь (в начальный момент она просто равна нулю). Поэтому на малых временах поведение описывается "однородным" решением (5.23), а на больших можно учесть правую часть итерациями, аналогично сделанному выше.

Построив решение (5.23) без правой части, из условия согласования получим уравнение для $C^{(0)}(t)$:

$$C^{(0)}(t) = \cos(\Delta\mathring{\theta} + \Delta\mathring{\omega} t)\exp\left[-2\mathcal{K}\int_0^t dt'(t-t')^2\left(1 - C^{(0)}(t')\right)\right] \qquad (5.24)$$

Отсюда видно, что если начальные условия для двух частиц совпадают $\Delta\mathring{\theta} = \Delta\mathring{\omega} = 0$, то решением (5.24) является C=I, и, согласно (5.23) корреляция между частицами остается всегда. В противном случае $C^{(0)}(t)$, вообще говоря, экспоненциально затухает со временем, а корреляцию при больших временах, степенным образом падающую со временем, можно найти итерациями по правой части (5.23).

В заключение этого раздела остановимся на вопросе о свойствах кинетического уравнения относительно обращения времени, т.е. замены $t \to -t$. Хотя при $\mathcal{K} \gg 1$ движение пробных осцилляторов описывается уравнением диффузии, это еще не означает неинвариантности уравнения относительно замены $t \to -t$. Легко убедиться, проделав весь вывод для $t<0$, что производную по времени в кинетическом уравнении нужно понимать как производную по $|t|$, то есть решение полученного к.ур. при выбранных начальных условиях симметрично относительно начального момента $t=0$. Это означает возрастание энтропии в системе при удалении от $t=0$ как "вперед", так и "назад", что отмечалось уже в работе /I/. Момент $t=0$ оказался выделенным в силу того, что использованное начальное условие при $t=0$ не содержало корреляций между состоянием пробных и состоянием системы внешних осцилляторов. Подчеркнем, что при $\mathcal{K} \gg 1$ вследствие экспоненциального расхождения траекторий развиваются микрокорреляции, в результате чего точная ф.р. становится чрезвычайно сложной. К.ур. описывает изменение точной ф.р. во времени в терминах крупноструктурной ф.р. $f(t)$, являющейся осреднением в момент $t$ точной ф.р. Поэтому к.ур. будет описывать обратную эволюцию системы от $f(t_0)$ в момент $t=t_0$ к $f(0)$ в момент $t=0$ лишь при условии, что при $t=t_0$ взято состояние системы со всеми микрокорреляциями, сложившимися к моменту $t_0$ при прямой эволюции от $t=0$ к $t_0$. Если же в момент $t_0$ (в частности, как это было выше для $t_0=0$) создать систему с крупноструктурной ф.р. $f(t_0)$, но без нужных микрокорреляций, то при $t<t_0$ сохранится, вообще говоря, диффузионное расплывание, а не собирание крупно-структурной ф.р. к её значению в момент $t=0$. Конечно, вопрос о зависимости характера обратной эволюции системы от степени сложности корреляций, задаваемых в момент $t_0$, требует более подробного рассмотрения.

## 6. Линейный случай

Обсудим более подробно особенности квазилинейного случая $\mathcal{K} \ll 1$. Главная особенность, как отмечалось в п.3, состоит в ограничении на время $t$, в течение которого можно пользоваться кинетическим уравнением: $t \ll \mathcal{K}$, или в размерных единицах:



(6.I)

При этом динамический сдвиг частоты и фазы (порядка $\sqrt{\mathcal{K}t^3}$), несущественен, так что частота $\omega$ становится независимым (от действия I) параметром, и осциллятор ведет себя как линейный (К=0). Все результаты для квазилинейного и линейного случая содержатся, в принципе, в уже проведенном рассмотрении. Мы остановимся более подробно на чисто линейном случае. Как видно из (5.I9), при К→0 кинетическое описание возможно лишь для времен $t > \Delta\omega^{-1}$. Поскольку с другой стороны, оно ограничено условием (6.I), то ясно, что кинетическое уравнение применимо лишь в том случае, когда рассматривается ансамбль осцилляторов с достаточно широким разбросом по частотам.

