

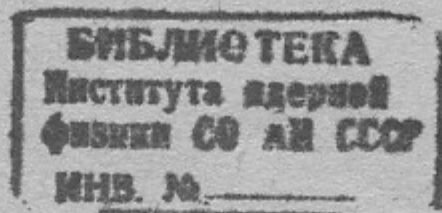
Б.90

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 92**

**А.Д.Букин, Л.М.Курдадзе, Е.В.Пахтусова,  
В.А.Сидоров, А.Г.Хабахпашев, Б.А.Шварц**

**МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПРАВ -  
ДОПОДОБИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ  
МАТРИЦ**



**Новосибирск**

**1977**

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ФУНКЦИЙ ПРАВДОПОДОБИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

А.Д.Букин, Л.М.Курдадзе, Е.В.Пахтусова,  
В.А.Сидоров, А.Г.Хабакпашев, Б.А.Шварц

А Н Н О Т А Ц И Я

В настоящей работе рассмотрены методы разделения частиц высоких энергий по результатам измерения их характеристик совокупностью счетчиков. На примерах, относящихся к случаю разделения электронов и мезонов с помощью счетчика типа "сэндвич", показано, что применение корреляционных матриц и функций правдоподобия позволяет с хорошей достоверностью выделять мезонные события на большом фоне электронных.

I. Определение сорта зарегистрированной частицы является важной и сложной задачей в физике высоких энергий. В некоторых случаях необходимо разделить электроны и мезоны, в других определить тип мезона и т.д. Если нужно сделать выбор из двух возможных вариантов, то статистическая обработка должна дать ответ на следующий вопрос. В эксперименте зарегистрировано  $N$  частиц, принадлежащих к сорту  $A$  или  $B$ . Сколько частиц каждого сорта зарегистрировано и какова точность определения величин, т.е. необходимо найти  $N_A \pm \Delta N_A$  и  $N_B \pm \Delta N_B$ . Иногда возникает дополнительная задача отобрать частицы одного сорта при каком-то допустимом уровне примеси частиц другого сорта.

Разделение частиц должно основываться на результатах измерения различных параметров, связанных с регистрацией частицы с помощью детекторов. Такими параметрами могут быть амплитуды импульсов в сцинтилляционных счетчиках или пропорциональных камерах, пробег частицы, время пролета, углы многократного рассеяния и ряд других. Для определения сорта частицы может быть использован также характер ее взаимодействия с веществом (образование ливня для электрона, ядерное поглощение для адронов и т.д.).

Для повышения надежности определения сорта частицы следует использовать все имеющиеся данные. Поэтому целесообразно ввести обобщенный параметр разделения, оптимальным образом учитывающий все измеренные параметры частицы. В ряде работ для этой цели использовались различные критерии, в том числе и отношение функций правдоподобия [1,2]. В теории вероятности это отношение называется критерием Неймана-Пирсона и доказывается, что этот критерий является наиболее мощным при решении задачи о выборе из двух возможных вариантов. В настоящей работе рассматриваются методы разделения частиц с помощью отношения функций правдоподобия и обсуждаются вопросы, связанные с практическим использованием этих методов.

Если параметры, измеряемые детекторами, статистически независимы, то функции правдоподобия представляют собой произведения функций распределения для каждого параметра. В этом случае отношение функций правдоподобия

$$K = \ln \frac{F}{\Phi} = \ln \frac{f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots}{\varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdot \dots} \quad (I)$$

где  $F$  — функция правдоподобия для частицы сорта  $A$ ,  $f_i(x_i)$  — функций распределения по параметру  $X_i$  для частицы сорта  $A$  в первом детекторе,  $\Phi$  и  $\varphi$  то же для частиц сорта  $B$ .

Если функции распределения известны, то для каждой зарегистрированной частицы по результатам измерения параметров  $X_1, X_2, \dots$  можно вычислить значение обобщенного параметра разделения  $K$ . Для большинства частиц сорта  $A$  обобщенный параметр  $K > 0$ . Большинство частиц сорта  $B$  имеет  $K < 0$ .

Для получения ответа на поставленный выше вопрос необходимо также знать вид функций распределения  $p(k)$  и  $q(k)$  для частиц сорта  $A$  и  $B$  по обобщенному параметру разделения  $K$ . Вид этих функций, так же как и функций распределения детекторов  $f_i(x_i)$  и  $\varphi_i(x_i)$  может быть определен экспериментально с помощью чистых пучков частиц сорта  $A$  и сорта  $B$ . Точность измерения функций будет определяться статистическими ошибками.

