

45
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 76-76

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин, **О.П.Соболев**

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ, ПОМЕЩЕННОЙ
В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Новосибирск

1976

СТАЦИОНАРНЫЕ СПЕКТРЫ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПЛАЗМЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин, О.П.Соболев

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассматривается слабая турбулентность ленгмюровских и электромагнитных волн, источником которых служит пучок релятивистских электронов. Учтены процессы индуцированного рассеяния волн на ионах плазмы и затухание волн за счет кулоновских столкновений. Показано, что включение даже относительно слабого магнитного поля ($\omega_{ce} \ll \omega_{pe}$) позволяет существенно увеличить мощность, передаваемую пучком плазме. Наиболее отчетливо это проявляется при выполнении неравенства $\omega_{ce} \gg \omega_{pe} \frac{T}{mc^2}$. Обнаружено также, что магнитное поле препятствует конденсации энергии в длинноволновой части спектра: с увеличением поля линейно растет пороговая мощность нагрева, при которой начинается сток энергии в конденсат. Соответственно расширяется диапазон условий, в которых для описания пучкового нагрева плазмы применима теория слабой турбулентности.

STATIONARY SPECTRA OF HIGH FREQUENCY
PLASMA WAVES IN A MAGNETIC FIELD

B.N.Breizman, V.M.Malkin, O.P.Sobolev

A B S T R A C T

The weak turbulence of Langmuir and electromagnetic waves excited by relativistic electron beam is investigated. The induced scattering of the waves by plasma ions and their collisional damping are taken into account. It is found that even a weak external magnetic field ($\omega_{He} \ll \omega_{pe}$) may substantially increase the efficiency of beam energy transfer to the plasma. This effect is most significant under the condition $\omega_{He} \gg \omega_{pe} \frac{T}{mc^2}$. An external magnetic field can also eliminate the energy condensation in a long-wave part of spectrum: the threshold power of energy input at which condensation occurs increases linearly with the field. Consequently, the region of applicability of weak turbulence theory to the problem of plasma heating by the beam is considerably extended.

I. Введение

В настоящей работе в рамках теории слабой турбулентности [1-3] рассмотрена нелинейная стадия неустойчивости пучка релятивистских электронов в плазме со слабым магнитным полем ($\omega_{ne} \ll \omega_{pe}$). Речь пойдет о возбуждении пучком ленгмюровских (e) колебаний и об ограничении их уровня за счет индуцированного рассеяния на ионах. Роль рассеяния состоит в том, что оно выводит колебания из резонанса с электронами пучка. Это происходит, во-первых, за счет увеличения фазовой скорости ленгмюровских волн при их рассеянии друг в друга (ee - процесс) и, во-вторых, за счет трансформации ленгмюровских волн в электромагнитные (et - процесс). Вторичные волны, возникающие при рассеянии, могут затухать, отдавая свою энергию частицам плазмы. Мы будем считать, что их затухание обусловлено кулоновскими столкновениями.

В результате перечисленных здесь процессов в системе плазма-пучок может поддерживаться стационарная турбулентность. Наша цель - отыскание спектра турбулентности и вычисление мощности нагрева плазмы. Соответствующая задача для плазмы без магнитного поля была решена в работах [4,5]. Напомним вкратце результаты этих работ и поясним, почему представляет интерес учет магнитного поля.

Если et - рассеяние подавлено (например, из-за малой оптической толщины плазмы), то столкновения способны обеспечить диссипацию всей выделенной пучком энергии только при не слишком больших превышениях инкремента неустойчивости δ над частотой столкновений ν ($\delta - \nu \lesssim \nu$). В случае $\delta \gg \nu$ в длинноволновой части спектра происходит конденсация ленгмюровских колебаний, которая ведет к нарушению условий применимости приближения слабой турбулентности и возникновению модуляционной неустойчивости [6]. Развитие модуляционной неустойчивости может сопровождаться интенсивным нагревом малой группы быстрых электронов ("отрастание хвостов") и увеличением потерь энергии из плазмы [7,8]. Пороговое значение мощности нагрева P , при котором возникает такая опасность, довольно мало:

$$P_0 \sim \frac{\nu^2}{\omega_{pe}} n T \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \quad (I)$$

Поэтому весьма желательно найти условия, в которых $P \gg P_0$, а модуляционная неустойчивость тем не менее отсутствует.

Одна из возможностей состоит в том, чтобы запретить электромагнитные волны и работать в режиме, когда разрешены оба типа рассеяния (ee и et)^{*}. Как показано в работе [5], в этом случае конденсация энергии в длинноволновой части спектра начинается не при $P = P_0$, а при $P \sim P_0 \frac{mc^2}{T}$. Соответственно смягчаются и условия применимости приближения слабой турбулентности. Другая возможность - это введение магнитного поля. Поле меняет закон дисперсии волн, что, как мы увидим, существенно сказывается на условиях возникновения конденсата.

Для того, чтобы волна, возбужденная пучком, попала в конденсат, её частота должна за счет рассеяния уменьшиться на определенную величину $\delta\omega$ раньше, чем волна затухнет из-за столкновений. В случае плазмы без магнитного поля для $\delta\omega$ справедлива следующая оценка: $\delta\omega \sim \omega_{pe} \frac{T}{mc^2}$ (см. [4,5]). С увеличением поля $\delta\omega$ растет: $\delta\omega \sim \omega_{pe} \frac{T}{mc^2} + \frac{\omega_{ne}}{2}$. Вместе с $\delta\omega$ растет и характерное время перекачки волн из области возбуждения в конденсат. В результате облегчается диссипация энергии за счет столкновений и формирование конденсата начинается при большей мощности нагрева, чем в плазме без магнитного поля. Естественно, что выигрыш наиболее значителен в том случае, когда "магнитный" вклад в $\delta\omega$ велик по сравнению с "тепловым", т.е. при

$$\omega_{ne} \gg \omega_{pe} \frac{T}{mc^2} \quad (2)$$

Именно такую ситуацию мы и рассмотрим.

Настоящая работа, по существу, является продолжением работы [9], в которой даны оценки роли магнитного поля в отсутствие et - рассеяния. Отличие будет состоять в том, что мы, во-первых, учтем все каналы рассеяния, а во-вторых, помимо оценок получим точное решение задачи. Оценкам посвящен третий раздел работы; точному решению - разделы 4 и 5.

^{*} Для запираания электромагнитных волн достаточно, чтобы плотность плазмы, по которой идет пучок, была несколько ниже, чем плотность окружающей плазмы. Требуемый перепад плотности $\delta n/n$ по порядку величины равен T/mc^2 .

2. Основные уравнения

Типичные дисперсионные кривые для интересующих нас волн изображены на рис. 1. При выключении магнитного поля медленная необыкновенная волна (1) переходит в ленгмюровскую, а обыкновенная (2) и быстрая необыкновенная (3) — в электромагнитные волны, различающиеся только поляризацией (см., например, /10/).

В предположении о случайности фаз индуцированное рассеяние рассматриваемых волн на ионах плазмы описывается следующей системой уравнений для чисел заполнения $N_\lambda(\vec{k})$:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_\lambda(\vec{k}) = N_\lambda(\vec{k}) \sum_{\lambda'=1}^3 \int d\vec{k}' A_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}') N_{\lambda'}(\vec{k}') \quad (3)$$

Здесь индекс λ нумерует ветви колебаний. Величина $N_\lambda(\vec{k})$ определена так, что полная энергия волн сорта λ в единице объема равна $\int \omega_\lambda(\vec{k}) N_\lambda(\vec{k}) d\vec{k}$, где $\omega_\lambda(\vec{k})$ — частота волны. Ядро $A_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}')$, характеризующее вероятность рассеяния, вычисляется по стандартной схеме теории слабой турбулентности (см. например, /3/). Если изменение частоты волны в каждом элементарном акте рассеяния мало по сравнению с шириной спектра (а далее подразумевается, что дело обстоит именно так), то для ядра применимо так называемое дифференциальное приближение. Тогда

$$A_{\lambda\lambda'}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{2\pi^2 e^2}{mM} |\vec{S}(\vec{k}, \lambda) \vec{S}^*(\vec{k}', \lambda')|^2 \delta' \left(\frac{\omega_\lambda(\vec{k}) - \omega_{\lambda'}(\vec{k}')}{|\vec{k} - \vec{k}'|} \right) \quad (4)$$

где $\vec{S}(\vec{k}, \lambda)$ — вектор поляризации волны, а штрих у δ' — функции означает дифференцирование по аргументу. Отметим, что при выводе этой формулы ионы, участвующие в рассеянии, считаются немагнитными.