Усредненная ф.р. в момент $t$ выражается аналогично (4.2)

$$\langle f(I,\theta,\omega,t)\rangle = \int dI^0 d\theta^0 f(I^0,\theta^0,\omega,0)\, G(II^0\theta\theta^0,t) \tag{6.2}$$

где функция Грина

$$G(II^0\theta\theta^0,t) = \delta(\theta-\theta^0_0-\omega t)\langle \delta(I-I(t))\rangle \tag{6.3}$$

при $t=0$ равна $\delta(\theta-\theta^0_0)\,\delta(I-I^0)$

Уравнение, которому удовлетворяет функция Грина, может быть получено из (4.7), если устремить $\omega' \to 0$, перейдя предварительно к размерным переменным $I, t$ (см.2.4):

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \omega\frac{\partial G}{\partial \theta} - \mathcal{D}\frac{\partial^2 G}{\partial I^2} = 0 \tag{6.4}$$

где введен размерный коэффициент диффузии

$$\mathcal{D} = 2\pi V^2\, dN/d\omega \tag{6.5}$$

Решение (6.4) есть

$$G = \delta(\theta-\theta_0-\omega t)\frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}}\, e^{-(I-I^0)^2/4\mathcal{D}t} \tag{6.6}$$

Ф.р. (6.2) дает среднее по серии экспериментов описание движения осцилляторов. Если интересоваться её дисперсией, то следует ввести двухчастичную функцию ф.р.

$$\langle f(12,t)\rangle = \langle f(I_1 I_2 \theta_1 \theta_2 \omega_1 \omega_2, t)\rangle \tag{6.7}$$

и рассмотреть её отличие от произведения одночастичных ф.р.(6.2). Для соответствующей функции Грина $G(12,t)$ из (5.8) при $\omega' \to 0$ получим уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} - \mathcal{D}\left(\frac{\partial^2}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial I_2^2}\right)\right] G(1,2,t) = \\ = 2\mathcal{D} \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial^2}{\partial I_1 \partial I_2} G(12,t) \tag{6.8}$$

Его решение есть:

$$G = \frac{\delta(\theta_1 - \overset{\circ}{\theta}_1 - \overset{\circ}{\omega}_1 t)\,\delta(\theta_2 - \overset{\circ}{\theta}_2 - \overset{\circ}{\omega}_2 t)}{4\pi t \sqrt{1 - C^2(t)}\,\mathcal{D}} \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{(I_1 - \overset{\circ}{I}_1)^2 + (I_2 - \overset{\circ}{I}_2)^2 - 2C(t)(I_1 - \overset{\circ}{I}_1)(I_2 - \overset{\circ}{I}_2)}{4\mathcal{D} t (1 - C^2)}\right\} \tag{6.9}$$

где

$$C(t) = t^{-1} \int_0^t dt' \cos[\theta_1 - \theta_2 - (\omega_1 - \omega_2) t']$$

Как видно из (6.9), факторизация двухчастичной функции Грина, обеспечивающая малость дисперсии, может происходить лишь при $|\omega_1 - \omega_2| t \gg 1$, что вместе с (6.I) приводит к требованию

$$|\omega_1 - \omega_2| \gg (dN/d\omega)^{-1}.$$

## 7. Заключение

Обычно вывод кинетического уравнения основан на двух различных по характеру принципах. Первый принцип - отказ от полного описания системы, введение статистического элемента. Этот принцип проявляется во введении ансамбля систем, или плавных начальных условий, рассмотрении лишь укороченных функций распределения, описывающих малые подсистемы, перехода к крупноструктурной ф.р. Второй принцип носит конструктивный характер - ослабление корреляций, приближение хаотических фаз и т.п. Вывод к.ур.проделанный выше, также основан на введении ансамбля. Усреднение по реализациям, использованное нами, есть не что иное, как описание подсистемы (в данном случае, пробного осциллятора) с помощью укороченной ф.р., то есть ф.р., проинтегрированной по переменным всех внешних к подсистеме частиц. Для того, чтобы усреднение было конструктивным элементом, оно должно выполняться явно, по конкретному ансамблю. Существенно, конечно, чтобы распределение в ансамбле не было слишком сингулярным; так, если его ширина по частоте $\Delta\omega_\Sigma$ (в рассматриваемой модели $\Delta\omega_\Sigma \to \infty$ ), то к.ур. применимо начиная с времен $t > (\Delta\omega_\Sigma)^{-1}$ . Ограничение несингулярными начальными распределениями и усреднение по начальным условиям можно рассматривать как способ перехода к крупноструктурной ф.р., обеспечивающий затухание её сингулярной части и исключающий трансформацию плавного начального распределения в сингулярное. При усреднении по реализациям мы ограничились рассмотрением определенного класса вероятных начальных условий, в частности, предполагалось равномерное распределение по фазам. Однако это ограничение не является принципиально необходимым.

