И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 9

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, О.П.Соболев

СТРУКТУРА СПЕКТРА ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Новосибирск
1976

СТРУКТУРА СПЕКТРА ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, О.П.Соболев

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

Решена задача о структуре стационарного спектра ленгмюровских колебаний, устанавливающегося под влиянием двух противодействующих друг другу факторов: спектральной перекачки колебаний в область малых значений волнового вектора из-за индуцированного рассеяния на ионах плазмы и увеличения волнового вектора за счет неоднородности концентрации плазмы. Стационарный спектр представляет собой узкий пик в $\vec{K}$ -пространстве. Положение пика $\vec{K}_0$ и его ширина Δ связаны с полной энергией колебаний U .

Полученный результат показывает, что неоднородность плазмы препятствует образованию конденсата в точке $\vec{K}=0$ и делает возможным существование стационарного спектра, не подверженного модуляционной неустойчивости.

СТРУКТУРА СПЕКТРА ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЛЕНГМЮРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, О.П.Соболев

АННОТАЦИЯ

Решена задача о структуре стационарного спектра ленгмюровских колебаний, устанавливающегося под влиянием двух противодействующих друг другу факторов: спектральной перекачки колебаний в область малых значений волнового вектора из-за индуцированного рассеяния на ионах плазмы и увеличения волнового вектора за счет неоднородности концентрации плазмы. Стационарный спектр представляет собой узкий пик в $\vec{K}$ -пространстве. Положение пика $\vec{K}_0$ и его ширина Δ связаны с полной энергией колебаний U .

Полученный результат показывает, что неоднородность плазмы препятствует образованию конденсата в точке $\vec{K}=0$ и делает возможным существование стационарного спектра, не подверженного модуляционной неустойчивости.

Постановка задачи и исходные уравнения

Как показывает теория слабой турбулентности, любое начальное распределение ленгмюровских колебаний в пространстве волновых векторов из-за нелинейного взаимодействия волн постепенно "стягивается" в окрестность точки $\vec K = 0$. В однородной плазме этот процесс ведет к нарушению условий применимости приближения слабой турбулентности и к возникновению модуляционной неустойчивости /I/. Если же концентрация плазмы неоднородна, то "стягивание", в принципе, может остановиться до того, как разовьется сильная турбулентность, поскольку имеется конкурирующий эффект – увеличение волнового вектора из-за градиента концентрации. В предлагаемой работе найден спектр ленгмюровских колебаний, устанавливающийся под влиянием этих двух противодействующих друг другу факторов. Основным механизмом нелинейного взаимодействия колебаний считается их индуцированное рассеяние на ионах плазмы.

Формально задача состоит в отыскании стационарного решения кинетического уравнения для спектральной плотности плазмонов $N(\vec K)$

$$\vec V_g \frac{\partial}{\partial \vec r} N(\vec K) - \frac{\partial \omega_p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \vec K} N(\vec K) = N(\vec K) \int A_{\vec K \vec K'} N(\vec K')\, d^3 \vec K' \qquad (I)$$

Здесь ω_p – электронная плазменная частота, $\vec V_g$ – групповая скорость волны. Выражение, стоящее в правой части, описывает процесс индуцированного рассеяния. Нас будут интересовать достаточно длинноволновые колебания

$$\vec K r_D < (m/M)^{1/2} \qquad (2)$$

Для них ядро интеграла $A_{\vec K \vec K'}$, характеризующее вероятность рассеяния, имеет вид (см., например, /2/)

$$A_{\vec K \vec K'} = \frac{3\sqrt{2\pi}}{32} \frac{\omega_p}{mn} \left(\frac{M}{T}\right)^{1/2} \left(\frac{\vec K \vec K'}{K K'}\right)^2 \frac{\vec K'^2 - \vec K^2}{|\vec K' - \vec K|} \qquad (3)$$

(мы считаем плазму изотермической)

Учитывая, что групповая скорость ленгмюровских колебаний мала, можно пренебречь первым слагаемым в левой части равенства (I). Тогда координаты x, y, z войдут в задачу лишь в качестве параметров. В получившемся уравнении удобно перейти к безразмер-