В ряде случаев вид функций  $f$  и  $\varphi$  может быть получен теоретически с помощью известных законов взаимодействия исследуемых частиц с веществом. Тогда распределения  $p(k)$  и  $q(k)$  могут быть легко вычислены методом Монте-Карло.

В некоторых экспериментах одновременно рождаются пары частиц одного сорта (например, коллинеарные события  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-$  и др. в экспериментах на встречных пучках). В этом случае функции распределения  $p$  и  $q$  могут быть определены с помощью корреляционных матриц. Этот метод будет рассмотрен ниже.

2. Вид функций распределения  $p$  и  $q$  для электронов и мезонов, вычисленный для счетчика типа "сэндвич", показан на рис. I. Здесь же приведено измеренное в эксперименте распределение событий  $n(k)$  по параметру разделения  $K$ . Измерение проводилось с пучком, содержащим электроны и мюоны в соотношении 10:1. Функции распределения нормированы следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} p dk = \int_{-\infty}^{\infty} q dk = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} n dk = N$$

где  $N$  — полное число зарегистрированных событий.

Для определения числа мюонов и электронов, зарегистрированных в эксперименте, необходимо выбрать пороговое значение параметра  $K_0$  и определить число событий  $N_n$  и  $N_\mu$ , у которых значения параметра разделения соответственно  $K > K_0$  и  $K < K_0$ .

$$N_n = \int_{K_0}^{\infty} n dk; \quad N_\mu = \int_{-\infty}^{K_0} n dk$$

Пороговое значение целесообразно выбрать в области, где  $p(k) \approx q(k)$ . Число зарегистрированных мюонов определяется соотношением

$$N_\mu = \frac{N_n \epsilon_e - N_n (1 - \epsilon_e)}{\epsilon_\mu - (1 - \epsilon_e)} \quad (2)$$

где

$$\epsilon_e = \int_{K_0}^{\infty} p dk \quad \text{и} \quad \epsilon_\mu = \int_{-\infty}^{K_0} q dk$$

Точность результата, полученного с помощью формулы (2) зависит от ошибки, с которой вычисляется обобщенный параметр,  $K$ , и ошибок в определении распределения электронов и мюонов по этому параметру.

Если распределения  $p$  и  $q$  измерены в эксперименте с высокой точностью, то ошибка определения числа зарегистрированных мюонов будет определяться только статистикой и степенью перекрытия распределений. В этом случае из формулы (2) можно получить

$$\Delta N = \frac{\sqrt{N_n \epsilon_e^2 + N_n (1 - \epsilon_e)^2}}{|\epsilon_\mu - (1 - \epsilon_e)|} \quad (3)$$

В тех случаях, когда амплитудные функции распределения  $f_i$  и  $\varphi_i$  известны с плохой точностью, параметр разделения  $K$  для каждого события будет вычислен с ошибкой. Это приведет к увеличению степени перекрытия функций распределения  $p$  и  $q$  и уменьшению величин  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_\mu$ . Выражение (3) учитывает эти ошибки. Если неправильно измерены сами функции  $p$  и  $q$ , то ошибку

нельзя определять по формуле (3).

Для мало перекрывающихся функций  $p$  и  $q$  величины  $\epsilon_e \approx 1$  и  $\epsilon_\mu \approx 1$ . Если, кроме того, число зарегистрированных электронов не превосходит во много раз число мюонов, то выражение (3) принимает привычный вид

$$\Delta N_\mu \approx \sqrt{N_\mu}$$

Аналогичные формулы могут быть написаны для электронов.

Соответствующий выбор порогового значения параметра разделения  $K_0$  позволяет также отобрать события одного сорта при определенном допустимом уровне примеси событий другого сорта.

3. Рассмотрим подробнее свойства параметра разделения и методы определения функции распределения по параметру разделения. Для этого введем количественные характеристики, описывающие эффективность разделения частиц. Разделение связано с видом распределений  $p$  и  $q$ . Степень перекрытия этих функций можно охарактеризовать коэффициентом, который мы будем называть эффективностью разделения. Для его определения необходимо выбрать такое пороговое значение параметра разделения  $K_0$ , при котором  $\epsilon_\mu = \epsilon_e = \epsilon$ . Эффективность разделения  $\epsilon$  может меняться от значения 1 (полное разделение), до значения 0.5, при котором частицы с помощью этого обобщенного параметра не разделяются.

Другой полезной количественной характеристикой разделения является условная эффективность. Для ее определения пороговое значение параметра разделения  $K_0$  должно быть выбрано так, чтобы ограничить на заданном уровне примесь частиц другого сорта. Например, условная эффективность отбора мюонов при ограничении примеси электронов на уровне 1% определяется соотношением

$$\epsilon_\mu(0.01) = \int_{-\infty}^{K_0} q dk$$

где  $K_0$  находится из равенства  $\int_{-\infty}^{K_0} p dk = 0.01$ .