Подчеркнем еще раз, что само по себе усреднение по реализациям не приводит к необратимости и кинетике. Мы руководствовались гипотезой Чирикова о стохастическом поведении системы при выполнении критерия $\mathcal{K} \gg 1$ . Эта гипотеза наводит на мысль, что использование в какой-либо форме второго из упомянутых принципов при выводе кинетического уравнения не является необходимым. Стохастичность возникает как следствие перекрывания резонансов, что означает существенность одновременного взаимодействия с большой группой частиц, приводящего к разрушению парных корреляций. Последнее соображение приводит к иерархии сверток различного порядка и построению для физических средних разложений, переходящих при больших $t$ в ряды по обратным степеням статистического параметра $\mathcal{K}$ . В полном согласии с гипотезой Чирикова (но без её использования) было показано, что при $\mathcal{K} \gg 1$ неустойчивость системы по отношению к малым изменениям начальных условий позволяет для ф.р., усредненной по реализациям, получить уравнение диффузии. Тем самым показано, что гипотеза расцепления корреляций оправдана при $\mathcal{K} \gg 1$ .

Наоборот, при $\mathcal{K} \ll 1$ поведение системы остается устойчивым, несмотря на усреднение, поэтому к.ур. в этом случае пригодно лишь для описания ансамбля осцилляторов с различными частотами на временах $t < dN/d\omega$ .

Переход от динамики к кинетике происходит при увеличении параметра К. Можно ожидать, что в рамках принятого рассмотрения для выбранной модели существует порог стохастичности $\mathcal{K}_{cr}$ , за которым имеет место асимптотическое затухание корреляций и диффузионное расплывание начального распределения пробных осцилляторов. Такая ситуация означала бы существования фазового перехода типа устойчивость-диффузия. Для решения этого вопроса нужно было бы провести точное суммирование построенного ряда (при конечных $t$ ), что является трудной задачей.

При $\mathcal{K} \gg 1$ подробно рассмотрены характер расщепления двухчастичных корреляций и поведение гармоник ф.р.

Динамическая корреляция двух частиц имеет место, даже если между ними нет взаимодействия, и затухает со временем лишь степенным образом, независимо от начальных условий. Средняя по фазам ф.р. слабо зависит от конкретной реализации – её дисперсия при достаточно больших временах мала. Фазовые гармоники ф.р. напротив, сильно флуктуируют, и их величина в асимптотике целиком определяется дисперсией, затухающей, как и коррелятор, по степенному закону.

В заключение отметим, что хотя в рассмотренной модели с дальнодействием нельзя непосредственно применять иерархию времен Боголюбова для систем с короткодействием, но и здесь аналогичная иерархия имеет место: время корреляции сигнала $\tau_0 \sim (\Delta\omega_\Sigma)^{-1}$ мало по сравнению с характерным временем фазовых корреляций $\tau_c \sim \mathcal{K}^{-1/3}$

Мы благодарны С.Т.Беляеву, Б.В.Чирикову, А.Н.Скринскому, А.М.Кондратенко, Б.А.Румянцеву, Э.В.Шуряку, В.Г.Зелевинскому, Ф.М.Израйлеву, Н.С.Диканскому за интерес к работе и обсуждения.

## Приложение I

Рассмотрим сигнал, представляющий сумму $N$ гармоник:

$$n(t) = \sum_{\ell=1}^{N} e^{i(\varphi_\ell + \omega_\ell t)} = \sum_{\mu,\nu=0}^{K} m_{\mu\nu} e^{i(\varphi_\mu + \omega_\nu t)} \qquad \text{(П.I.I)}$$

где $m_{\mu\nu}^{(\varphi,\omega)}$ – число частиц в ячейке с номером $(\mu,\nu)$ (число заполнения), так что $\sum m_{\mu\nu} = N$ ; $(K+1)^2$ – число ячеек. Если вероятность одной гармонике (в нашей модели взаимодействия – одной частице, что все равно) иметь значение ( $\varphi_\mu, \omega_\nu$ ) есть $p_{\mu\nu}$ , $\sum p_{\mu\nu} = 1$ , и значения фаз и частот различных гармоник независимы, то вероятность данной реализации (данного