ным переменным. Обозначим через N полное число плазмонов в единице объема ($N \equiv \int N(\vec K) d^3 \vec K$) и выберем в качестве единицы измерения волнового вектора величину

$$\varkappa = \left[\frac{32}{3\sqrt{2\pi}} r_D \left|\frac{\partial}{\partial r} \ln \omega_p\right| \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{m n \omega_p}{N}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

После замены

$$\vec K \longrightarrow \varkappa \vec K$$
$$N(\vec K) \longrightarrow \frac{N}{\varkappa^3} N(\vec K) \qquad (5)$$

исходное уравнение принимает следующий универсальный вид:

$$\vec n \frac{\partial}{\partial \vec K} N(\vec K) = N(\vec K) \int \left(\frac{\vec K \vec K'}{K K'}\right)^2 \frac{\vec K'^2 - \vec K^2}{|\vec K' - \vec K|} N(\vec K')\, d^3 \vec K' \qquad (6)$$

где $\vec n$ – единичный вектор, направленный противоположно градиенту концентрации. Безразмерная функция $N(\vec K)$, очевидно, удовлетворяет условию нормировки

$$\int N(\vec K)\, d^3 \vec K = 1 \qquad (7)$$

Следует иметь в виду, что в области, где функция $N(\vec K)$ достаточно мала, она должна сшиваться со спектром тепловых шумов N_T. Как будет показано ниже, по этой причине решение логарифмически зависит от N_T. Поскольку уровень колебаний существенно выше теплового, логарифм отношения $N(\vec K)/N_T$ является большой величиной и слабо изменяется с изменением $N(\vec K)$ ($\ln(N(\vec K)/N_T) \equiv \Lambda \gg 1$), что заметно упрощает задачу об определении спектра.

Стационарный спектр

Соображения, позволяющие использовать условие $\Lambda \gg 1$ аналогичны высказанным в /3,4/. Тем не менее для связности мы приведем их здесь. Пусть при некотором значении $\vec K = \vec K_T$ спектр колебаний близок к тепловому. Тогда, обозначив интеграл в правой части уравнения (6) через $\Gamma(\vec K)$, можно написать, что

$$N(\vec K) = N_T \exp \int_{(\vec K_T \vec n)}^{(\vec K \vec n)} \Gamma(\vec K)\, d(\vec n \cdot \vec K) \qquad (8)$$

В той области $\vec{K}$ -пространства, где сосредоточены интенсивные колебания, показатель экспоненты имеет максимум. Обозначим точку максимума через $\vec{K}_0$ (из симметрии задачи следует, что вектор $\vec{K}_0$ совпадает по направлению с вектором $\vec{h}$). В точке $\vec{K}=\vec{K}_0$ показатель экспоненты равен Λ , а по мере удаления от нее он уменьшается, убывая вдвое на масштабе порядка K_0 . Функция $N(\vec{K})$ уменьшается при этом в $e^{\Lambda/2}$ раз. Отсюда видно, что полуширина спектра существенно меньше, чем K_0 , т.е. при $\Lambda \gg 1$ все колебания сосредоточены в очень узкой окрестности точки $\vec{K}=\vec{K}_0$.

В области, удаленной от максимума на расстояние, превышающее ширину спектра, справедливо следующее приближенное выражение для нелинейного инкремента $\Gamma(\vec{K})$, входящего в формулу (8)

$$\Gamma(\vec{K}) = \left(\frac{\vec{K}\vec{K}_0}{K K_0}\right)^2 \frac{K_0^2-K^2}{|\vec{K}_0-\vec{K}|} \qquad (9)$$

Отметим, что инкремент положителен внутри сферы $K=K_0$ и отрицателен снаружи.