Учитывая вид ядра, удобно вместо компонент волнового вектора выбрать в качестве независимых переменных частоту волны и величины $\chi = \cos \theta$ и φ (θ — угол между волновым вектором и направлением магнитного поля, φ — азимутальный угол). Кроме того, целесообразно привести уравнения к безразмерному виду, сделав для этого следующие замены:

$$t \rightarrow \frac{2}{3} \frac{mc^2}{T} \frac{1}{\omega_p} \tau; \quad \vec{k} \rightarrow \frac{\omega_{pe}}{c} \vec{k}; \quad \omega - \omega_{pe} \rightarrow \frac{3}{2} \omega_{pe} \frac{T}{mc^2} f; \\ N_\lambda(\vec{k}) k^2 dk d\chi \rightarrow \frac{27}{8\pi^2} \frac{M}{m} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^2 \frac{nT}{\omega_{pe}} n_\lambda(f, \chi, \varphi) df d\chi$$

В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением только аксиально-симметричных спектров, предполагая к тому же, что спектральные функции $n_\lambda(f, \chi)$ не зависят от знака χ . Разумеется, такой же симметрией должен обладать и инкремент неустойчивости. Переходя в уравнениях (3) к безразмерным переменным и используя симметрию задачи, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} n_\lambda(f, \chi) = \Gamma_\lambda(f, \chi) n_\lambda(f, \chi) \quad (5)$$

$$\Gamma_\lambda(f, \chi) = \gamma_\lambda(f, \chi) + \frac{\partial}{\partial f'} \Gamma_\lambda(f, \chi, f') \Big|_{f'=f} \quad (6)$$

$$\Gamma_\lambda(f, \chi, f') = \sum_{\lambda'=1}^3 \int_{-1}^1 \Phi_{\lambda\lambda'}(f, \chi, f', \chi') n_{\lambda'}(f', \chi') d\chi' \quad (7)$$

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(f, \chi, f', \chi') = \langle |\vec{k} - \vec{k}'|^2 |\vec{S} \vec{S}'^*|^2 \rangle \quad (8)$$

Угловые скобки в выражении (8) означают усреднение по азимутальному углу φ и симметризацию по χ . Результат усреднения удобно выразить через проекции вектора поляризации волны $\vec{S}(\vec{k}, \lambda)$ на направления

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{k} - \vec{h}(\vec{h}\vec{k})}{|\vec{k} - \vec{h}(\vec{h}\vec{k})|}; \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{h} \times \vec{k}}{|\vec{h} \times \vec{k}|}; \quad \vec{e}_3 = \vec{h}$$

где \vec{h} — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля. Обозначая проекции через S_1, S_2 и S_h , имеем:

$$\Phi_{\lambda\lambda'}(f, \chi, f', \chi') = \frac{1}{2} (k^2 + k'^2) [1 - |S_h|^2 - |S'_h|^2 + 3|S_h|^2 |S'_h|^2 + 4\gamma_m S_1 S'_2 \gamma_m S'_1 S_2] \quad (9)$$

Здесь величины со штрихом являются функциями от λ', f', χ' , а величины без штриха — функциями от λ, f и χ .

Помимо процессов рассеяния в уравнениях (5) учтено также возбуждение волн и их затухание (функция $\Gamma_\lambda(f, \chi)$ содержит слагаемое $\gamma_\lambda(f, \chi)$). Если магнитное поле не слишком велико, то инкременты пучковой неустойчивости для ветвей "2" и "3" пренебрежимо малы. Тогда можно положить $\gamma_1(f, \chi) = 2\gamma(f, \chi) - \nu$; $\gamma_2(f, \chi) = \gamma_3(f, \chi) = -\nu$, где $\gamma(f, \chi)$ — безразмерный инкремент неустойчивости для колебаний ветви 1, а ν — частота столкновений. За единицу измере-

ния γ и ν выбрана величина $\frac{3}{2} \omega_{pe} \frac{T}{mc^2}$.

Из уравнений (5) видно, что в стационарном состоянии

$$\Gamma_\lambda(f, x) = 0, \text{ если } n_\lambda(f, x) > 0 \quad (I0)$$

$$\Gamma_\lambda(f, x) \leq 0, \text{ если } n_\lambda(f, x) = 0 \quad (II)$$

Второе из этих условий обеспечивает устойчивость спектра. Оно показывает, что все нули функции $\Gamma_\lambda(f, x)$ являются одновременно её максимумами. Поэтому, если $n_\lambda(f, x) > 0$ и $x \neq \pm 1$, то

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_\lambda(f, x) = 0 \quad (I2)$$

Если угловые зависимости функций $\gamma_\lambda(f, x)$ и $\frac{\partial}{\partial f} \Gamma_\lambda(f, x, f')|_{f=f}$ не совпадают, то уравнение $\Gamma_\lambda(f, x) = 0$ при заданном значении f может иметь лишь дискретный набор корней $x = x_\lambda^{(p)}(f)$, где $p = 1, 2, \dots$

В этом случае

$$n_\lambda(f, x) = \sum_p n_\lambda^{(p)}(f) \delta(x - x_\lambda^{(p)}(f))$$

Следуя работе /4/, мы будем называть такой спектр струйным, а величины $n_\lambda^{(p)}(f)$ и $x_\lambda^{(p)}(f)$ — интенсивностью и положением струи. Соотношения (I0) — (I2) дают для функций $n_\lambda^{(p)}(f)$ и $x_\lambda^{(p)}(f)$ замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см./4/), а также условия сшивки решений этой системы друг с другом и с вырожденным спектром:*)

$$\Gamma_\lambda(f, x, f+0) - \Gamma_\lambda(f, x, f-0) = 0, \text{ если } n_\lambda(f+0, x) + n_\lambda(f-0, x) > 0 \quad (I3)$$

$$\Gamma_\lambda(f, x, f+0) - \Gamma_\lambda(f, x, f-0) \leq 0, \text{ если } n_\lambda(f \pm 0, x) = 0$$

Прежде чем перейти к отысканию решений, мы приведем еще уравнение баланса для полного числа волн с частотой f . Оно непосредственно следует из (5):

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\lambda} \int_{-1}^1 dx n_\lambda(f, x) = \frac{\partial \Pi(f)}{\partial f} + \sum_{\lambda} \int_{-1}^1 dx \gamma_\lambda(f, x) n_\lambda(f, x) \quad (I4)$$

$$\Pi(f) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \lambda'} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dx' \phi_{\lambda \lambda'}(f, x, f, x') n_\lambda(f, x) n_{\lambda'}(f, x')$$

*) Вырожденным мы называем такой спектр, для которого $\Gamma_\lambda(f, x) \equiv 0$

Здесь величина $\Pi(f)$ представляет собой поток числа волн по спектру, направленный в сторону низких частот. Второе слагаемое в правой части (I4) описывает изменение числа волн за счет накачки и затухания. Его удобно представить в виде произведения формально введенного эффективного инкремента γ_{eff} на полное число волн с заданной частотой.

$$\sum_{\lambda} \int_{-1}^1 dx \gamma_\lambda(f, x) n_\lambda(f, x) = 2 \gamma_{eff}(f) \sum_{\lambda} \int_{-1}^1 dx n_\lambda(f, x)$$

Функция $\gamma_{eff}(f)$ схематически показана на рис.2а. В резонансной области, где накачка преобладает над затуханием, эта функция положительна; в остальном интервале частот $\gamma_{eff} \approx -\frac{\nu}{2}$. Нижняя граница и характерная ширина резонансной области обозначены на рис.2 величинами f_+ и Δf_+ . При возбуждении волн релятивистским электронным пучком

$$f_+ \approx 1; \Delta f_+ \sim 1 + \beta^{-1} \quad \left(\beta = \frac{12\pi n T}{H^2} \right) \quad (I5)$$

Очевидно, что в стационарном состоянии поток $\Pi(f)$ в резонансной области растет с уменьшением частоты, а в нерезонансной — убывает (см.рис.2б). Если в спектре отсутствует конденсат, то при некотором значении частоты ($f = f_0$) поток обращается в ноль. Вместе с ним обращаются в ноль и все функции $n_\lambda(f, x)$. Мы будем считать в дальнейшем, что точка f_0 лежит достаточно глубоко в области $f < 0$, но все же не слишком близко к минимально возможной частоте волн, допускаемой законом дисперсии, т.е.

$$1 + \beta^{-1} \ll -f_0 \ll \alpha \quad \left(\alpha = \frac{mc^2 \omega_{ne}}{3T \omega_{pe}} \right) \quad (I6)$$

Этот случай особенно интересен потому, что, с одной стороны, в нем очень отчетливо проявляется роль магнитного поля, а с другой стороны, решение задачи оказывается относительно простым. Последнее связано с тем, что при $-f_0 \ll \alpha$ спектр состоит из колебаний с различными по порядку величины волновыми векторами. Наибольшими значениями $k(f, x) \gg (\omega_{ne}/\omega_{pe})^{1/2}$ обладают ленгмюровские (e) колебания. Они почти потенциальны и описываются следующим дисперсионным уравнением:

$$f = k^2 + \beta^{-1} (1-x^2)(1-k^{-2}) \quad (I7)$$

Эти волны принадлежат к ветви I (см. рис. I). Всем остальным волнам (независимо от того, к какой ветви они относятся) соответствуют гораздо меньшие значения $\kappa(f, x)$. Мы условимся называть такие волны электромагнитными и будем обозначать их символом "e". Учитывая малость волновых векторов t-волн и непотенциальных поправок к векторам поляризации e-волн, можно опустить в формулах (6), (7), (9) соответствующие малые добавки и, в частности, полностью пренебречь взаимодействием t-волн друг с другом (см. для сравнения /5/). Окончательно вместо (6) получим:

$$\Gamma_e(f, x) = F_1'(f) + x^2 F_2'(f) + K^2(f, x) [F_3'(f) + x^2 F_4'(f)] + 2\gamma(f, x) - \nu \quad (18)$$

$$\Gamma_t(f, S) = F_1'(f) + S^2 F_2'(f) - \nu$$

Здесь*)

$$\left. \begin{aligned} F_1(f) &= \int_0^1 \kappa^2(f, x) (1-x^2) n^e(f, x) dx \\ F_2(f) &= \int_0^1 \kappa^2(f, x) (3x^2-1) n^e(f, x) dx \\ F_3(f) &= \int_0^1 (1-x^2) n^e(f, x) dx + \omega_0^t(f) \\ F_4(f) &= \int_0^1 (3x^2-1) n^e(f, x) dx + 2\omega_1^t(f) - \omega_0^t(f) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^t(f) &= \sum_{\lambda} \int_0^1 (1-S^2) n_{\lambda}^t(f, x) dx \\ \omega_1^t(f) &= \sum_{\lambda} \int_0^1 S^2 n_{\lambda}^t(f, x) dx \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Функции с индексами "e" и "t" относятся к e и t волнам, соответственно; $\kappa(f, x)$ - волновой вектор e-волны, определяемый из уравнения (17); $S = |S_{\lambda}^{\lambda}(f, x)|$ - абсолютная величина продольной компоненты вектора поляризации t-волны.