набора $\{m_{\mu\nu}\}$ ) есть $(\mu,\nu \equiv \alpha)$ :

Вычисление средних по реализациям можно проводить с помощью простой формулы

$$W_N^{\{m_\alpha\}} = N! \prod_\alpha (p_\alpha)^{m_\alpha} / m_\alpha ! \qquad \text{(П.I.2)}$$

$$\langle m_{\alpha_1} m_{\alpha_2} \ldots m_{\alpha_n} \rangle = \sum_{\{m_\alpha\}} m_{\alpha_1} \ldots m_{\alpha_n} W_N^{\{m_\alpha\}} = \qquad \text{(П.I.3)}$$

$$= \left(p_{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha_1}}\right) \ldots \left(p_{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha_n}}\right) \left(\sum_{\beta=0}^{K} p_\beta\right)^N$$

Если среди индексов $\{\alpha_i\}$ все различны, то это дает

$$\langle m_{\alpha_1} \ldots m_{\alpha_n} \rangle = p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_n} N!/(N-n)! \qquad \text{(П.I.4)}$$

Если среди индексов $\{\alpha_i\}$ есть одинаковые (это неизбежно, если $n > N$ ), так что все можно сгруппировать в $j$ групп, в каждой из которых $\lambda_1, \ldots, \lambda_j$ одинаковых индексов, то, пренебрегая степенями $p_\alpha^2$ и выше, получим

$$\langle (m_{\alpha_1})^{\lambda_1} \ldots (m_{\alpha_j})^{\lambda_j} \rangle = p_{\alpha_1} \ldots p_{\alpha_j} [N!/(N-j)!] (1 + O(pN))$$

Отброшенные члены $pN \sim N/(K+1) \ll 1$, если числа заполнения малы. Например:

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{\mu\nu=0}^{K} e^{i(\varphi_\mu + \omega_\nu t)} \langle m_{\mu\nu} \rangle = N \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu} e^{i(\varphi_\mu + \omega_\nu t)}$$

Если предположить равномерное распределение по фазам $p_{\mu\nu}^{(\varphi,\omega)} = p_\nu^{(\omega)}/(K+1)$ , то

$$\langle n(t) \rangle = \langle n^*(t) \rangle = 0 \qquad \text{(П.I.5)}$$

При равномерном распределении по фазам (это предполагается всюду в тексте) отличны от нуля только средние от выражений, содержащих одинаковое количество множителей $n(t)$ и $n^*(t)$ . В частности,

$$\langle n(t) n(t') \rangle = 0, \quad \langle n(t) n^*(t') \rangle = N \sum_{\mu=0}^{K} p_\mu^{(\omega)} e^{i\omega_\mu (t-t')}$$

При $K\to\infty$ можно перейти к интегрированию

$$\langle n(t)n^*(t')\rangle = N\int d\omega\, p(\omega)\, e^{i\omega(t-t')} \equiv N p(\tau)$$

Если $p(\omega)$ отлично от нуля в области с шириной $\Delta\omega_\Sigma$, то функция $p(\tau)$ имеет характер узкого пика высоты $\Delta\omega_\Sigma$ с шириной $1/\Delta\omega_\Sigma$,

$$p(\tau) = (\Delta\omega_\Sigma)^{-1}\delta_{\Delta\omega_\Sigma}$$

при $\Delta\omega_\Sigma\to\infty$, $\delta_{\Delta\omega_\Sigma}$ переходит в $\delta$-функцию Дирака. Окончательно, вводя спектральную плотность

$$\mathcal{K}/2\pi \equiv dN/d\omega = N/\Delta\omega_\Sigma$$

можно записать:

$$\langle n(t)n^*(t')\rangle = \mathcal{K}\delta_{\Delta\omega_\Sigma}(t-t') \qquad (\text{П.I.6})$$

Аналогично $\langle n_1 n_2 n_3^* n_4^*\rangle = \langle n_1 n_3^*\rangle\langle n_2 n_4^*\rangle +$

$$+\langle n_1 n_4^*\rangle\langle n_2 n_3^*\rangle + \mathcal{K}\delta_{\Delta\omega_\Sigma}(t_1+t_2-t_3-t_4) \qquad (\text{П.I.7})$$