При распространении волны по неоднородной плазме продольная (по отношению к $\vec{h}$) составляющая её волнового вектора возрастает, а поперечная сохраняется, так что на плоскости $(K_\parallel, K_\perp)$ траектория представляет собой прямую линию (см.рис.I). Двигаясь со стороны отрицательных значений $K_\parallel$, волна вначале проходит область затухания ($\Gamma<0$). Поэтому вплоть до границы сферы $K=K_0$ уровень колебаний близок к тепловому[I)]. Пройдя через границу, волна начинает усиливаться ($\Gamma>0$) и достигает максимального уровня на выходе из сферы, а затем затухает. Из сказанного следует, что сшивка решения с тепловыми шумами должна производиться на сфере $K=K_0$ при отрицательных значениях $K_\parallel$, т.е. нижний предел интегрирования в формуле (8) равен $-(K_0^2-K_\perp^2)^{1/2}$.

Вычислив интеграл, можно привести формулу (8) к следующему виду:

$$\ln\frac{N(\vec{K})}{N_T} = 2K_0^2 - \pi K_0 K_\perp - 2K_0\int N(\vec{K}')|\vec{K}-\vec{K}'|\,d^3\vec{K}' \qquad (I0)$$

Мы ограничились здесь первыми членами разложения по параметру Δ/K_0 , где Δ - ширина спектра колебаний. Вблизи максимума функции $N(\vec{K})$ последние два слагаемых в правой части (I0)

I) В действительности он несколько отличается от теплового из-за того, что имеется затухание Γ ,но это отличие несущественно, поскольку поправочный множитель входит в результат под знаком логарифма.

малы по сравнению с первым, а левая часть равна Λ . Отсюда определяется величина K_0 :

$$K_0 = (\Lambda/2)^{1/2} \qquad (II)$$

Подставим K_0 в члены первого порядка и внесем $2K_0^2$ под знак логарифма, заменив N_T на известную константу N_0 ;

$$\ln\frac{N(\vec{K})}{N_0} = -(2\Lambda)^{1/2}\left[\frac{\pi}{2}K_\perp + \int N(\vec{K}')|\vec{K}-\vec{K}'|\,d^3\vec{K}'\right] \qquad (I2)$$

Константа N_0 должна быть определена из условия нормировки (7). Поскольку уравнение (I2) инвариантно относительно сдвига вдоль направления $\vec{h}$, необходимо ещё потребовать, чтобы максимум колебаний находился в точке $K_\parallel = K_0$.

Уравнение (I2) удается решить только численно (см.ниже) Примечательно, что его аналог, относящийся к одномерному спектру колебаний (волновые векторы параллельны градиенту концентрации)

$$\ln\frac{N(K)}{N_0} = -(2\Lambda)^{1/2}\int N(K')|K-K'|\,dK' \qquad (I3)$$

имеет простое аналитическое решение. В самом деле, дифференцируя обе части равенства (I3) по K , получим:

$$\frac{d^2}{dK^2}\ln N(K) = -2(2\Lambda)^{1/2}N(K) \qquad (I4)$$

Решение с максимумом в точке $K=K_0=\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2}$, удовлетворяющее одномерному условию нормировки

$$\int N(K)\,dK = 1$$

имеет следующий вид:

$$N(K) = \frac{\Lambda^{1/2}}{2^{3/2}}\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2}(K-K_0)\right] \qquad (I5)$$

Подчеркнем, что ширина спектра действительно оказывается малой ($\Delta/K_0 \sim \Lambda^{-1} \ll 1$).

Для численного решения трехмерного уравнения (I2) удобно сделать в нем замену:

$$(2\Lambda)^{1/2}\left(\vec{K}-\vec{K}_0\right) \to \vec{x}$$

а затем воспользоваться следующей итерационной процедурой, автоматически учитывающей условию нормировки:

$$N_{i+1}(\vec{x}) = \frac{\exp-\left[\frac{\pi}{2}x_\perp + \int N_i(\vec{x}\,')|\vec{x}-\vec{x}\,'|\,d^3\vec{x}\,'\right]}{\int d^3\vec{x}\,\exp-\left[\frac{\pi}{2}x_\perp + \int N_i(\vec{x}\,')|\vec{x}-\vec{x}\,'|\,d^3\vec{x}\,'\right]} \qquad (16)$$