*) Пользуясь четностью спектральных функций, мы здесь и далее считаем областью изменения переменной x отрезок /0, 1/.

Заметим, что вклад t-волн в функции Γ_e и Γ_t характеризуется всего двумя величинами: ω_0^t и ω_1^t . Эти величины одновременно отличны от нуля только в том случае, когда спектр t-волн вырожден ($\Gamma_t(f, S) \equiv 0$). В струйном же спектре t-волн могут присутствовать либо те из них, у которых $S=0$, либо те, у которых $S=1$.

Система уравнений, которая получается при подстановке функций Γ_e и Γ_t в соотношения (10), (12) будет решена в разделах 4 и 5.

3. Оценки параметров стационарного спектра

Проводя оценки, мы будем считать выполненными неравенства (16). При этом полная ширина спектра велика по сравнению с шириной резонансной области и примерно равна $|f_0|$ (см. рис. 2). Характерное значение $|f|$ в спектре также порядка $|f_0|$.

Обозначим число e-волн в единице объема плазмы через N^e , а число t-волн через N^t :

$$N^e = \int df \int_{-1}^1 dx n^e(f, x); \quad N^t = 2 \int df [\omega_0^t(f) + \omega_1^t(f)]$$

Через эти величины нетрудно выразить характерные времена ℓe , ℓt и $t e$ - процессов в нерезонансной области:

$$\tau^{ee} \sim \tau^{te} \sim \frac{f_0^2}{K^2 N^e}; \quad \tau^{et} \sim \frac{f_0^2}{K^2 N^t}$$

Здесь K - характерное значение волнового вектора нерезонансных e-волн, равное $|\beta f_0|^{-1/2}$ (см. (17)). В стационарном состоянии каждая из величин τ^{ee} , τ^{te} и τ^{et} должна быть равна времени затухания волн ν^{-1} . Отсюда получается следующее соотношение:

$$N^e \sim N^t \sim \nu \beta |f_0|^3 \quad (21)$$

С другой стороны, в стационарном случае возбуждение e-волн должно компенсироваться их откачкой из резонансной области за счет рассеяния. В дальнейшем предполагается, что откачка обусловлена в основном $e t$ - рассеянием. Для оценки времени взаимодействия e-волны с пучком τ_R необходимо знать число t-волн в резонансном диапазоне частот. Мы примем, что на единичный интервал частоты здесь приходится примерно столько же t-волн,

сколько и в остальной части спектра, а именно $N^e/|f_0|$. Это будет подтверждено затем точным решением задачи. Учитывая, что резонансная область имеет ширину $1+\beta^{-1}$ (см. (15)), а волновой вектор в ней по порядку величины равен единице, имеем:

$$\tau_R \sim \frac{|f_0|}{N^e} \frac{1+\beta}{\beta}$$

Обратное время взаимодействия волны с пучком τ_R^{-1} , очевидно, совпадает с инкрементом пучковой неустойчивости γ , т.е.

$$N^e \sim \gamma |f_0| \frac{1+\beta}{\beta} \quad (22)$$

Объединяя соотношения (21) и (22), находим:

$$N^e \sim N^e \sim \frac{[\gamma(1+\beta)]^{3/2}}{\nu^{1/2} \beta^2} \quad (23)$$

$$|f_0| \sim \frac{1}{\beta} \left[\frac{\gamma}{\nu} (1+\beta) \right]^{1/2} \quad (24)$$

Оценим теперь мощность нагрева плазмы P и число e^- -волн, взаимодействующих с пучком N_R^e . Мощность, диссипируемая за счет столкновений, отличается от полной энергии волн только множителем ν , т.е. в безразмерных переменных

$$P \sim \beta^{-2} \nu^{1/2} [\gamma(1+\beta)]^{3/2} \quad (25)$$

В стационарном состоянии эта величина равна мощности, которую теряет пучок. Последняя же с точностью до численного множителя равна γN_R^e . Поэтому

$$N_R^e \sim \nu^{1/2} \gamma^{1/2} \beta^{-2} (1+\beta)^{3/2}$$

Отметим, что при $\gamma \gg \nu$ спектральная плотность e^- -волн в резонансной области оказывается малой по сравнению с их средней спектральной плотностью $N^e/|f_0|$.

Как видно из формулы (25), эффективность нагрева плазмы растет с увеличением магнитного поля. При $\beta \gg 1$ мощность пропорциональна первой степени напряженности поля, а при $\beta \ll 1$ — четвертой. Чтобы показать, как зависит мощность от остальных параметров, мы перепишем формулу (25) в размерных переменных:

$$P \sim \frac{\nu \gamma}{\omega_{pe}} n T \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \frac{(1+\beta)^{3/2}}{\beta^2} \left(\frac{\gamma}{\nu} \right)^{1/2} \quad (26)$$

Для сравнения напомним, что в отсутствие магнитного поля выражение для P имеет следующий вид (см./5/):

$$P \sim P_* = \frac{\nu \gamma}{\omega_{pe}} n T \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2}; \quad 1 \ll \frac{\gamma}{\nu} \lesssim \frac{mc^2}{T}$$

Критерий применимости формулы (26) дается неравенствами (16). Подставляя в них явное выражение для $|f_0|$ (см. (24)), получим:

$$1 + \beta^2 \ll \frac{\gamma}{\nu} (1+\beta) \ll \beta^2 \alpha^2 \quad (27)$$

Отметим, что согласно условию (2) $\alpha \gg 1$. Левое из неравенств (27) эквивалентно соотношению $P \gg P_*$. Если оно не выполнено, то мощность нагрева близка к P_* , а добавка, связанная с магнитным полем, мала. Если же нарушается правое неравенство, то ширина спектра, формально найденная из (24) оказывается больше, чем α , а это значит, что возникает сток энергии в точку $f = -\alpha$ (см. рис. 2). Максимальная мощность нагрева, при которой сток еще отсутствует, равна

$$P_{max} \sim \frac{\nu^2}{\omega_{pe}} n T \frac{M}{m} \frac{\omega_{ne}}{\omega_{pe}} \frac{mc^2}{T}$$

Она в α раз больше, чем соответствующая величина для плазмы без магнитного поля. Таким образом, включение магнитного поля позволяет существенно увеличить мощность нагрева плазмы и значительно расширяет диапазон условий, в которых энергия, выделенная пучком, может быть поглощена за счет кулоновских столкновений без "отрастания хвостов".

4. Стационарные спектры в нерезонансной области

Построение стационарного спектра сводится к отысканию различных решений уравнений (10), (12), отбору устойчивых решений и их сшивке друг с другом. Применительно к нерезонансной области, где $\gamma(f, x) = 0$, эта задача обладает определенной общностью, т.к. в уравнениях (10), (12) исчезает зависимость от конкретного вида источника волн. Поэтому имеет смысл провести полную классификацию "нерезонансных" спектров, что и будет сделано ниже.

Классификацию удобно начать с рассмотрения области частот

$$-f \gg \beta^{-1} + \beta^{-1/2} \quad (28)$$

в которой закон дисперсии (17) близок к степенному:*)

$$k^2(f, x) = -\frac{1-x^2}{\beta f} \quad (29)$$

Такая связь между k и f делает спектр автомодельным, поскольку величины Γ_e и Γ_t (см. (18)) оказываются инвариантными относительно замены f на cf , n^e на $c^2 n^e$ и n^t на $c^2 n^t$, где c — произвольная постоянная. В области автомодельности Γ_e как функция x представляет собой многочлен, имеющий на отрезке $0 \leq x \leq 1$ не более двух максимумов. Отсюда следует, что число e -струй в невырожденном спектре также не превышает двух (речь идет о промежутке $0 < x \leq 1$). Как показывает простой перебор всевозможных вариантов расположения e и t -струй, общее число различных решений, из которых может состоять автомодельный спектр, равно шести. Два из них — одноструйные, три — двухструйные, одно решение вырождено. Рассмотрим теперь каждое из этих решений в отдельности и проанализируем условия их сшивки.