Введем понятие свертки $2S$-го порядка

$$\langle n_1 n_2 \dots n_S n^*_{S+1}\dots n^*_{2S}\rangle_{2S} = \mathcal{K}\delta_{\Delta\omega_\Sigma}(t_1+t_2+\dots+t_S-t_{S+1}-\dots-t_{2S}) \qquad (\text{П.I.8})$$

Тогда можно утверждать, что среднее $\langle n_1\dots n_S n^*_{S+1}\dots n^*_{2S}\rangle$ выражается как сумма произведений различных сверток, начиная от $S!$ произведений сверток второго порядка.

$$\sum_P \langle n_1 n^*_{S+1}\rangle\langle n_2 n^*_{S+2}\rangle\dots\langle n_S n^*_{2S}\rangle$$

(сумма по перестановкам) и кончая одной сверткой порядка $2S$.

Если вспомнить определение $n(t)$ (П.I.I), то очевидно, свертки максимального порядка получаются, если в средних (П.I.9) отбрасываются все слагаемые, содержащие произведения различных гармоник (т.е. учитывается взаимодействие лишь с одной из внешних частиц), в то время как произведения сверток соответствуют учету одновременного взаимодействия пробной частицы с несколькими внешними осцилляторами, в различных порядках по взаимодействию. Ясно, что среднее от произведения $2S$ сомножителей $n(t)$ не может



быть разбито на произведение сверток только 2-го порядка, если $S$ больше числа осцилляторов $N$.

Всюду в тексте полагается $\Delta\omega_\Sigma\to\infty$, $N\to\infty$, так что $dN/d\omega = N/\Delta\omega_\Sigma = Const.$

## Приложение 2

Докажем формулы (3.5), (3,6). Как видно из проделанного в тексте анализа, при $\mathcal{K}\ll 1$ надо отсуммировать члены, которые получаются, если при усреднении каждой степени $n(t_1)n^*(t_2)$ оставлять свертку максимального порядка, т.е. заменять средние

$$\langle n_1\dots n_S n^*_{S+1}\dots n^*_{2S}\rangle \qquad (\text{П.2.I})$$

на $\mathcal{K}\delta(t_1+\dots-t_{2S})$. Легко видеть, что при таком условии усреднение любого функционала

$$\Phi(n,n^*) = \sum_m \int dt_1\dots dt_{2S}\,\Phi(t_1,\dots t_{2S})\, n_1\dots n_S n^*_{S+1}\dots n^*_{2S} \qquad (\text{П.2.2})$$

дает $\langle\Phi(nn^*)\rangle \to \mathcal{K}\int d\varphi\, d\nu\, \Phi(\nu,\varphi)/(2\pi)^2$

где $\Phi(\nu,\varphi)$ получается из $\Phi(nn^*)$ заменой $n(t)\to e^{i\nu t+i\varphi}$, $n^*\to e^{-i\nu t-i\varphi}$. Применяя (П.2.2) к формуле (3.4) получим формулу (3.5), где

$$x(\nu,\varphi,t) = \int_0^t dt' \cos(\nu t'+\varphi+\psi(\nu,\varphi,t')) \qquad (\text{П.2.3})$$

а $\psi(\nu,\varphi,t)$ получается с помощью той же замены из (3.2)

$$\psi(\nu,\varphi,t) = \int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 \left[e^{i[\nu t_2-\varphi \quad -\psi(\nu,\varphi,t_2)]} + к.с.\right]$$

что совпадает с (3.6).

Аналогично могут быть учтены члены, пропорциональные $\mathcal{K}^2$. Рассмотрим, для простоты, степенной функционал с симметричным по всем аргументам ядром (знак комплексного сопряжения опускаем)

$$\Phi_m(n) = \int \Phi_m(t_1,\dots t_m)\, n(t_1)\dots n(t_m)\, dt_1\dots dt_m$$

Усредним $\Phi_m(n)$, учитывая члены, пропорциональные $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^2$, которые возникают от полной свертки и от разбиения среднего на произведение двух произвольных сверток,

$$\langle \Phi_m(n)\rangle^{(2)} = \int dt_1 \ldots dt_m\, \Phi_m(t_1 \ldots t_m)\langle n_1 \ldots n_m\rangle_m +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} C_m^k \int dt_1 \ldots dt_m\, \Phi_m(t_1 \ldots t_m)\langle n_1 \ldots n_k\rangle_k \langle n_{k+1} \ldots n_m\rangle_{m-k}$$