В качестве затравочной выбиралась функция

$$N_1(\vec{x}) = \exp-\left(\frac{\pi}{2}x_\perp + \sqrt{x_\parallel^2 + x_\perp^2}\right) \qquad (17)$$

дающая асимптотическое поведение решения на краях спектра. Вычисления производились на ЭВМ БЭСМ-6. Сначала выполнялось усреднение разности $|\vec{x}-\vec{x}\,'|$ по азимутальному углу, а затем вычислялся интеграл по $x_\perp$ и $x_\parallel$ на сетке размером 20х50 шагов. В соответствии с асимптотикой (17) считалось, что $x_\parallel$ и $x_\perp$ изменяются в следующих пределах:

$$|x_\parallel| < 5 \qquad x_\perp < 2$$

Итерации быстро сходятся (различие между 7 и 10 итерациями не превышает 1%). Результат представлен на рисунке 2.

В размерных переменных спектр представляет собой узкий пик в пространстве волновых векторов, расположенный в точке

$$\vec{K}_0 = \vec{n}\,\varkappa\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^{1/2} \qquad (18)$$

где величина $\varkappa$ задается формулой (4). Ширина пика Δ и его амплитуда N_{max} определяются следующими оценками:

$$\Delta \sim \varkappa\,\Lambda^{-\frac{1}{2}}$$
$$N_{max} \sim N\Delta^{-3} \qquad (19)$$

(N - число плазмонов в единице объема).

Обсуждение результатов

Уточним условия применимости найденного решения. Мы подразумевали, что в системе отсутствует модуляционная неустойчивость. Это налагает ограничение сверху на плотность энергии колебаний $U = \omega_p N$ (см./1/):

$$\frac{U}{nT} < \left(r_D\,\Delta\right)^2 \qquad (20)$$

Неравенство (20) удобно переписать, выразив Δ через U и характерный масштаб неоднородности плазмы $L = \left|\frac{\partial}{\partial z}\ln\omega_p\right|^{-1}$ с помощью формул (4), (18), (19):

$$\frac{U}{nT} < \left(\frac{r_D}{\Lambda L}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \qquad (21)$$

Ограничение на плотность энергии снизу связано с тем, что характерное значение волнового вектора не должно превышать одного шага спектральной перекачки при рассеянии колебаний на ионах (см.формулу (2)). Соответствующее условие имеет вид:

$$\frac{U}{nT} > \Lambda\,\frac{r_D}{L}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \qquad (22)$$

Заметим, что если знак неравенства противоположен, то стационарный спектр отсутствует, поскольку в этом случае индуцированное рассеяние колебаний на ионах не может воспрепятствовать увеличению волнового вектора за счет неоднородности (при $k r_D > (m/M)^{\frac{1}{2}}$ инкремент индуцированного рассеяния перестает расти с ростом k).

К приведенным неравенствам надо, вообще говоря, добавить ещё условие применимости приближения геометрической оптики. Однако нетрудно проверить, что оно в рассматриваемом случае выполняется автоматически.

Из требования совместности неравенств (21), (22) следует, что

$$L > r_D\,\Lambda^3\left(\frac{M}{m}\right)^{3/2} \qquad (23)$$

Вместе с неравенством (2I) это условие дает предельное значение энергии колебаний, при котором ещё имеет смысл рассмотренное решение

$$\frac{U_{max}}{nT} \sim \frac{m}{M\lambda^2} \qquad (24)$$

Таким образом, показано, что в неоднородной плазме (при надлежащем выборе пространственного масштаба изменения концентрации) вплоть до энергии, определяемой формулой (24), может существовать стационарный спектр ленгмюровских колебаний, не подверженный модуляционной неустойчивости.