4.1. Струя e -волн, бегущих поперек поля

Это решение примечательно тем, что именно оно реализуется в окрестности нижней границы спектра f_0 . При этом t -волны отсутствуют, т.е. $\omega_0^t(f) = \omega_1^t(f) = 0$, а спектральную функцию e -волн удобно представить в следующем виде:

$$n^e(f, x) = \frac{\sqrt{\beta} f^2}{Z(f)} \delta(x-0) \quad (30)$$

Учитывая автомодельность спектра, мы ввели вместо интенсивности струи функцию $Z(f)$, которая не меняется при преобразовании подобия. Аналогичные замены будут сделаны и в остальных случаях. Функция $Z(f)$ определяется из уравнения $\Gamma_e(f, 0) = 0$ и граничного условия $Z(f_0) = \infty$:

$$Z(f) = \frac{3}{\left(\frac{f_0}{f}\right)^{3/2} - 1} \quad (31)$$

*) Именно в этой области лежит нижняя граница рассматриваемого спектра f_0 (см. (16)).

Непосредственное вычисление функций Γ_e и Γ_t показывает, что решение (30), (31) устойчиво только при $Z(f) \geq 1$, т.е. в области

$$f \leq 4^{-2/3} f_0 \quad (32)$$

4.2. Струи e и t -волн, поляризованных поперек магнитного поля

Спектральные функции волн определяются из соотношений $\Gamma_e(f, 0) = \Gamma_t(f, 0) = 0$ и имеют следующий вид:

$$n^e(f, x) = \frac{\sqrt{(f-A)}}{k^2(f, 0)} \delta(x-0); \quad \omega_0^t(f) = B - \frac{\sqrt{(f-A)}}{k^2(f, 0)} \quad (33)$$

Здесь $k^2(f, 0)$ вычисляется согласно формуле (17), в которой следует положить $x=0$. Константы интегрирования A и B определяются из условия сшивки решения (33) на его нижней границе со струей (30). В точке сшивки $\omega_0^t = 0$, а $\frac{d}{df} \omega_0^t \geq 0$. Последнее условие эквивалентно неравенству $Z \leq 1$, которое противоположно (32). Отсюда следует, что сшивка возможна только при $Z=1$. Учитывая это обстоятельство и используя непрерывность спектральных функций, имеем:

$$A = 2^{-1/3} f_0; \quad B = 2^{-8/3} \sqrt{\beta} f_0^2$$

Найденное решение устойчиво во всей нерезонансной области вплоть до её верхней границы.

4.3. Струя косых e -волн

В этом спектре

$$n^e(f, x) = \sqrt{\beta} f^2 Z^{-1} \delta(x-\sqrt{\eta}); \quad \omega_0^t(f) = \omega_1^t(f) = 0 \quad (34)$$

Уравнения для функций $Z(f)$ и $\eta(f)$ получаются непосредственно из условий (10) и (12):

$$0(\eta) \frac{dZ}{d \ln(f)} = Z \{ 2D(\eta) + (1-\eta) [(3\eta-1)(3\eta^2-2\eta+1) - 4(1-\eta)] + 4Z(2-3\eta) \} \quad (35)$$

$$D(\eta) \frac{d\eta}{d \ln |f|} = (1-\eta)(3\eta^2 - 2\eta + 1)^2 - z(9\eta^2 - 10\eta + 3) \quad (36)$$

Здесь

$$D(\eta) = 8(1-\eta)^2 - (3\eta^2 - 2\eta + 1)^2$$

Система (35) - (36) позволяет выразить величины Γ_e и Γ_t , а вместе с ними и требование устойчивости спектра через z и η . В итоге критерий устойчивости сводится к следующим двум неравенствам:

$$D(\eta) [z(1+6\eta-9\eta^2) + 2(1-\eta)(1-6\eta+3\eta^2)] \geq 0 \quad (37)$$

$$D(\eta) \{ [5(1-\eta)^2 - \eta^2(3\eta-1)^2] z - 2(1-\eta)^2 [\eta(3\eta^2 - 2\eta + 1) + 2(1-\eta)^2] \} \geq 0$$

Уравнения (35), (36) удается проинтегрировать только численно.

Результат представлен на рис.3. Те решения, у которых, $z(\eta)|_{\eta=0} \geq 1$ являются продолжениями спектра, рассмотренного в разделе 4.1. Остальные решения сшиваются при малых значениях f со спектром 4.5 (см. ниже). При увеличении частоты все кривые выходят на границу области устойчивости, после чего характер решения меняется.

Семейство кривых на рис.3 ограничено справа решением, проходящим через особую точку ($\eta = \eta_d \approx 0,655, z = z_d \approx 1,060$). В этой точке $D(\eta) = 0$. Одновременно обращаются в ноль и правые части уравнений (35), (36). При $f \rightarrow 0$ особое решение имеет простую асимптотику:

$$z \approx 2,20 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2; \quad 1-\eta \approx 0,909 \frac{f}{f_0}$$

которая показывает, что струя выходит на продольное направление. В действительности η обращается в единицу не при $f=0$, а при малом положительном значении f , что связано с отличием точного закона дисперсии (17) от степенного (29). Используя формулу (17), можно показать, что

$$1-\eta \approx \frac{0,909}{1,401} \left(\frac{0,909}{\beta 1,401} - f \right); \quad z \approx 2,20 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2$$

При $f = \frac{0,909}{\beta 1,401}$ это решение переходит в спектр, состоящий из e и t -волн, поляризованных вдоль поля. Последний нетрудно найти из соотношений $\Gamma_e(f, 1) = \Gamma_t(f, 1) = 0$. Он оказывается устойчивым и может быть продолжен вплоть до резонансной области частот.

4.4. Струи косых e -волн и e -волн, бегущих поперек магнитного поля

В этом случае

$$n^e(f, x) = \beta f^2 [z^{-1} \delta(x - \sqrt{\eta}) + z_0^{-1} \delta(x - 0)]; \quad \omega_0^t = \omega_1^t = 0 \quad (38)$$

В области автомодельности уравнения $\Gamma_e(f, 0) = 0; \Gamma_e(f, \sqrt{\eta}) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_e(f, \sqrt{\eta})$ легко интегрируются и дают следующие соотношения:

$$\frac{3\eta - 1}{z} - \frac{1}{z_0} = \frac{A}{f^2}$$

$$\frac{2\eta(1-\eta)}{z} = \frac{B}{|f|} - 1 \quad (39)$$

$$\frac{1-\eta}{z} + \frac{1}{z_0} = \frac{C}{|f|^{3/2}} - \frac{1}{2}$$

Константы A, B и C определяются из условия сшивки решения (38) на его нижней границе со струей (34)*.

Требование положительности функции z_0 приводит к следующему ограничению на величины z и η в точке сшивки:

$$2(1-\eta)(-3\eta^2 + 6\eta - 1) - z(1+6\eta-9\eta^2) \geq 0 \quad (40)$$

Сравнение этого неравенства с (37) показывает, что сшивка возможна при $\frac{1}{3} \leq \eta \leq \eta_d$ на границе устойчивости струи (34) и при $\eta > \eta_d$. В последнем случае (38) сшивается со струей, проходящей через особую точку. Заметим, что задание величины η в точке сшивки однозначно (с точностью до подобия) определяет вид решения (38).

Условие устойчивости спектра (38) сводится к неравенству

$$\frac{1-\eta}{z} + \frac{1}{z_0} \leq \frac{3}{2} \quad (41)$$

Граница области устойчивости на плоскости (z, η) изображена на рис.4 линией ce . На том же рисунке показаны типичные интегральные кривые $z(\eta)$. При выходе кривой на границу устойчивости * Сшивка (38) с другими решениями на нижней границе невозможна.

спектр (38) переходит в вырожденный (см. ниже).

4.5. Струи косых e -волн и t -волн, поляризованных поперек магнитного поля

Спектральные функции $n^e(f, x)$ и $w_o^t(f)$ удобно записать в следующем виде:

$$n^e(f, x) = \frac{\nu \beta f^2}{z(f)} \delta(x - \sqrt{\eta(f)}); \quad w_o^t(f) = \frac{\nu \beta f^2}{u(f)} \quad (42)$$

Величины $z(f)$, $\eta(f)$ и $u(f)$ определяются соотношениями $\Gamma_e(f, 0) = 0$; $\Gamma_e(f, \sqrt{\eta}) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \eta} \Gamma_e(f, \sqrt{\eta}) = 0$, которые образуют следующую систему:

$$1 + \frac{(1-\eta)^2}{z} = \frac{A}{f}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \ln|f|} = -\frac{1}{2(1+\eta)} \left[\eta(1-\eta) - z \frac{3\eta^2 + 4\eta - 1}{2(1-\eta)} \right] \quad (43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ln|f|} = 2u + \frac{u^2}{z} \frac{z(1-\eta) [2(1-\eta)^2 + \eta(3\eta^2 - 2\eta + 1)] - z [5(1-\eta)^2 - \eta^2(3\eta - 1)^2]}{4(1+\eta)(1-\eta)^3}$$

Здесь A — константа интегрирования.

Условие устойчивости спектра (42) дается неравенством:

$$2\eta(1-\eta)^2 - z(1-3\eta^2) \leq 0$$

Граница области устойчивости показана на рис. 4 (линия OC). Там же изображены участки интегральных кривых $z(\eta)$, имеющие физический смысл. Все они лежат внутри четырехугольника $Oabc$. Если интегральная кривая начинается на стороне bc , то решение (42) сшивается на своей нижней границе со струей (34). При этом z и η непрерывны, а $u^{-1} = 0$. Условие положительности величины u ($\frac{d}{df} u^{-1} > 0$) дает для z и η в точке сшивки неравенство

$$2(1-\eta)^2 [2(1-\eta)^2 + \eta(3\eta^2 - 2\eta + 1)] - z [5(1-\eta)^2 - \eta^2(3\eta - 1)^2] \geq 0$$

которое в совокупности с (37) показывает, что сшивка возможна лишь на границе устойчивости струи (34) при $\eta \leq \frac{1}{3}$. Если же кривая $z(\eta)$ начинается на стороне Oa , то решение (42) является продолжением (30), причем каждому значению $z(0)$ соответствует единственное (с точностью до подобия) решение систе-

мы (43). Все эти решения лежат в области $\eta \ll 1$, что позволяет проинтегрировать систему (43) аналитически. Оказывается, что при $0,893 \leq z(0) \leq 1$ интенсивность t -волн с увеличением частоты обращается в ноль и спектр становится одноструйным. Значения η и z в точках обрыва t -струи заполняют линию $\eta \approx \frac{(1-z)^2}{4z}$ (линия ab на рис. 4). Точка b имеет координаты $\eta_b \approx 0,013$, $z_b \approx 0,785$.

Отметим, наконец, что так же, как и в случае 4.4, выход кривой $z(\eta)$ на границу устойчивости соответствует переходу струйного спектра в вырожденный (см. ниже).

4.6. Вырожденный спектр

В этом случае на спектральные функции накладываются лишь интегральные ограничения:

$$F_1 = \nu f + \text{const}; \quad F_2 = \text{const}; \quad F_3 = \text{const}; \quad F_4 = \text{const} \quad (44)$$

(функции $F_1; F_2; F_3$ и F_4 задаются формулой (19)).

Заметим, что вырожденное решение сохраняет существенно положительную величину $3F_3 + F_4$. Поэтому оно заведомо не может быть протянуто до точки f_0 , где $3F_3 + F_4 = 0$. Таким образом, на своей нижней границе, которую мы обозначим через f_* , спектр (44) должен быть сшит с одним из струйных решений. Сравнение условия положительности спектральных функций справа от точки сшивки ($f = f_* + 0$) с условием устойчивости струйного спектра показывает, что сшивка возможна либо с решением (34) при $\eta(f_*) \equiv \eta_* \geq \eta_c \approx 0,831$, либо с решениями (38) и (42) на границе их устойчивости. В принципе, вырожденный спектр может быть продолжен от точки сшивки в сторону высоких частот вплоть до резонансной области. Необходимо только, чтобы соотношения между величинами $F_1; F_2; F_3$ и F_4 не противоречили требованию положительности спектральных функций. Простые оценки позволяют установить, что для этого значение величины η_* должно быть не слишком близким к нулю или единице ($\eta_* \gg \frac{\beta^{-1} + \beta^{-1/2}}{1 + \beta}$, $1 - \eta_* \gg \frac{1 + \beta}{\beta^2 f_*^2}$). Мы не будем рассматривать здесь ту ситуа-

цию, когда какое-либо из этих условий нарушается, поскольку заранее ясно, что при этом вид спектра близок к тому, что получается в пределе $z_* = 0$ или $z_* = 1$.

В заключение приведем перечень всех возможных вариантов построения стационарного спектра из решений, описанных в разделах 4.1-4.6. Семейство спектров характеризуется двумя параметрами, в качестве которых удобно выбрать величины f_0 и z_* . Спектр может быть составлен следующими семью способами:

- | | | |
|------------------------------------|---|------|
| 1) 4.1 → 4.2 → R | } | (45) |
| 2) 4.1 → 4.5 → 4.6 → R | | |
| 3) 4.1 → 4.5 → 4.3 → 4.5 → 4.6 → R | | |
| 4) 4.1 → 4.3 → 4.5 → 4.6 → R | | |
| 5) 4.1 → 4.3 → 4.4 → 4.6 → R | | |
| 6) 4.1 → 4.3 → 4.6 → R | | |
| 7) 4.1 → 4.3 → L → R | | |

Каждое решение в этом перечне обозначено номером соответствующего раздела. Символом R обозначено решение в резонансной области, а символом L - двухструйное решение, состоящее из e и t - волн, поляризованных вдоль магнитного поля (см. раздел 4.3). Стрелки показывают, как меняется тип решения при увеличении частоты. Варианты занумерованы в порядке возрастания параметра z_* .

5. Спектр в резонансной области. Вычисление мощности нагрева

Распределение волн в резонансном диапазоне частот существенно зависит от конкретного вида источника. Ниже предполагается, что колебания раскачиваются двумя одинаковыми встречными релятивистскими электронными пучками, каждый из которых обладает малым угловым разбросом $\Delta\theta \ll 1$. В этом случае инкремент $\gamma(f, x)$ в области $x > 0$ отличен от нуля в окрестности линии $x \cdot k(f, x) = 1$ и при каждом фиксированном значении f имеет острый максимум по x (см. /11/)*. Обозначим положение максимума через $\sqrt{\xi(f)}$. С хорошей точностью можно считать, что $\xi(f) k^2(f, \sqrt{\xi}) = 1$.

* Напомним, что функция $k(f, x)$ задается формулой (17).

Подставляя это соотношение в формулу (17), имеем

$$f = \xi^{-1} + \beta^{-1} (1 - \xi)^2 \quad (46)$$

В максимуме (при $x = \sqrt{\xi}$) инкремент определяется следующей формулой:

$$\gamma(f, \xi) = \gamma_0 \xi \quad (47)$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \frac{n'}{n} \frac{mc^2}{\epsilon} \frac{mc^2}{T \Delta\theta^2}$$

Здесь n' - концентрация пучка, ϵ - энергия релятивистских электронов, $\Delta\theta$ - их угловой разброс. Эта формула получена при следующих ограничениях на параметры пучка и плазмы (см. /11/):

$$1 \gg \Delta\theta \gg \left\{ \frac{mc^2}{\epsilon}; \left(\frac{n'}{n} \frac{mc^2}{\epsilon} \right)^{1/4}; \left(\frac{n'}{n} \right)^{1/6} \left(\frac{mc^2}{\epsilon} \right)^{1/2} \right\}$$

Кроме того, подразумевается, что влияние магнитного поля на движение электронов пучка пренебрежимо мало.

Для построения резонансного спектра требуется провести процедуру, аналогичную изложенной в разделе 4, с тем лишь отличием, что в уравнения следует включить инкремент $\gamma(f, x)$. Поскольку при этом не возникает никаких принципиальных усложнений, мы сразу приведем результат, причем ограничимся наиболее интересным случаем значительного превышения инкремента над порогом неустойчивости ($\gamma_0 \gg \nu$).

Весь резонансный спектр оказывается состоящим из трех различных участков. Верхняя граница спектра f_m определяется из условия $\xi(f_m) = \frac{\nu}{2\gamma_0}$. Для простоты мы будем считать, что в области $f \sim f_m$ магнитное поле не оказывает существенного влияния на закон дисперсии e-волн. Тогда $f_m \approx \frac{2\gamma_0}{\nu}$.

В непосредственной окрестности точки $f = f_m$ t-волны отсутствуют, и имеется всего одна струя e-волн, расположенная в максимуме инкремента:

$$n^e(f, x) = (\sqrt{2\gamma_0 \xi} - \sqrt{\nu})^2 \delta(x - \sqrt{\xi}) \quad (48)$$

На следующем участке ($f^* \leq f \leq f^+$), границы которого f^* и f^+ пока не определены и будут найдены ниже, в спектре наряду с e-волнами существуют еще и t-волны с $S=0$:

$$\left. \begin{aligned} n^e(f, x) &= \frac{\xi^*}{1-\xi^*} \left[\nu(f-f^*) + \frac{1-\xi^*}{\xi^*} n^* \right] \delta(x-\sqrt{\xi}) \\ \omega_0^{\pm}(f) &= 2\gamma_0 \left[\ln \frac{1-\xi^*}{1-\xi^+} + \frac{2}{3\beta} (\xi^3 - \xi^{+3}) \right] \end{aligned} \right\} (49)$$

Здесь

$$\xi^* = \xi(f^*) ; \xi^+ = \xi(f^+);$$

$$n^* = \frac{\xi^*}{1-\xi^*} \left[\nu(f^*-f^+) + \frac{1-\xi^*}{\xi^*} (\sqrt{2\gamma_0 \xi^+} - \sqrt{\nu})^2 \right] (50)$$

Наконец, в области $1 \leq f \leq f^*$ дополнительно возникают e -волны, бегущие поперек поля и t -волны с $S = I^*$

$$\left. \begin{aligned} n^e(f, x) &= \left[n^* + \frac{3}{2}(f-f^*) \right] \delta(x-\sqrt{\xi}) + \\ &+ \frac{1}{k^2(f, 0)} \left[\frac{3}{2}(f-f^*) \left(3 - \frac{1}{\xi} \right) + n^* \left(\frac{1}{\xi^*} - \frac{1}{\xi} \right) \right] \delta(x-0) \\ \omega_0^{\pm}(f) &= 2\gamma_0 \left[\frac{2}{3} \beta^{-1} \xi^{*3} - \ln(1-\xi^*) \right] \\ \omega_1^{\pm}(f) &= \gamma_0 \left\{ \left[\xi^2 \left(1 - \frac{2}{3} \xi \right) - \xi^{*2} \left(1 - \frac{2}{3} \xi^* \right) \right] \beta^{-1} \ln \frac{\xi}{\xi^*} \right\} \end{aligned} \right\} (51)$$

При $f = 1$ спектр (51) должен быть сплит с нерезонансным. Сливка оказывается возможной только в том случае, когда нерезонансный спектр состоит из решений 4.1, 4.3, 4.4 и 4.6, т.е. относится к пункту 5 в схеме (45).

Условия непрерывности величин F_1 ; F_2 ; F_3 и F_4 в точке сшивки дают для четырех неизвестных констант f^* , n^* , f_* и ϱ_* следующую систему уравнений:

$$n^* = \frac{3}{2} \nu (f^* + 2|f_*|) (52)$$

$$|f_*| = \left\{ \frac{4}{3} \frac{\gamma_0}{\nu \beta} \left[\ln \frac{1}{1-\xi^*} + \frac{2}{3} \beta^{-1} \xi^{*3} \right] \right\}^{1/2} (53)$$

ж) Записывая формулы (49), (51), мы опустили в них те слагаемые, которые после определения величин f^* и f_* дают к решению малые добавки. При этом использованы следующие малые параметры: $\frac{\omega_{не}}{\omega_{ре}}$; $\left(\frac{\nu}{\gamma_0}\right)^{1/2}$; $\frac{\nu}{\beta \gamma_0}$; $\left(\frac{\gamma_0}{\nu} \frac{T}{mc^2} \frac{1+\beta}{\beta}\right)^{1/2}$

$$\frac{2\varrho_*(1-\varrho_*)}{Z(\varrho_*)} = 3\xi^* + (3\xi^* - 1) \left(\frac{f^*}{|f_*|} + 1 \right) (54)$$

$$\frac{4\varrho_*}{3Z(\varrho_*)} = \frac{2\xi^{*3} - 3\xi^{*2} + 1 - 3\beta \ln \xi^*}{2\xi^{*3} - 3\beta \ln(1-\xi^*)} (55)$$

График входящей сюда функции $Z(\varrho_*)$ представлен на рис.4 линией ce . Решив систему (52)-(55), можно далее с помощью соотношений (46) и (50) вычислить f^* , ξ^* и тем самым определить все параметры искомого распределения волн.

Как уже отмечалось во Введении, физически наиболее интересен тот случай, когда нерезонансный интервал частот существенно шире резонансного. Применительно к системе (52)-(55) это означает, что отношение $f^*/|f_*|$ мало по сравнению с единицей. Если пренебречь величиной $f^*/|f_*|$, то последние два уравнения системы (52)-(55) отщепляются от остальных, а ξ^* и ϱ_* оказываются не зависящими от γ_0 и ν . График функции $\xi^*(\beta^{-1})$, найденной путем численного решения упрощенной системы, изображен на рис.5. Остальные параметры выражаются через ξ^* аналитически.

По известному резонансному спектру не представляет труда вычислить мощность, передаваемую единице объема плазмы:

$$P = 4 \int_0^1 dx \int_1^{\infty} df \delta(f, x) n^e(f, x)$$

Эту величину также удобно выразить через ξ^* . Для наглядности мы выпишем результат в размерных переменных.

$$\begin{aligned} P = & \nu n T \frac{18}{\pi \Delta \theta^2} \frac{M}{m} \frac{n'}{n} \frac{T}{\varepsilon} \left\{ \ln \left(\frac{\omega_{ре}}{\nu} \frac{n'}{n} \frac{mc^2}{\varepsilon \Delta \theta^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2\omega_{ре}}{\nu} \frac{n'}{n} \frac{mc^2}{\varepsilon \Delta \theta^2} \right)^{1/2} Q(\beta^{-1}) \right\} (56) \end{aligned}$$

Здесь

$$Q(\beta^{-1}) = \frac{1}{\xi^*} \left\{ 2\beta^{-1} \left[3 \ln \frac{1}{1-\xi^*} + 2\beta^{-1} \xi^{*3} \right] \right\}^{1/2} \times \\ \times \left[\xi^* \ln \frac{1}{\xi^*} + (1-\xi^*) \ln \frac{1}{1-\xi^*} + \frac{1}{3} \beta^{-1} \xi^* (1-\xi^{*2}) \right]$$

График функции $Q(\beta^{-1})$ представлен на рис.6.

Первое слагаемое в формуле (56) совпадает с мощностью нагрева плазмы в отсутствие магнитного поля (см. /5/). Второе слагаемое описывает увеличение диссипации, обусловленное включением поля. Его зависимость от параметров пучка и плазмы полностью соответствует оценкам, проделанным в разделе 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Б.Кадошцев, В сб.Вопросы теории плазмы под ред.М.А.Леонтовича, вып.4, Атомиздат, 1964, стр.188.
2. А.А.Галеев, В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20, 1965.
3. В.Н.Цытович. Теория турбулентной плазмы. Атомиздат, 1971.
4. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер, ЖЭТФ, 64, 1297, 1973.
5. Б.Н.Брейзман, ЖЭТФ, 69, 896, 1975.
6. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков, ДАН СССР, 159, 767, 1964.
7. Л.И.Рудаков. Письма в ЖЭТФ, 19, 729, 1974.
8. Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров. Препринт № 106, Институт прикладной математики АН СССР, 1974.
9. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, Письма в ЖЭТФ, 21, 421, 1975.
10. В.Д.Шафранов. В сб.Вопросы теории плазмы под ред. М.А.Леонтовича, вып.3, Атомиздат, 1963, стр.95.
11. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов. Ядерный синтез, 14, 873, 1974.

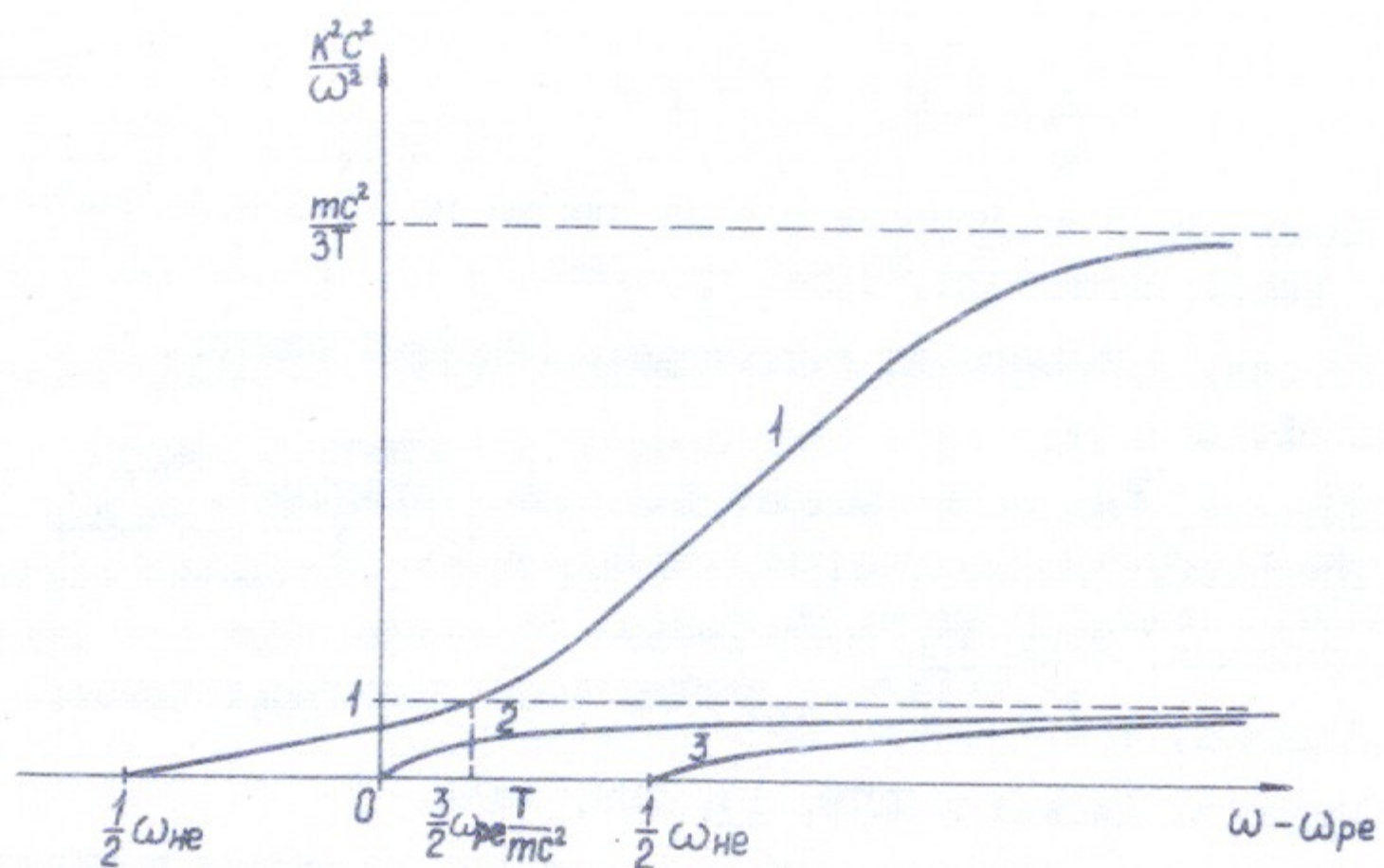


Рис.1. Дисперсионные кривые электронных колебаний плазмы в слабом ($\omega_{ne} < \omega_{pe}$) магнитном поле. Угол между направлениями волнового вектора и магнитного поля отличен от нуля. (1) — медленная необыкновенная ветвь, (2) — обыкновенная ветвь, (3) — быстрая необыкновенная ветвь.

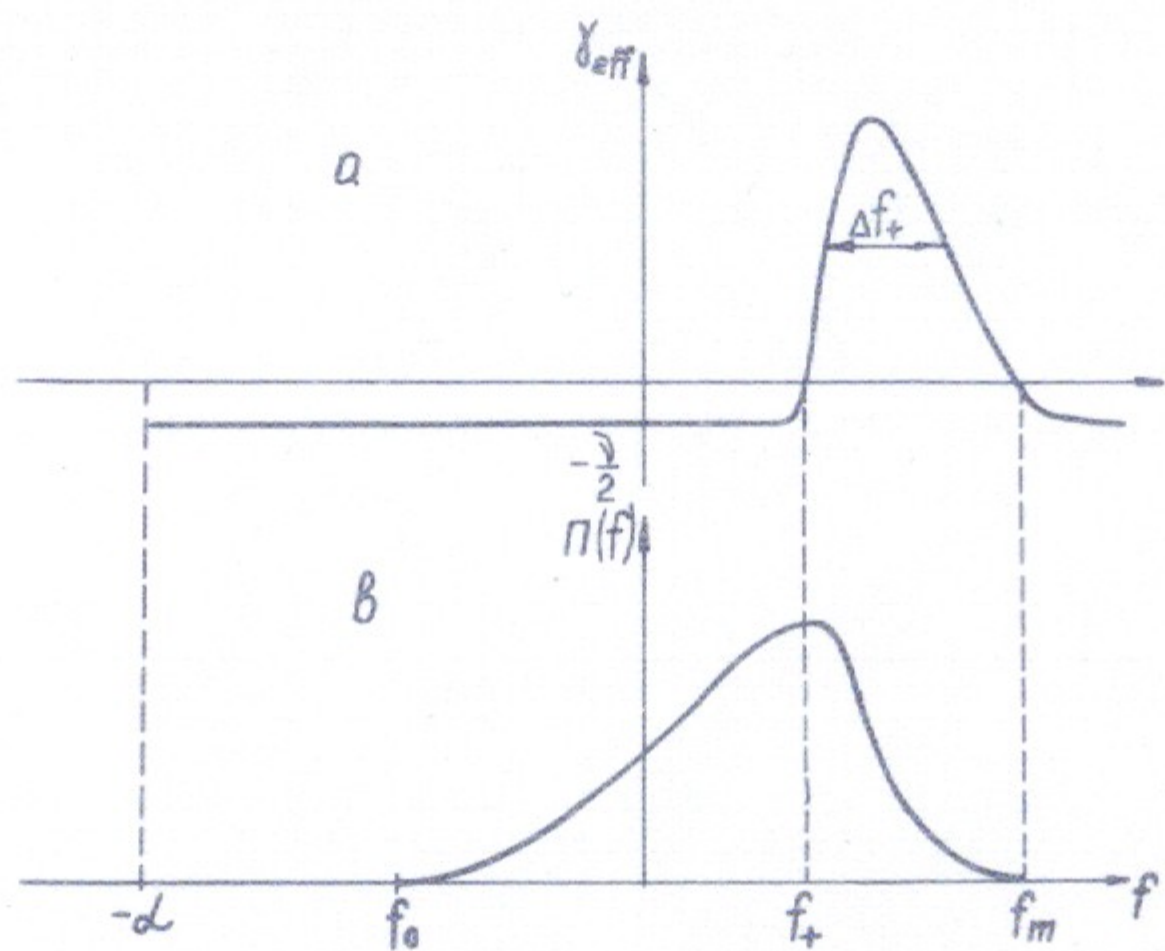


Рис.2. Схематические зависимости эффективного инкремента γ_{eff} и потока числа волн по спектру $\Pi(f)$ от безразмерной частоты f . Через $-\alpha$ обозначена минимальная частота, допускаемая законом дисперсии (см. формулу (16)).

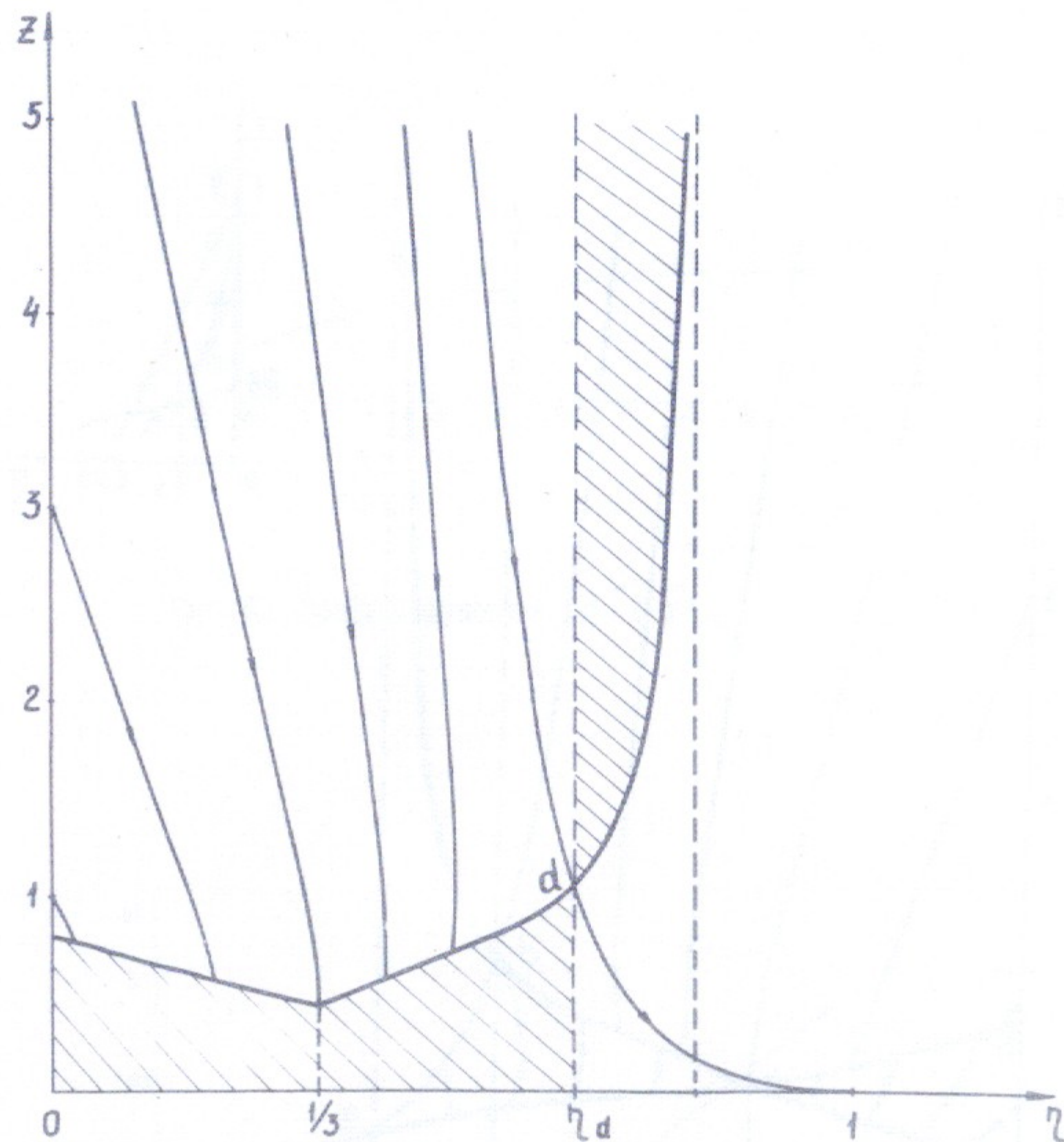


Рис.3. Интегральные кривые системы (35) - (36). Стрелками показано направление изменения z и η при увеличении частоты. Зона неустойчивости спектра (34) заштрихована. Те решения, у которых $z|_{\eta=0} < 1$, изображены на врезке к рис.4.

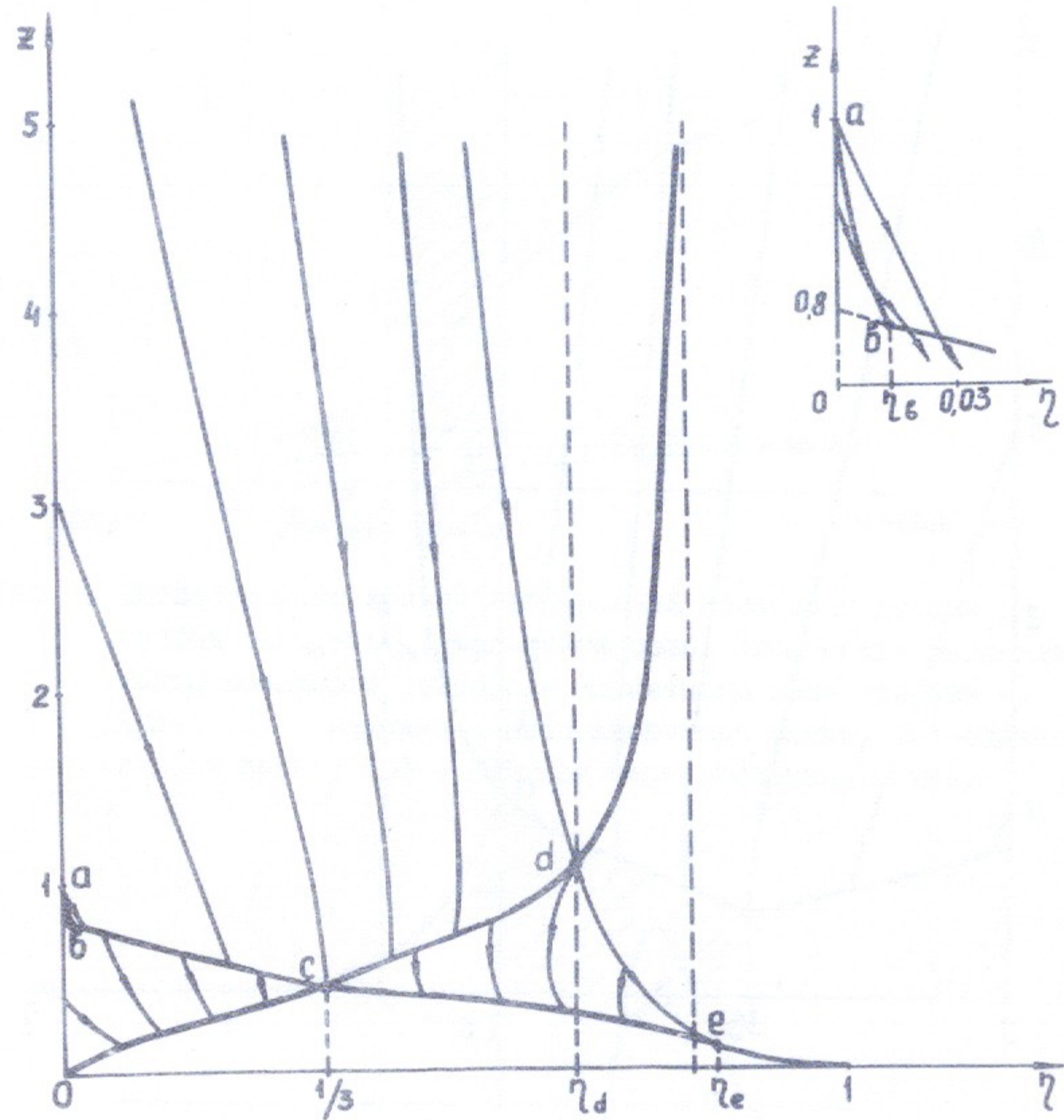


Рис.4. Интегральные кривые $Z(\eta)$ и границы областей устойчивости автомодельных решений 4.3 - 4.5. В области, лежащей выше линии $abcd$, решение имеет вид 4.3; в области $Oabc$ - 4.4, а в области cde - 4.5. Направление стрелок соответствует увеличению частоты. На врезке в большем масштабе показана окрестность линии ab .

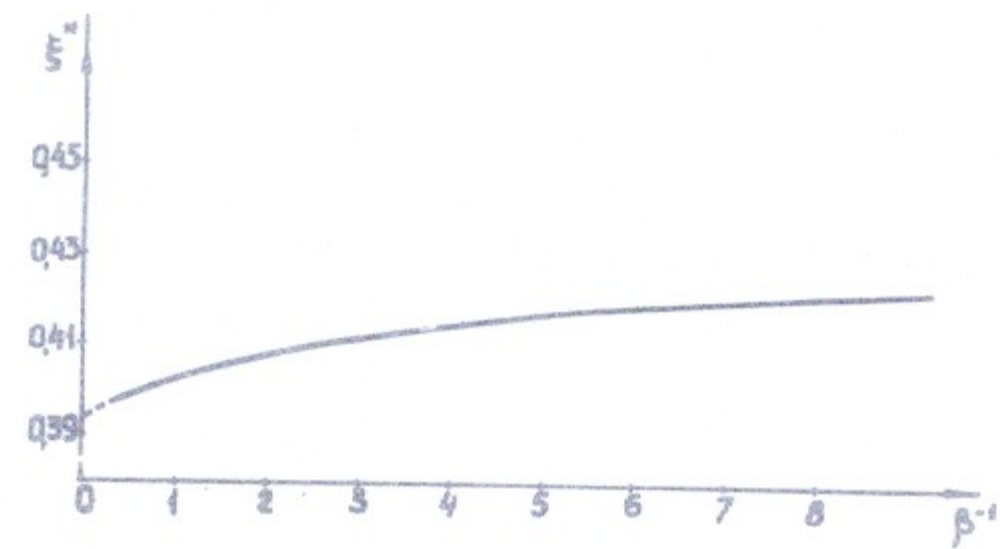


Рис.5. График функции $\xi^*(\beta)$.

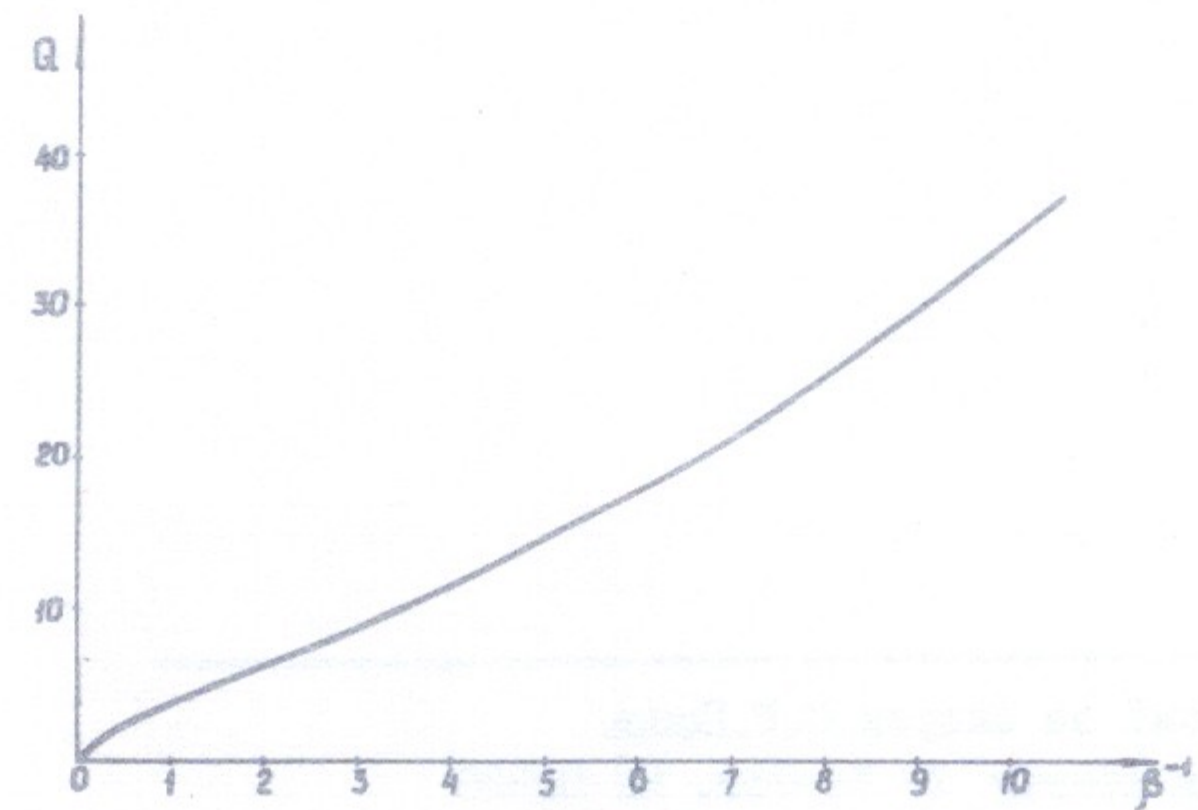


Рис.6. График функции $Q(\beta)$.

Ответственный за выпуск С.Г.Попов
Подписано к печати 27.УШ-76г. МН 02920
Усл. 2 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 76.

Отпечатано на ротационных в ИЯФ СО АН СССР