Заменим $n \to n e^{i\alpha}$; $n^* \to n^* e^{-i\alpha}$ и введем усреднение по $\alpha$ в каждом из средних, что оставит в них только степени $nn^*$, после чего можно заменить эти средние по (П.2.I). В результате получим с точностью до $O(\mathcal{K}^3)$:

$$\langle \Phi_m(n)\rangle^{(2)} = \mathcal{K}\int d\nu\, d\alpha\, \Phi_m(\nu)/(2\pi)^2 +$$
$$+ \frac{\mathcal{K}^2}{2}\int \frac{d\nu\, d\alpha}{(2\pi)^2}\int \frac{d\mu\, d\beta}{(2\pi)^2}\left\{\Phi_m(\nu+\mu) - \Phi_m(\nu) - \Phi_m(\mu)\right\} \qquad (\text{П.2.5})$$

где $\Phi_m(\nu)$ получается из $\Phi_m(n)$ заменой $n(t) \to e^{i\nu t + i\alpha}$; а $\Phi_m(\nu+\mu)$ заменой $n(t) \to e^{i(\nu t+\alpha)} + e^{i(\mu t+\beta)}$

Здесь использована формула для функционала от $n(t)$ и $n'(t)$

$$\Phi_m(n+n') = \int dt_1 \ldots dt_m\, \Phi_m(t_1 \ldots t_m)(n_1+n_1') \ldots (n_m+n_m') =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \int dt_1 \ldots dt_m\, \Phi_m(t_1 \ldots t_m)\, n_1 \ldots n_k\, n_{k+1}' \ldots n_m'$$

Фактически, предположение о симметрии ядра функционала излишне, так что (П.2.5) имеет место для произвольного функционала от $n, n^*$. Для $\langle x^2(t)\rangle$ формула (П.2.5) позволяет отсуммировать члены ряда, пропорциональные $\mathcal{K}^2$ :

$$\langle x^2(t)\rangle^{(2)} = 2\mathcal{K}^2\int \frac{d\alpha\, d\beta}{(2\pi)^2}\int d\nu\, d\mu \left\{x^2(\nu,\mu,t) - x^2(\nu,t) - x^2(\mu,t)\right\} \qquad (\text{П.2.6})$$

где $x^2(\nu,t)$, $x^2(\mu,t)$ определены как в (3.5), (3.6), а

$$x(\nu,\mu,t) = \int_0^t dt' \left[\cos(\nu t' - \alpha + \psi(\nu,\mu,t)) + \cos(\mu t' - \beta + \psi(\nu,\mu,t))\right] \qquad (\text{П.2.7})$$

и $\psi$ удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\psi} = \alpha\left[\cos(\nu t - \alpha + \psi) + \cos(\mu t - \beta + \psi)\right];\ \psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0 \qquad (\text{П.2.8})$$

Аналогично могут быть отсуммированы члены при любой степени $\mathcal{K}$.



## Приложение 3

Найдем поправку к (3.I2), отсуммировав члены, стоящие во второй строке таблицы I. Они получаются выделением из среднего одной свертки 4-го порядка, а оставшиеся множители разбиваются на произведение сверток 2-го порядка. Рассмотрим один из членов в $\langle x^2(t)\rangle$ (3.4), который вообще не давал вклада, когда учитывались лишь свертки 2-го порядка:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle n_1 n_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\rangle = 2\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle n_1 n_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (\text{П.3.I})$$

так что можно считать $t_1 \geq t_2$

Выделим в (П.3.I) члены, содержащие одну свертку 4-го порядка. Это можно сделать с помощью легко доказываемой формулы:

$$\langle n_1 n_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\rangle_{4\cdot 2} = \frac{1}{2\mathcal{K}^2}\int dt_3\, dt_4 \langle n_1 n_2 n_3^* n_4^*\rangle_4 \langle n_3 n_4 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\rangle_2 + \qquad (\text{П.3.2})$$
$$+ \frac{1}{2\mathcal{K}^3}\int dt_3\, dt_4\, dt_5 \langle n_1 n_3 n_4^* n_5^*\rangle_4 \langle n_3^* n_4 n_5 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}\rangle_2$$