Л и т е р а т у р а

I. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, I59, 767 (I964)

2. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме, Наука, Москва (I967)

3. W.E. Drummond. Phys. Fluids, 5, 1133 (1962)

4. А.А.Иванов, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 5I, I522 (I966)

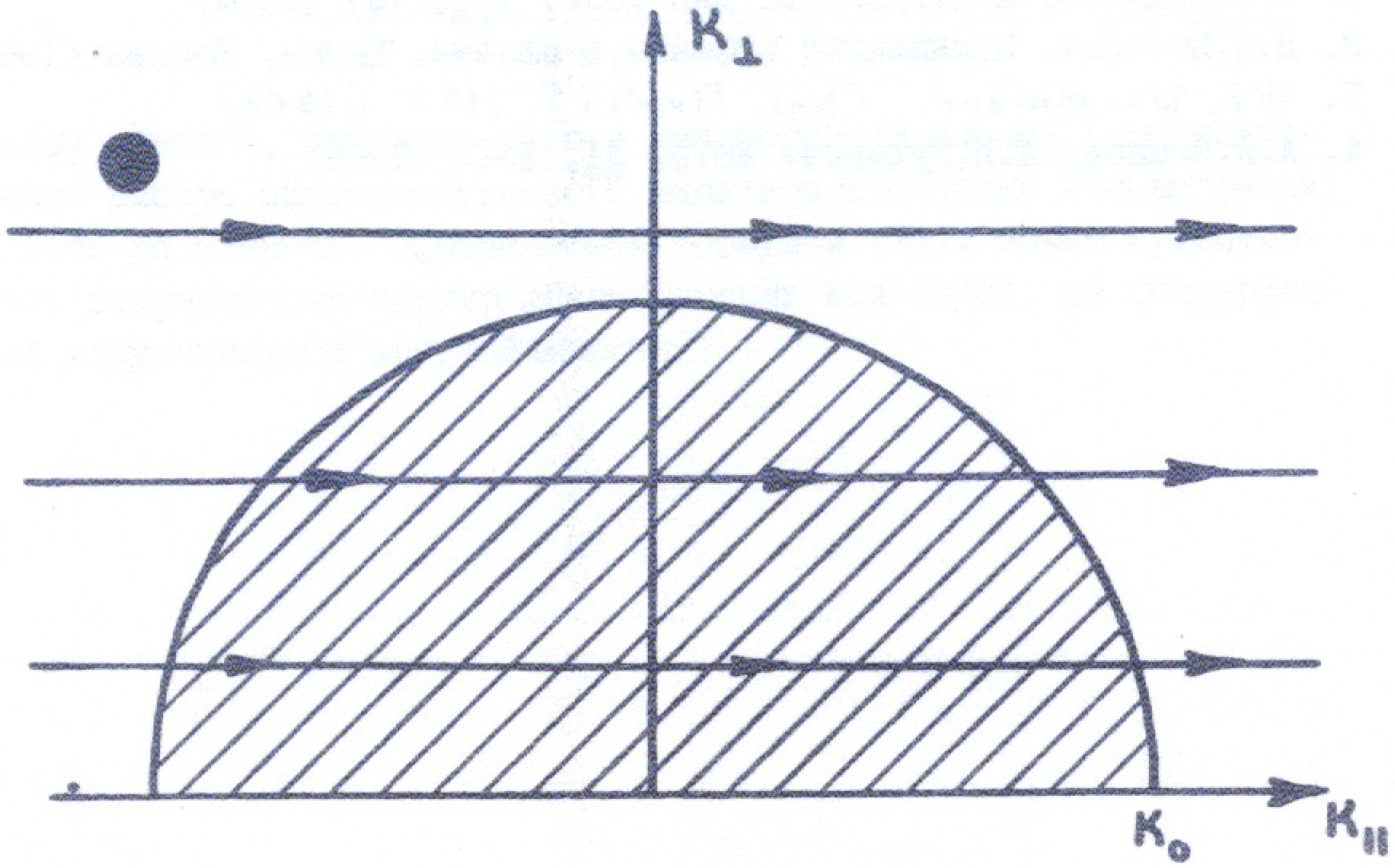

Рис.I. К определению условия сшивки решения . со спектром тепловых шумов. Прямые линии – траектории колебаний с различными значениями $K_\perp$. Стрелками показано направление движения. Заштрихована область нарастания колебаний ($\Gamma > 0$).