Для определенности свойства обобщенного параметра разделения будем рассматривать на примере счетчика типа "сэндвич",

предназначенного для разделения мюонов и электронов. Сэндвич состоит из четырех сцинтилляционных счетчиков  $100 \times 40 \times 1$  см, разделенных свинцовыми пластинами толщиной в одну радиационную единицу. Толщина свинца перед первым счетчиком составляет полторы радиационные единицы. Все экспериментальные результаты, которые будут приводиться ниже (за исключением специально оговоренных случаев), были получены на таком сэндвиче с помощью пучка электронов с энергией 500 МэВ и пучка мюонов, который имитировался жесткой частью космического излучения. Углы наклона пучков к плоскости счетчика не превышали  $15^\circ$ . Точность полученных результатов составляет  $\sim 10\%$  для величин  $1-\epsilon$  и  $1-\epsilon_\mu$ .

Отношение функций правдоподобия является наиболее сильным обобщенным параметром разделения. Для сравнения можно рассмотреть результаты, полученные при разделении мюонов и электронов с помощью обобщенного параметра  $K$  и при использовании в качестве параметра разделения суммы амплитуд во всех счетчиках сэндвича. В таблице I приведены полученные значения условной эффективности регистрации мезонов при двух уровнях ограничения примеси электронов. Преимущества параметра  $K$  здесь очевидны.

Таблица I

	$\epsilon, \%$	$\epsilon_\mu(0.01), \%$	$\epsilon_\mu(0.05), \%$
Разделение по параметру $K$	97.9	96.8	98.4
Разделение по сумме амплитуд	96.0	74.1	96.6

Разделение существенно зависит от свойств детекторов или иными словами от степени перекрытия функций распределения  $f_e(x)$  и  $f_\mu(x)$ . Однако даже плохо разделяющиеся функции в случае большого числа параметров измерения дают хорошее разделение частиц. На рис. 2 показаны амплитудные функции распределения в первом счетчике сэндвича для электронов и мюонов с энергией 500 МэВ. Зависимость эффективности разделения от числа счетчиков, включенных в сэндвич, приведена в таблице 2.

Таблица 2.

Число счетчиков	3	4	6
Эффективность разделения $\epsilon$ , %	96.5	97.9	98.9
Условная эффективность отбора мюонов $\epsilon_{\mu}(0.01)$ , %	91.5	96.8	98.8

Эти результаты, полученные расчетным путем, показывают, что сэндвич из четырех счетчиков позволяет получить хорошую эффективность разделения и обладает достаточно высокой эффективностью выделения мюонов на фоне электронов.

Следует отметить, что разделительные способности сэндвича могут быть существенно улучшены путем включения в функции правдоподобия дополнительных измеряемых в эксперименте параметров, и, следовательно, в обобщенный параметр разделения. Так в обобщенный параметр могут быть включены результаты измерения времени пролета частиц, ионизационных потерь в счетчиках, расположенных перед свинцовыми конверторами, и др. Несмотря на малое различие амплитудных и временных функций распределения для электронов и мюонов учет при обработке этих дополнительных параметров может дать значительный выигрыш.

Если необходимо произвести разделение частиц для событий, включающих две частицы одного сорта (например, рождение коллинеарных пар на встречных пучках), то обобщенный параметр разделения должен включать все результаты измерения для каждой частицы. Тогда  $K = K_1 + K_2$ , где  $K_1$  и  $K_2$  параметры разделения для первой и второй частиц. При этом эффективность разделения детектора значительно улучшается. Так для сэндвича при разделении пар электронов и мюонов условная эффективность отбора мюонов при допустимом уровне примеси электронов 1% и 0.01% составляет соответственно 99.9 и 95.8%.

Как указывалось выше, неточное знание функций  $f$  и  $\varphi$  приводит к увеличению степени перекрытия функций  $p$  и  $q$  и ухудшению разделения. Для проверки зависимости степени разделения от ошибок в амплитудных функциях распределения электронов и мю-

оны, зарегистрированные в эксперименте, разделялись при разных искажениях  $\psi_i(x_i)$ . Искажения вносились в функции распределения для мюонов путем изменения ширины распределения на полувысоте  $\Delta U$  и изменения наиболее вероятной амплитуды импульсов  $U$  от мюонов в счетчиках. Результаты такой обработки, приведенные в таблице 3, показывают, что в данном случае только значительные искажения в величине наиболее вероятной амплитуды приводят к заметному ухудшению разделения.