Индекс 2 означает, что средние нужно разбивать только на свертки второго порядка. Здесь учтено, что $n_1$ обязано оставаться в свертке 4-го порядка, иначе возникнет свертка вида (3.II). Во втором сомножителе второго члена (П.3.2), не нужно учитывать свертку $\langle n_3^* n_{4,5}\rangle$, т.к. она уже учтена в первом члене (П.3.2). Найдем среднее (здесь $m(t) = n(t)e^{-i(\theta_0+\omega_0 t)}$, свертки для $m(t)$ совпадают со свертками для $n(t)$)

$$\langle m_3 m_4 e^{-i(\psi_1+\psi_2)}\rangle_2 \equiv \langle e^{-i(\psi_1-\psi_3+\psi_2-\psi_4)} m_3 e^{-i\psi_3} m_4 e^{-i\psi_4}\rangle \qquad (\text{П.3.2})$$

Разложим $\exp[i(\psi_3-\psi_1+\psi_4-\psi_2)]$ в ряд по

$$\psi_3 - \psi_1 + \psi_4 - \psi_2 = \left(\int_1^3 + \int_2^4\right) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \left[m(\tau_2)e^{-i\psi(\tau_2)} + \text{к.с.}\right]$$

Рассмотрим один из членов ряда. Он выражается через средние вида

$$\langle m(t_1')e^{-i\psi(t_1')} \ldots m^*(t_k')e^{i\psi(t_k')} m_3 e^{-i\psi_3} m_4 e^{-i\psi_4}\rangle_2 \qquad (\text{П.3.4})$$

Легко видеть, что в таком среднем все экспоненты можно заменить на единицы. Действительно, пусть $t_1' > t_2' > \ldots > t_3 > t_4$. Поскольку в приближении сверток 2-го порядка свертка $m(t_1')$ с любой из экспонент дает согласно (3.II) нуль, то свертку с $m(t_1')$ можно образовать, только свернув $m(t_1')$ с одним из множителей $m^*(t'')$, стоящих в предэкспоненте. Так как при этом возникает $\delta(t_1' - t'')$, то соответствующие $e^{i\psi_1' - i\psi''}$ можно заменить на единицу, после чего снова возникает выражение вида (П.3.4). Этот процесс можно продолжить, пока все предэкспоненты не свернутся друг с другом, а экспоненты заменятся на единицу, что и доказывает утверждение. В оставшемся выражении пусть будет $(\ell+2)$ множители типа $m(t)$ и $(\kappa-\ell)$ типа $m^*(t)$. Тогда необходимо, чтобы $\kappa - \ell = \ell + 2$, иначе получится нуль. Если же $\kappa = 2(\ell+1)$, то

$$\langle m(t_1')\ldots m(t_\ell') m^*(t_{\ell+1}')\ldots m^*(t_\kappa') m_3 m_4 \rangle_{2} =$$

$$= \mathcal{K}^{\ell+2} (\ell+2)!\, \delta(t_3 - t_{\ell+1}')\, \delta(t_4 - t_{\ell+2}') \prod_{j=1}^{\ell} \delta(t_j' - t_{\ell+2+j}')$$

Итого

$$\langle m_3 m_4 e^{-i(\psi_1+\psi_2)} \rangle_{2} = -\mathcal{K}^2 e^{-\mathcal{I}(34/12)} \Big(\int_1^3 + \int_2^4\Big) d\tau_1 d\tau_2\, \theta(\tau_1 - t_3)\, \theta(\tau_2 - t_4)$$

где

$$\mathcal{I}(34/12) = \Big(\int_1^3 + \int_2^4\Big) d\tau_1 d\tau_2 \int_0^{\tau_1} dt_1' \int_0^{\tau_2} dt_2' \langle n(t_1') n^*(t_2') \rangle$$

Простые вычисления теперь показывают, что вклад первого члена в (П.3.2) равен

$$-\mathcal{K} \int_0^{\tilde{\tau}} dt \cdot t^2 e^{-\mathcal{K} t^2 (2\tilde{\tau} - 4t/3)} \quad , \quad \tilde{\tau} \equiv (t_1 - t_2)/2 > 0 \qquad (П.3.5)$$

Вклад второго члена в (П.3.2) оказывается равным нулю. Действительно:

$$\langle m_3^* m_4 m_5 m_2 e^{-i(\psi_1+\psi_2)} \rangle_{2} = \mathcal{K}^4 e^{-\mathcal{I}(45/31)} \Big(\int_1^4 + \int_3^5\Big) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \cdot$$

$$\cdot\, \theta(\tau_1 - t_4)\, \theta(\tau_2 - t_5)\, \theta(\tau_3 - t_2)\, \theta(\tau_4 - t_3)$$

Стоящий здесь интеграл пропорционален $(t_4 + t_5 - t_1 - t_3)$, что и приводит с учетом свертки $\langle m_1 m_3 m_4^* m_5^* \rangle_4 = \mathcal{K}\delta(t_1 + t_3 - t_4 - t_5)$ к занулению второго члена в (П.3.2).