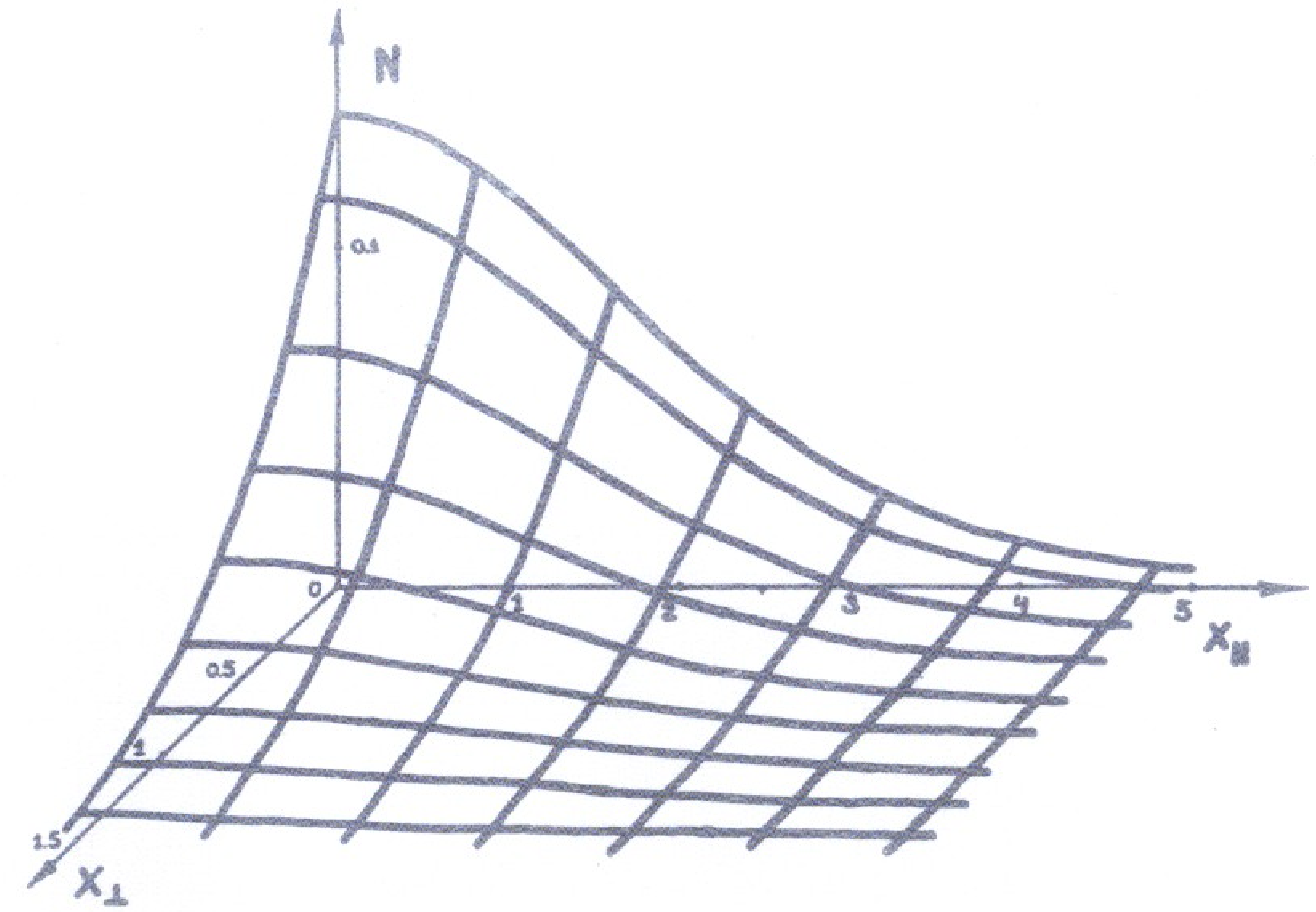

Рис.2. Результат численного решения уравнения (I3).

Работа поступила - 27 октября I975 года

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати I6.I-I976г. МН 026I3
Усл. печ. 0,9 л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 9.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР, бт