Таблица 3

$U/U_0$	I	I	I	0.7	I.2	I.5
$\Delta U/\Delta U_0$	I	0.5	2	I	I	I
$(1-\epsilon)$ %	2.4	2.6	2.4	3.2	3.4	19.7

Искажения в функции распределения для электронов, естественно, сказываются на результатах значительно слабее, т.к. электронные распределения имеют значительно большую относительную ширину и меньше сказываются на значении обобщенного параметра (рис. 2).

В тех случаях, когда функции распределения для одного сорта частиц известны с плохой точностью, может оказаться целесообразным обобщенный параметр брать в виде  $K = \ln F$ , где  $F$  — функция правдоподобия для частицы с хорошо известными распределениями  $f_i(x_i)$ . Если, кроме того, функции  $f_i(x_i)$  имеют значительно меньшую относительную ширину, то это приведет лишь к незначительному ухудшению разделения. В таблице 4 приведены результаты, которые были получены при обработке экспериментальных данных с помощью мезонной функции правдоподобия.

Таблица 4

Обобщенный параметр	$K = \ln F/\Phi$	$K = \ln \Phi$
Эффективность разделения $\epsilon$ , %	97,9	97,7
Условная эффективность отбора мюонов $\epsilon_{\mu}(0,01)$ , %	96,8	95,8

Амплитудные распределения в сцинтилляционных пластинах "сэндвича" для электронов  $f_i(x_i)$  зависят от энергии частиц.

Поэтому разделение также будет зависеть от энергии. В таблице 5 показана зависимость разделения мюонов и электронов от энергии частиц для счетчика типа "сэндвич".

Таблица 5

Энергия (МэВ)	200	300	500	700	2000
$\epsilon, \%$	95.6	95.1(94.4)	97.9(98.0)	(99.0)	(> 99.9)
$\epsilon_{\mu}(0.01)\%$	90.4	88.5(73.9)	96.8(96.6)	(99.0)	(> 99.9)

Значения эффективности разделения, приведенные в скобках, были получены расчетным путем и точность их примерно такая же, как и точность экспериментальных данных, т.е. величины  $(1 - \epsilon)$  и  $(1 - \epsilon_{\mu})$  определены с ошибкой  $\sim 10\%$ . Данные для энергий 700 и 2000 МэВ были получены только расчетным путем.

4. Обобщенный параметр К был введен для случая, когда все параметры, измеряемые детекторами, статистически независимы и функция правдоподобия может быть записана как произведение плотностей вероятности для каждого детектора (I). Если с помощью сэндвича анализируются частицы, имеющие определенное распределение по энергиям или углам, и энергия и угол падения каждой зарегистрированной частицы не учитываются при обработке, то это приведет к нарушению статистической независимости. Во многих случаях таким нарушением можно пренебречь, в других даже приближенный учет таких особенностей при обработке дает вполне удовлетворительные результаты. Ниже приводится пример влияния углового распределения частиц на разделение в счетчике "сэндвич". Электроны и мюоны имели равномерное угловое распределение с максимальным углом наклона трека  $45^{\circ}$ . В таблице 6 приводятся результаты, полученные в двух случаях: а - при обработке экспериментальных данных угловое распределение частиц не учитывается, б - производится приближенный учет угла падения путем изменения значения наиболее вероятной амплитуды импульсов от мюонов. Здесь же для сравнения приведены результаты, полученные с пучками, падающими на счетчик под прямым углом (в).

Таблица 6.

	а	б	в
Эффективность разделения $\epsilon, \%$	96.7	97.2	97.9
Условная эффективность отбора для мюонов $\epsilon_{\mu}(0.01), \%$	92.3	96.6	96.8

Как видно из этих данных, приближенный учет углов в мюонных амплитудных измерениях позволяет получить вполне хорошие результаты.

Взаимодействия заряженных частиц с веществом, результаты которых сказываются на измерениях параметров частиц больше, чем в одном сцинтилляторе, также нарушают статистическую независимость. Нарушением статистической независимости, связанным с образованием дельта-электронов большой энергии в большинстве случаев можно пренебречь. При регистрации электронно-фотонных линий условие статистической независимости можно считать выполненным, если толщина радиатора между сцинтилляторами составляет не менее 1-1,5 радиационных длин. При регистрации пионов и каонов условие статистической независимости сильно нарушается из-за ядерных взаимодействий и это должно учитываться функцией правдоподобия.