Аналогично, учет одной свертки четвертого порядка не дает поправки к сверткам 2-го порядка от члена $m_1 m_2^* e^{-i(\psi_1+\psi_2)}$ в (3.4). Таким образом, в этом приближении поправка в $\langle x^2 \rangle$ определяется (П.3.5):

$$\langle x^2 \rangle = 2\mathcal{K}t - 4\mathcal{K} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^z y^2 dy\, e^{-\mathcal{K} y^2 (2z - 4y/3)}$$
$$z = (t_1 - t_2)/2 \qquad (П.3.6)$$

При $\mathcal{K}t^3 \ll 1$ $\qquad \langle x^2 \rangle = 2\mathcal{K}t - \mathcal{K}t^5/120$

в соответствии с таблицей (первый член второй строки).

При $\mathcal{K}t^3 \gg 1$

$$\langle x^2(t) \rangle \simeq 2\mathcal{K}t \Big(1 - \mathcal{K}^{-4/3} \int_0^\infty e^{-z^3/12} dz\Big) \qquad (П.3.7)$$

Использование приема, изложенного в (П.3.2), (П.3.4) позволяет отсуммировать точно также любую строку таблицы.

В том же приближении для Фурье-гармоники одночастичной функции Грина $G_0(\eta, t)$ можно получить следующее выражение:

$$G_0(\eta, t) = e^{-\mathcal{K}\eta^2 t} \Big[1 + 2\mathcal{K}\eta^2 \cdot$$
$$\cdot \int_0^t d\tau \int_0^{\tau/2} dy \int_y^{\tau - y} dz\, (y - \eta)^2 e^{\mathcal{K} z y (2\eta - y) + \mathcal{K} y^3/3} \Big] \qquad (П.3.8)$$

Моменты $\langle x^2(t) \rangle$, $\langle x^4(t) \rangle$ просто выражаются через $G_0(\eta, t)$:

$$\langle x^2 \rangle = -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} G_0(\eta, t)\Big|_{\eta=0} \quad ; \quad \langle x^4 \rangle = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} G_0(\eta, t)\Big|_{\eta=0}$$

Выражение $\langle x^2(t) \rangle$ преобразованием переменных приводится к (П.3.6), а для $\langle x^4(t) \rangle$ получаем

$$\langle x^4(t) \rangle = 12\mathcal{K}^2 t^2 +$$
$$+ 48\mathcal{K} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau/2} dy \int_y^{\tau - y} dz\, (1 - 4\mathcal{K} z y^2 + 2\mathcal{K}^2 z^2 y^4 - \mathcal{K} y^2 t)\, e^{-\mathcal{K} z y^2 + \mathcal{K} y^3/3}$$

Отсюда

$$\langle x^4(t) \rangle = \begin{cases} 12\mathcal{K}^2 t^2 + 4\mathcal{K}t^3 & \mathcal{K}t^3 \ll 1 \\ 12\mathcal{K}^2 t^2 - 24\mathcal{K}^{2/3} t^2 \int_0^\infty e^{-z^3/12} dz + O(\mathcal{K}t^3) & \mathcal{K}t^3 \gg 1 \end{cases} \qquad (П.3.9)$$

Таким образом, для всех времен $\langle x^4(t) \rangle \simeq 3\langle x^2(t) \rangle^2$, что характерно для диффузии.

## Литература


1. Н.Н.Боголюбов. Избранные труды т.II, стр.3 "Наукова думка", Киев, 1970.
2. Б.В.Чириков. Докторская диссертация. Новосибирск, 1969. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105, 1971, (3).
3. Г.М.Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, "Наука", Москва, 1970.
4. Б.В.Чириков (в печати). Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Ges.- Sprachw. R. XXIV (1975), 2.



Работа поступила - 25 мая 1976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 22.VI-1976г. МН 02840
Усл. 2,2 печ.л., тираж 180 экз. Бесплатно
Заказ № 57.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР