

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76-87

**Н.А.Винокуров, В.Н.Корчуганов, Г.Н.Кулипанов,
Е.А.Переведенцев**

**ВЛИЯНИЕ ХРОМАТИЧНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТИ НА КИНЕМАТИКУ
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Новосибирск

1976

ВЛИЯНИЕ ХРОМАТИЧНОСТИ И КУБИЧЕСКОЙ
НЕЛИНЕЙНОСТИ НА КИНЕМАТИКУ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н. А. Винокуров, В. Н. Корчуганов, Г. Н. Кулипанов,
Е. А. Переведенцев

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена временная эволюция моментов функции распределения невзаимодействующих частиц в бетатронном фазовом пространстве при наличии квадратичной и кубической нелинейностей. Предложен простой способ оперативного измерения нелинейностей ведущего поля, поперечного размера электронного пучка и энергетического разброса. Описаны экспериментальные результаты, полученные на накопителе ВЭШ-3.

Работа поступила - 8 апреля 1976г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 22.9-76г. МН 02975
Усл. 0,8 печ.л., 0,65 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 87.

Введение

Для понимания коллективных явлений, возникающих при получении больших токов в накопителях (например, механизмов развития различных неустойчивостей) необходимо изучение кинематики когерентных бетатронных колебаний. Под кинематикой мы подразумеваем изучение движения частиц без учета сил пространственного заряда в ведущем магнитном поле, обладающем хроматизмом $\frac{\partial \omega}{\partial E}$ и кубической нелинейностью $\frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2}$.

В данной работе рассмотрена временная эволюция моментов функции распределения невзаимодействующих частиц в бетатронном фазовом пространстве. Получены простые формулы для экспериментально наблюдаемых величин и проведена их экспериментальная проверка на накопителе ВЭШ-3.

1. Примененный нами метод наблюдения когерентных бетатронных колебаний основан на регистрации видимой части синхротронного излучения при помощи оптической системы и ФЭУ [1]. Экспериментальная установка состоит из объектива, итормы, стоящей в плоскости изображения, ФЭУ, резонансного усилителя и осциллографа. Проходя через объектив, синхротронное излучение создает изображение поперечного сечения электронного пучка в месте наблюдения. Непрозрачная итормка, край которой проходит через изображение положения равновесия пучка, частично перекрывает свет, падающий на быстрый ФЭУ. Для наблюдения вертикальных колебаний край итормки располагается горизонтально, а для наблюдения горизонтальных колебаний - вертикально. Сигнал с ФЭУ подается на вход резонансного усилителя (добротность $Q = 40+100$), настроенного на частоту $\{ \nu \} f_0$ или $(1 - \{ \nu \}) f_0$, f_0 - частота обращения). Сигнал с выхода усилителя наблюдается на осциллографе. $\{ \nu \}$ - нецелая часть бетатронного волнового числа $\nu = \frac{v}{2\pi r}$.

2. Рассмотрим для простоты случай одного короткого по сравнению с периметром машины сгустка, предполагая при этом, что когерентные синхротронные и горизонтальные бетатронные колебания отсутствуют. Пусть

$$f(a^2, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(a^2, t) e^{in(\varphi - \omega t)} \quad (1)$$

- функция распределения частиц в фазовом пространстве вертикальных бетатронных колебаний, a - амплитуда колебаний φ - их фаза, ω - бетатронная частота. Если функцию прозрачности диафрагмы (щели, шторки, оптического клина и т.д.), стоящей в плоскости изображения обозначить через $G(z)$, то сигнал с ФЭУ пропорционален величине

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(k\omega_0 - n\omega)t} \int_0^{\infty} f_n(a^2, t) K_n(a^2) da^2$$

где
$$K_n(a^2) = \int_{-\pi}^{\pi} G(a \cos \varphi) e^{in\varphi} d\varphi$$

Отметим, что $f_n(a^2, t)$ является медленной функцией времени. Если фильтр (резонансный усилитель) настроен на частоту $k f_0 - \frac{n\omega}{2\pi}$, то сигнал с его выхода пропорционален

$$I_n = e^{i(k\omega_0 - n\omega)t} \int_0^{\infty} f_n(a^2, t) K_n(a^2) da^2 + \text{к.с.} \quad (3)$$

а огибающая сигнала -

$$A_n = \left| \int_0^{\infty} f_n(a^2, t) K_n(a^2) da^2 \right| \quad (4)$$

Таким образом, наблюдая огибающую сигнала, т.е. $A_n(t)$, можно получить информацию об n -ной моде когерентных колебаний. В частном случае шторки, край которой проходит через изображение положения равновесия пучка, $G(z) = \theta(z)$ ($\theta(z)$ - единичная функция) и

$$A_{2n-1} = \frac{2}{2n-1} \left| \int_0^{\infty} f_n(a^2, t) da^2 \right| \quad (5)$$

$$A_{2n} = 0$$

Заметим, что при взаимодействии пучка с пластинами, стенками вакуумной камеры и др. существенными являются не сами гармоники функции распределения $f_n(a^2, t)$, а их моменты (например, $\int_0^{\infty} f_n(a^2, t) a^r da^2$), т.е. величины аналогичные A_n . Поэтому наблюдение величин $A_n(t)$ важно при изучении поперечных неустойчивостей.

3. Пусть ток пучка настолько мал, что когерентных эффектов нет. Тогда при $\frac{\partial \omega}{\partial E} = 0$ в первом порядке по машинной нелинейности

$$f_n(a^2, t) = f_n(a^2, 0) e^{-i \frac{\partial \omega}{\partial a^2} n a^2 t} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим

$$A_n = \left| \int_0^{\infty} f_n(a^2, 0) K_n(a^2) e^{-in \frac{\partial \omega}{\partial a^2} t a^2} da^2 \right| \quad (7)$$

т.е. $A_n(n \frac{\partial \omega}{\partial a^2} t)$ есть модуль одностороннего преобразования Фурье от $f_n K_n$ по a^2 . Из (7) следует, что A_n затухает за время $t_0 \sim (n \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \delta a^2)^{-1}$, где δa^2 - характерный размер неоднородности; ($K_n(a^2)$ предполагается гладкой).

С учётом хроматизма ($\frac{\partial \omega}{\partial E} \neq 0$) вместо (6) имеем

$$f_n(a^2, t) = e^{-in \frac{\partial \omega}{\partial a^2} a^2 t} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(a^2, \epsilon) e^{-i \frac{n}{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial E} \epsilon (\sin(\psi - \Omega t) - \sin \psi)} \epsilon d\epsilon d\psi \quad (8)$$

$$= 2\pi e^{-in \frac{\partial \omega}{\partial a^2} a^2 t} \int_0^{\infty} f_n(a^2, \epsilon) \gamma_0 \left(2 \frac{n}{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial E} \epsilon \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \epsilon d\epsilon$$

где ϵ - амплитуда синхротронных колебаний, ψ - их фаза, Ω - их частота. Интеграл по ϵ в (8) есть не что иное, как преобразование Ханкеля нулевого порядка от $f_n(a^2, \epsilon)$.

Если $f_n(a^2, \epsilon) = f_n(a^2) \varphi(\epsilon)$, то из (8) следует, что для учёта хроматизма следует домножить $f_n(a^2, t)$ из (6) на

$$M_n = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi(\epsilon) \gamma_0 \left(\frac{2n}{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial E} \epsilon \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \epsilon d\epsilon \equiv$$

$$\equiv 2\pi \tilde{\varphi} \left(\frac{2n}{\Omega} \frac{\partial \omega}{\partial E} \sin \frac{\Omega t}{2} \right) \quad (9)$$

где $\tilde{\varphi}$ - преобразование Ханкеля нулевого порядка от $\varphi(\epsilon)$. Тогда $A_n(t)$ будет промодулирована с коэффициентом модуляции $M_n(t)$. Интересно отметить, что такая модуляция возникает в отсутствии когерентных синхротронных колебаний. Она даёт возможность измерять частоту синхротронных колебаний Ω без возбуждения когерентных синхротронных колебаний и оценивать хроматизм. Эта модуляция наблюдалась на ВЭПП-3 и SPEAR [2].

4. Для экспериментального изучения свободные когерентные бетатронные колебания возбуждались при помощи импульсной расщепки. Если $F(a^2)$ - функция распределения по амплитудам бетатронных колебаний до удара, то после удара

$$f(a^2, \phi, \epsilon) = F[(a \sin \phi - \beta)^2 + a^2 \cos^2 \phi] \varphi(\epsilon)$$

где β - амплитуда удара. Вычисляя A_1 , при выполнении условий $\beta \gg \bar{a}$ и $t \ll (\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \bar{a}^2)^{-1}$ (\bar{a} - поперечный размер пучка) получим для случая $G(z) = \theta(z)$

$$A_1(t) = M_1(t) \left| \int_0^{\infty} F(a^2) \left[2 \frac{\partial \omega}{\partial a^2} t \beta a \right] da \right| = 4\pi |\tilde{\varphi} \tilde{F}| \quad (10)$$

а) Для равновесного пучка функции распределения имеют гауссовский вид:

$$F(a^2) = \frac{1}{2\pi \sigma_a^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}} \quad (11)$$

$$\varphi(\epsilon) = \frac{1}{2\pi \sigma_\epsilon^2} e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma_\epsilon^2}}$$

и согласно (10) имеем огибающую

$$A_1(t) \propto e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} e^{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \frac{\sigma_E}{\Omega}\right)^2 (1 - \cos \Omega t)} \quad (12)$$

где $\tau = \left(2 \frac{\partial \omega}{\partial a^2} \beta \sigma_a\right)^{-1}$.

На фиг. I показаны осциллограммы, огибающая которых описывается формулой (12), при различных $\frac{\partial \omega}{\partial E}$.

При $\left| \frac{\partial \omega}{\partial E} \frac{\sigma_E}{\Omega} \right| \gg 1$ сигнал разбивается на отдельные "всплески" (фиг. Iв - Iд). Форма "всплеска" дается выражением

$$A_1(t) \propto e^{-\frac{(t-t_i)^2}{2\tau_i^2}} \quad \text{где } t_i = 0, \frac{2\pi}{\Omega}, \frac{4\pi}{\Omega}, \dots \quad (13)$$

$$\tau_E^{-1} = \left| \frac{\partial \omega}{\partial E} \sigma_E \right| = \left| \alpha \frac{\partial \omega}{\partial f_0} \frac{\sigma_E}{E} f_0 \right| \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{d \ln f_0}{d \ln E}$$

На фиг.2 показана измеренная зависимость τ_E^{-1} от $\frac{\partial \omega}{\partial f_0}$ при двух значениях ускоряющего напряжения U (т.е. при разных Ω)

Таким образом из (13) и фиг. 1в - 1д видно, что расплывание частиц по бетатронным фазам происходит из-за наличия энергетического разброса σ_E так же, как при отсутствии ускоряющего напряжения, но через период синхротронных колебаний $\frac{2\pi}{\Omega}$ снова происходит фазировка, так как в линейной колебательной системе не может быть размешивания. Из (12) и фиг.1 видно, что затухание "всплесков" происходит за время τ , что соответствует размешиванию по бетатронным фазам из-за наличия кубической нелинейности

$\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$. Измеряя время τ_E (14) можно при известном хроматизме $\frac{\partial \omega}{\partial E}$ найти энергетический разброс σ_E , и наоборот, зная σ_E , можно определить $\frac{\partial \omega}{\partial E}$. На фиг.3 приведена зависимость $\frac{\sigma_E}{E}$, измеренного таким способом, от энергии E (прямая соответствует расчётным значениям). В случае слабой модуляции сигнала $\left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \frac{\sigma_E}{\Omega} \right)^2 \ll 1$ можно найти $\frac{\partial \omega}{\partial E}$ измеряя глубину модуляции сигнала.

Рассмотрим теперь способы измерения кубической нелинейности $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$. Из (12) видно, что, занулив $\frac{\partial \omega}{\partial E}$ с помощью секступоля, можно получить сигнал, показанный на фиг.1а, измерить τ и при известных поперечном размере пучка σ_z и амплитуде удара b найти $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$. На фиг.4 показаны осциллограммы, полученные при $\frac{\partial \omega}{\partial E} = 0$. Они расположены в порядке возрастания $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$.

б) Остановимся подробнее на другом способе измерения $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$. Если спустя время T после первого удара следует второй, то, при условиях $b e^{-\Gamma T} \gg \sigma_z$ и $T \gg \tau$ (Γ - декремент радиационного затухания), функция распределения $F(a^2)$ перед вторым ударом имеет вид

$$F(a^2) = \frac{1}{2\pi} \delta(a^2 - b^2 e^{-2\Gamma T}) \quad (15)$$

Тогда

$$A_1(t) \propto \int_0^\infty \left(2 \frac{\partial \omega}{\partial a^2} b^2 e^{-\Gamma T} \right) \left| e^{-\left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \frac{\sigma_E}{\Omega} \right)^2 (1 - \cos \Omega t)} \right| \quad (16)$$

Осциллограмма фиг. 5 иллюстрирует (15) при $\frac{\partial \omega}{\partial E} = 0$. Из (16) следует, что огибающая $A_i(t)$ обращается в нуль в моменты времени $t_i = \alpha_i e^{i\pi \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \rho^2 \right)^{-1}}$ (время везде отсчитывается от второго удара), где α_i - нули функции Бесселя нулевого индекса $J_0(\alpha_i) = 0$.

На фиг. 6 показана зависимость измеренных времен t_1, t_2, t_3 от тока октупольной коррекции. Для проверки формулы (16) на фиг. 7 показаны отношения $\frac{t_{ik}}{t_{ki}}$ ($i, k = 1, 2, 3$) при различных токах в октупольной коррекции (т.е. различных $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$).

Такой способ измерения $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$ имеет следующие преимущества перед первым:

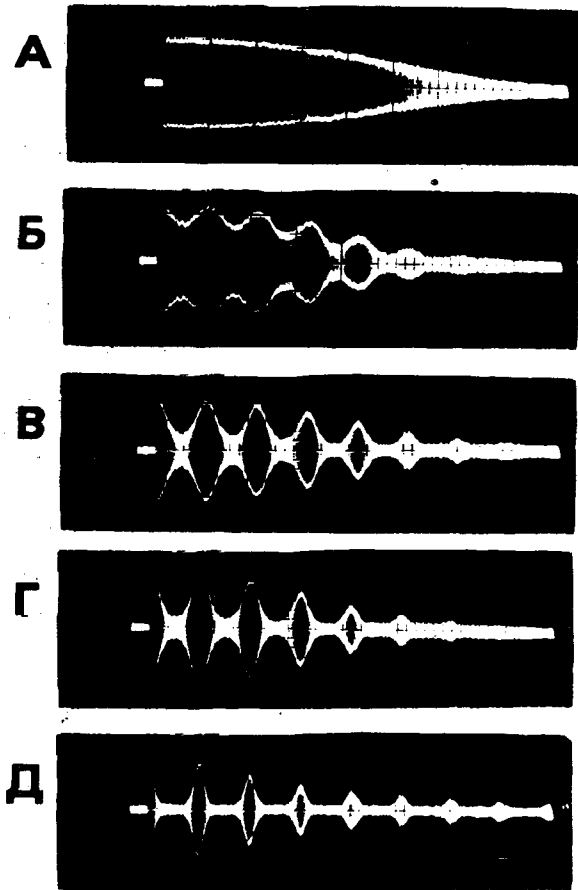
1) так как форма сигнала несущественна, в точность измерения не входит линейность усилителя и нет необходимости занулять $\frac{\partial \omega}{\partial E}$ (достаточно лишь выполнить условие $\left| \frac{\partial \omega}{\partial E} \frac{\sigma_E}{\Omega} \right| \ll 1$).

2) нет необходимости знать σ_E , наоборот, измерив $\frac{\partial \omega}{\partial a^2}$, можно по сигналу, полученному первым способом (фиг. 4) найти σ_E .

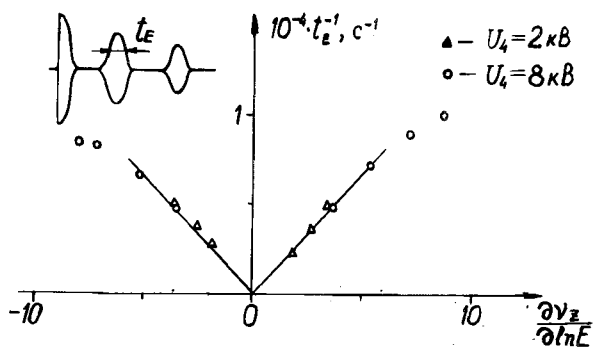
3) так как $\sigma_E \ll v e^{-i\pi}$, то $t_i \ll \tau$ и меньше влияние когерентного взаимодействия пучка с внешними системами на t_i .

Л и т е р а т у р а

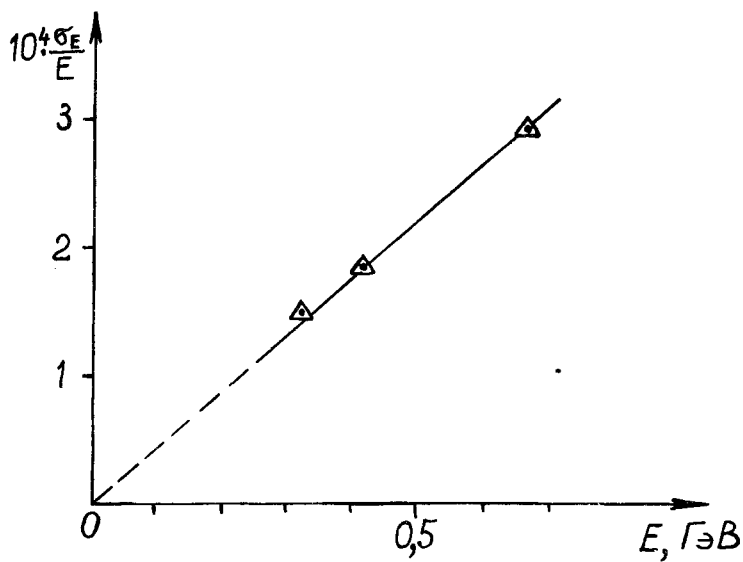
1. Л.Д.Воблый и др. Методы измерения параметров пучка в накопителе ВЭШ-3. Труды третьего Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Москва, 1972 г.
2. *The SPEAR Group. Fast Damping of transverse coherent dipole oscillations in SPEAR. Proc. of the IXth Intern. Conf. on High Energy Accel., SLAC, 1974.*



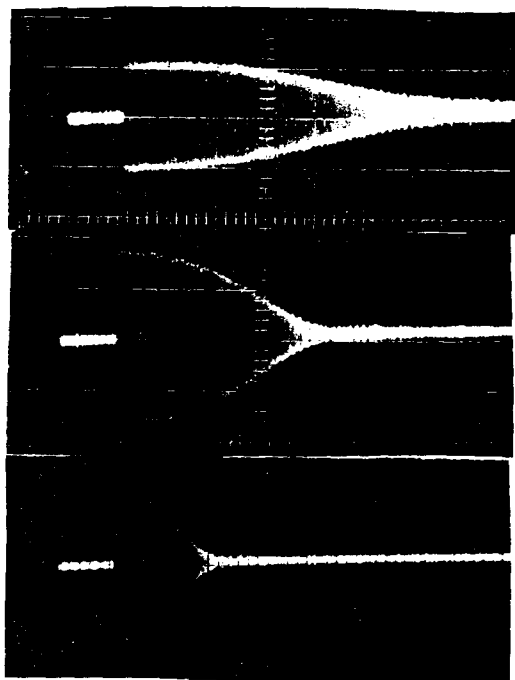
Фиг. I.



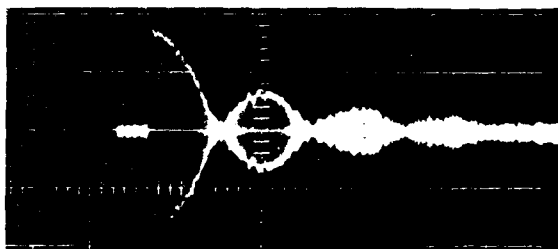
Ф и г . 2 .



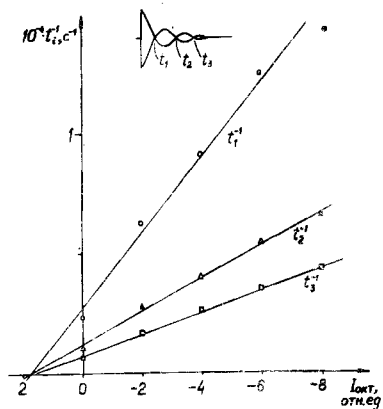
Ф и г . 3 .



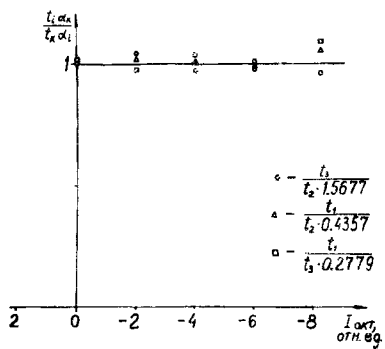
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Ф и Г . 6 .



Ф и Г . 7 .