Если в каждом слое поглотителя вероятность неупругого взаимодействия частицы с ядром  $\lambda$ , то функция правдоподобия должна быть записана в виде:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \Phi_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda(1-\lambda)\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2, \dots, x_n) + \lambda(1-\lambda)^2\Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_3(x_3, \dots, x_n) + \dots + (1-\lambda)^n\Phi_1(x_1)\dots\Phi_n(x_n)$$

где  $\Phi_i(x_i, x_{i-1}, \dots, x_n)$  - совместная функция плотности вероятности для амплитуд  $x_i, \dots, x_n$  в счетчиках  $i, \dots, n$ , если взаимодействие произошло в  $i$ -том слое поглотителя;  $\Phi_i(x_i)$  - как и прежде плотность вероятности в  $i$ -ом сцинтилляторе.

Для учета влияния ядерного взаимодействия  $\pi$ -мезона в сэндвиче в первом приближении все процессы можно разделить на три группы: а) - поглощение, в результате которого вторичные частицы не выходят из поглотителя; б) - процессы, в результате которых вылетают быстрые вторичные частицы; в) - перезарядка - образование одного или нескольких  $\pi^0$ -мезонов, распадающихся на  $\gamma$ -кванты.

Грубо можно считать, что если взаимодействие произошло в  $i$ -ом слое, то в случае процесса "а" для детекторов с  $j \geq i$ ,  $x_j = 0$ ; для процесса "б" амплитудные распределения для последу-

ющих счетчиков не меняются; для процесса "в" амплитудные распределения для счетчиков с  $j \geq i$  становятся такими же, как для электронов. С этими предположениями функция правдоподобия для  $\pi$  - мезонов в счетчике сэндвич будет иметь вид:

$$\Phi(x_1, \dots, x_4) = \lambda \delta(x_1) \dots \delta(x_4) + \epsilon f_1(x_1) \dots f_4(x_4) + \lambda(1-\lambda-\epsilon) \varphi_1(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_4) + \epsilon(1-\lambda-\epsilon) \varphi_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_4(x_4) + \dots + (1-\lambda-\epsilon)^4 \varphi_1(x_1) \dots \varphi_4(x_4), \quad (4)$$

где  $\lambda$  - вероятность поглощения,  $\epsilon$  - вероятность перезарядки,  $\delta(x) = 1$  если  $x=0$  и  $\delta(x) = 0$  если  $x \neq 0$ .

Для проверки влияния неупругих взаимодействий пионов на разделение частиц методом Монте-Карло моделировались электронные и пионные события с учетом поглощения и перезарядки. Вероятности поглощения и перезарядки были взяты соответственно равными 0,8 и 0,2 от полной вероятности неупругого взаимодействия или в абсолютных значениях  $\lambda = 0,04$  и  $\epsilon = 0,01$  для поглотителя из свинца толщиной в одну радиационную единицу. Так как представляет интерес влияние на разделение каждого из процессов в отдельности, то было получено два массива "событий", один из которых моделировался с учетом поглощения пионов, а второй - с учетом перезарядки. События разделялись затем с помощью обобщенного параметра  $K$ . Функция правдоподобия для пионов была взята в виде, учитывающем поглощение для первого массива и перезарядку для второго. Результаты разделения приведены в таблице 7. Здесь же для сравнения приведены результаты, полученные при обработке того же массива с помощью функций правдоподобия, не учитывающей неупругие взаимодействия пионов.

Приведенные результаты показывают, что процесс поглощения пионов не сказывается на разделении пионов и электронов с помощью обобщенного параметра, если функция правдоподобия учитывает поглощение. Перезарядка пионов, как и следовало ожидать, ухудшает разделение даже при соответствующем учете этого процесса.

5. Разделение частиц с помощью корреляционных матриц <sup>\*)</sup> яв-

<sup>\*)</sup> Метод корреляционных матриц, предложенный В.А.Сидоровым в 1967 г. использовался для разделения частиц в первых экспериментах на встречных пучках. [3, 4]

Таблица 7

Моделирование и обработка	$(1-\epsilon), \%$	$\epsilon_n(0.01), \%$	$\epsilon_n(0.05), \%$
1. При моделировании и обработке учитывается поглощение	1.9	96.3	99.3
2. Тот же массив событий обрабатывается без учета поглощения	15.7	81.9	83.7
3. При моделировании и обработке учитывается перезарядка	3.3	92.5	97.2
4. Тот же массив событий обрабатывается без учета перезарядки	3.6	92.2	97.2
5. Разделение мюонов и электронов	1.7	96.4	99.6

ляется весьма мощным методом, позволяющим надежно разделять частицы даже тогда, когда нет возможности провести калибровочные эксперименты или точные расчеты функций распределения. Метод применим в тех случаях, когда в эксперименте с помощью двух или нескольких детекторов регистрируются события, включающие в себя две или несколько частиц одного сорта. Рассмотрим корреляционный метод на примере разделения пар электронов и мюонов с помощью счетчика типа "сэндвич". При регистрации пары частиц измеряются амплитуды импульсов и вычисляются параметры разделения  $K_1$  и  $K_2$  для каждой из зарегистрированных частиц. Область возможных значений параметра  $K$  разбивается на  $m$  интервалов. Тогда все зарегистрированные в эксперименте события заполнят  $m$  - мерную матрицу, в которой номер строки определяется значением параметра  $K_1$ , а номер столбца -  $K_2$ . Количество событий, попадающих в каждую клетку матрицы определяется соотношением

$$N_{ij} = N_e P_i P_j + N_\mu Q_i Q_j \quad (5)$$

где  $P_i P_j$  - вероятность, что первый электрон имеет значение параметра  $K_1$ , соответствующее  $i$  - му интервалу, а второй - значение  $K_2$ , соответствующее  $j$  - му интервалу.  $Q_i Q_j$  - то же для мюонов. Очевидно, что матрица симметричная, поэтому всего можно написать  $m(m+1)/2$  уравнений с  $2m$  неизвестными ( $N_e, N_\mu$  и  $(m-1)$  значений  $Q_i$  и  $P_i$ ). По одному зна-



чению  $P$  и  $Q$  может быть определено из условий нормировки  $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n Q_i = 1$  ).

При "бесконечной статистике" система уравнений (5) может быть решена и найдено число электронных и мюонных пар  $N_e$  и  $N_\mu$ , зарегистрированных в эксперименте. При конечной статистике число событий в каждой клетке матрицы распределено по закону Пуассона, метод непосредственного решения системы уравнений (5) неприменим. В этом случае наилучшим методом оценки параметров является метод максимального правдоподобия, который позволяет найти как значение любого параметра ( $N_e, N_\mu, P_i, Q_i$ ), так и ошибку для каждого из них. Ошибки будут определяться статистикой числа зарегистрированных событий и степенью перекрытия функций распределения  $p(k)$  и  $q(k)$  по выбранному параметру разделения (см. п. 6).

Приведенные выше рассуждения справедливы только в том случае, если система уравнений (5) не вырождена и имеет единственное решение. Уравнения будут не вырождены, если при разбивке области значений параметра можно выделить такие два интервала  $i$  и  $j$ , для которых

$$P_i = 0, Q_i \neq 0, \text{ и } P_j \neq 0, Q_j = 0 \quad (6)$$

Пример функций распределения  $p(k)$  и  $q(k)$ , которые удовлетворяют указанному условию, приведен на рис. 3.

В общем случае система уравнений (5) вырождена. Это можно показать следующим образом. Введем более удобные независимые переменные  $A_i = \sqrt{N_e} P_i, B_i = \sqrt{N_\mu} Q_i$ . Тогда система (5) переписывается в следующем виде:

$$N_{ij} = A_i A_j + B_i B_j \quad (7)$$

Допустим, что существует одно решение системы (7)  $A_i, B_i$ . Тогда набор величин  $A_i$  и  $B_i$ , полученных с помощью преобразования

$$A_i = A_i^0 \cos \theta + B_i^0 \sin \theta$$

$$B_i = B_i^0 \cos \theta + A_i^0 \sin \theta$$

также является решением системы (7). Здесь  $\theta$  - параметр, ко-

торый должен быть выбран из условия неотрицательности вероятности  $A_i \geq 0, B_i \geq 0$ . Это условие для параметра  $\theta$  может быть записано в следующем виде

$$-\min_{i=1..n} \frac{A_i^0}{B_i^0} = -\operatorname{tg} \theta_1 \leq \operatorname{tg} \theta \leq \operatorname{tg} \theta_2 = \min \frac{B_i^0}{A_i^0}$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием единственности решения  $A_i, B_i$  является равенство  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Последнее совпадает с условием (6).

В общем случае, получив одно решение  $A_i, B_i$  можно написать нижнюю и верхнюю границы для количества событий каждого сорта, зарегистрированных в эксперименте.

$$N_e \left[ 1 + (N_\mu - N_e) \sin^2 \theta_1 - \sqrt{\frac{N_\mu}{N_e}} \sin 2\theta_1 \right] \leq N_e' \leq N_e \left[ 1 + (N_\mu - N_e) \sin^2 \theta_2 + \sqrt{\frac{N_\mu}{N_e}} \sin 2\theta_2 \right]$$

Аналогичное соотношение может быть получено для количества мюонов  $N_\mu'$ .

Как указывалось выше при практическом решении задачи с конечной статистикой для оценки параметров необходимо использовать метод максимального правдоподобия. Для вырожденной системы уравнений график функции правдоподобия по любому параметру будет иметь вид, показанный на рис. 4. Горизонтальный участок функции является выражением неоднозначности решения. Ошибка оценки параметра определяется, как обычно, на уровне  $+0.5$  от минимума функции правдоподобия. Ошибка складывается из статистической ошибки и принципиальной ошибки метода корреляционной матрицы, равной ширине горизонтального участка функции правдоподобия.

При увеличении числа интервалов, на которое разбивается область значений  $K$ , точность корреляционного метода возрастает и стремится к некоторому пределу. При этом быстро возрастает время, необходимое на численное решение задачи на ЭВМ. Практически целесообразно разбивать область на 5-7 интервалов и, следовательно, оптимизировать 10-14 свободных параметров.

Следует отметить, что в методе корреляционной матрицы для нахождения числа событий каждого сорта так же определяются функции распределения  $p(k)$  и  $q(k)$ , однако, в данном случае непрерывная функция заменяется ступенчатой, которая описывается на-

бором значений вероятностей  $Q_i$  и  $Q_i$ .

В матричном методе естественно может быть использован любой непрерывный или дискретный параметр разделения, но лучшие результаты дает обобщенный параметр  $K$ .

6. В качестве примера разделения частиц с помощью функций правдоподобия рассмотрим результаты обработки коллинеарных событий, зарегистрированных на установке ВЭПП-2М при энергии  $2 \times 500$  МэВ [5]. Система регистрации, включающая в себя счетчики типа "СЭНДВИЧ", выделяет три коллинеарных процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ,  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ . В эксперименте было зарегистрировано  $N = 24395$  событий, принадлежащих к этим процессам. Пионы и мюоны отделялись от электронов тремя способами:

а) По известным из эксперимента амплитудным функциям распределения для электронов  $f_i(x)$  и мезонов  $\varphi_i(x)$  вычислялись обобщенный параметр  $K$  для каждого события и распределения событий по этому параметру  $p(K)$  и  $q(K)$ . Функция правдоподобия для мезонов была взята в виде  $\frac{1}{2}(\varphi_\mu + \varphi_\pi)$ , где  $\varphi_\mu$  и  $\varphi_\pi$  определялись из (1) и (4). Это выражение справедливо для случая, когда  $N_\mu/N_\pi = 1$ , однако результаты разделения слабо зависят от этого отношения. Число мезонов и ошибка определялись по формулам (2) и (3).

б) Для каждого события вычислялись два обобщенных параметра для первой и второй частицы  $K_1$  и  $K_2$ . Разделение проводилось с помощью корреляционной матрицы.

в) В корреляционной матрице в качестве параметра разделения использовалась сумма амплитуд в сцинтилляционных счетчиках сэндвича. Результаты разделения этими тремя способами приведены в таблице 8.

Таблица 8

Метод разделения	$N_\mu$	$N_e$
а	$2284 \pm 49$	$22108 \pm 149$
б	$2403 \mp 97$	$21981 \mp 197$
в	$2680 \mp 470$	$21714 \mp 616$

Данные, приведенные в таблице, показывают, что первые два метода дают близкие результаты. Вместе с тем следует отметить, что корреляционная матрица в данном случае предпочтительней, т.к. результат, полученный этим методом, учитывает все неточности, связанные с определением функций распределения  $f_i(x_i)$  и  $\varphi_i(x_i)$ . Использование в качестве параметра разделения суммы амплитуд значительно ухудшает разделение и увеличивает ошибку.

Строго говоря, в методе корреляционной матрицы из-за неупругого взаимодействия пионов нельзя рождение пар пионов и мюонов рассматривать как один процесс. Однако математическое моделирование показало, что ошибка, связанная с различием свойств мезонов в данном случае значительно меньше ошибки разделения, связанной со статистикой и перекрытием функций  $p(K)$  и  $q(K)$ .

На рис. 5 показано распределение тех же мезонных и электронных пар по параметрам  $K_1$  и  $K_2$ . Мезоны хорошо выделены в области отрицательных значений  $K$ . Две группы событий с  $K \sim 40$  связаны с электронами, у которых промежуточные сцинтилляторы дают нулевую амплитуду (для таких событий мезонная функция правдоподобия очень мала и  $K$  велико).

Изложенный выше метод разделения частиц с помощью функций правдоподобия, так же как и метод корреляционной матрицы, может быть обобщен на случай разделения 3-х и большего числа типов событий. Однако в этом случае практическое решение задачи делается слишком громоздким.

Л и т е р а т у р а

1. R.Murthy, G.Demeester, Nucl.Instr. Meth 56, 93 (1967).
2. Z.Dimcovski, J.Favier et all. Nucl. Inss. Meth 94, 151 (1971).
3. В.Л.Ауслендер, Г.И.Будкер и др. Phys. Lett. 25B, 433 (1967).
4. В.Л.Ауслендер, Г.И.Будкер и др., Ядерная физика. 9, II4, (1969).
5. А.Д.Букин, А.М.Курдадзе и др., " $\Phi$ -мезон: Прецизионное измерение массы, наблюдение  $\omega$ - $\Phi$  интерференции", направлено в журнал "Ядерная Физика".

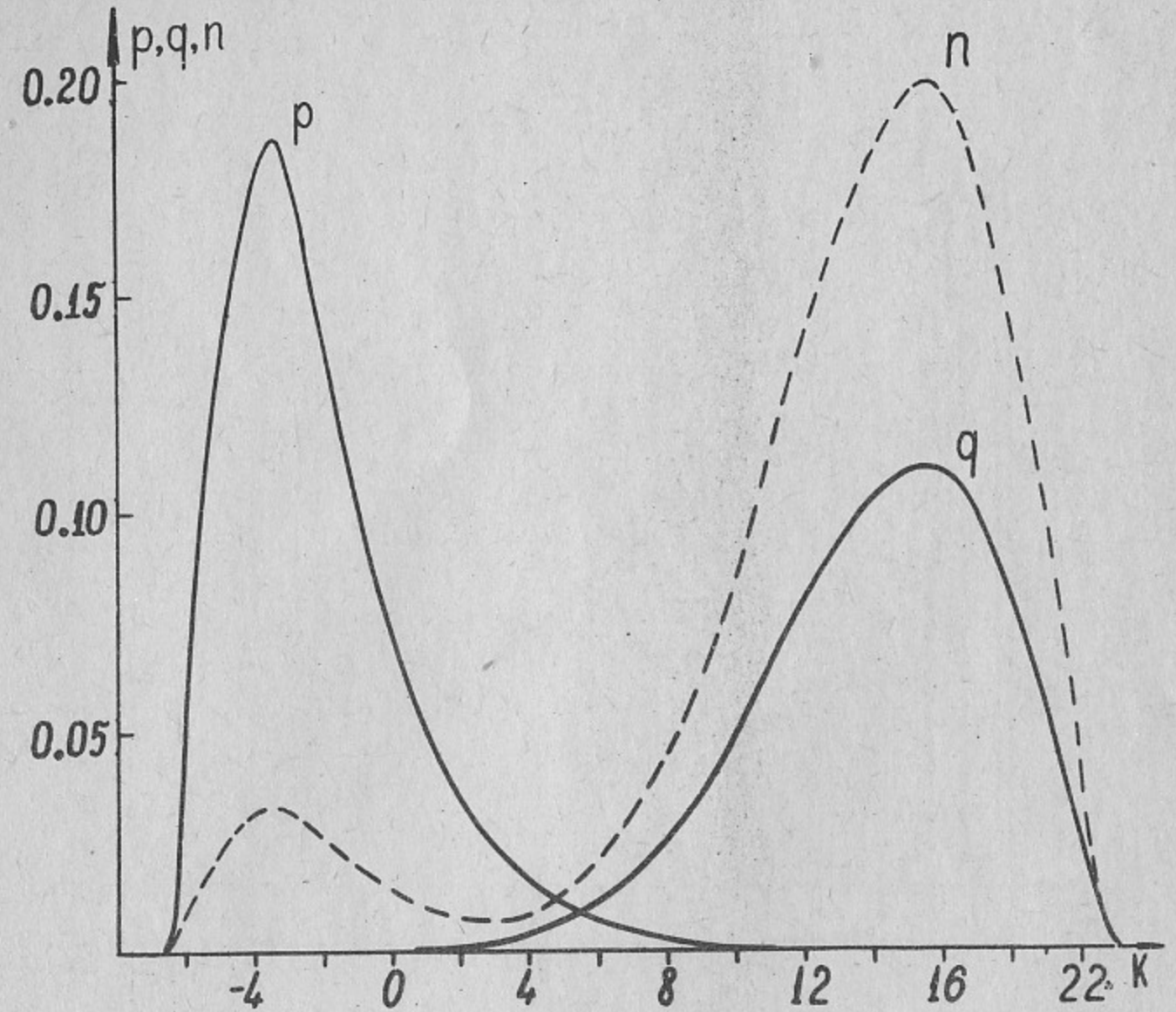


Рис. I.

Вид функций распределения  $p(k)$  и  $q(k)$  для электронов и мезонов. Пунктиром показано измеренное в эксперименте распределение по параметру  $K$ , в относительных единицах.

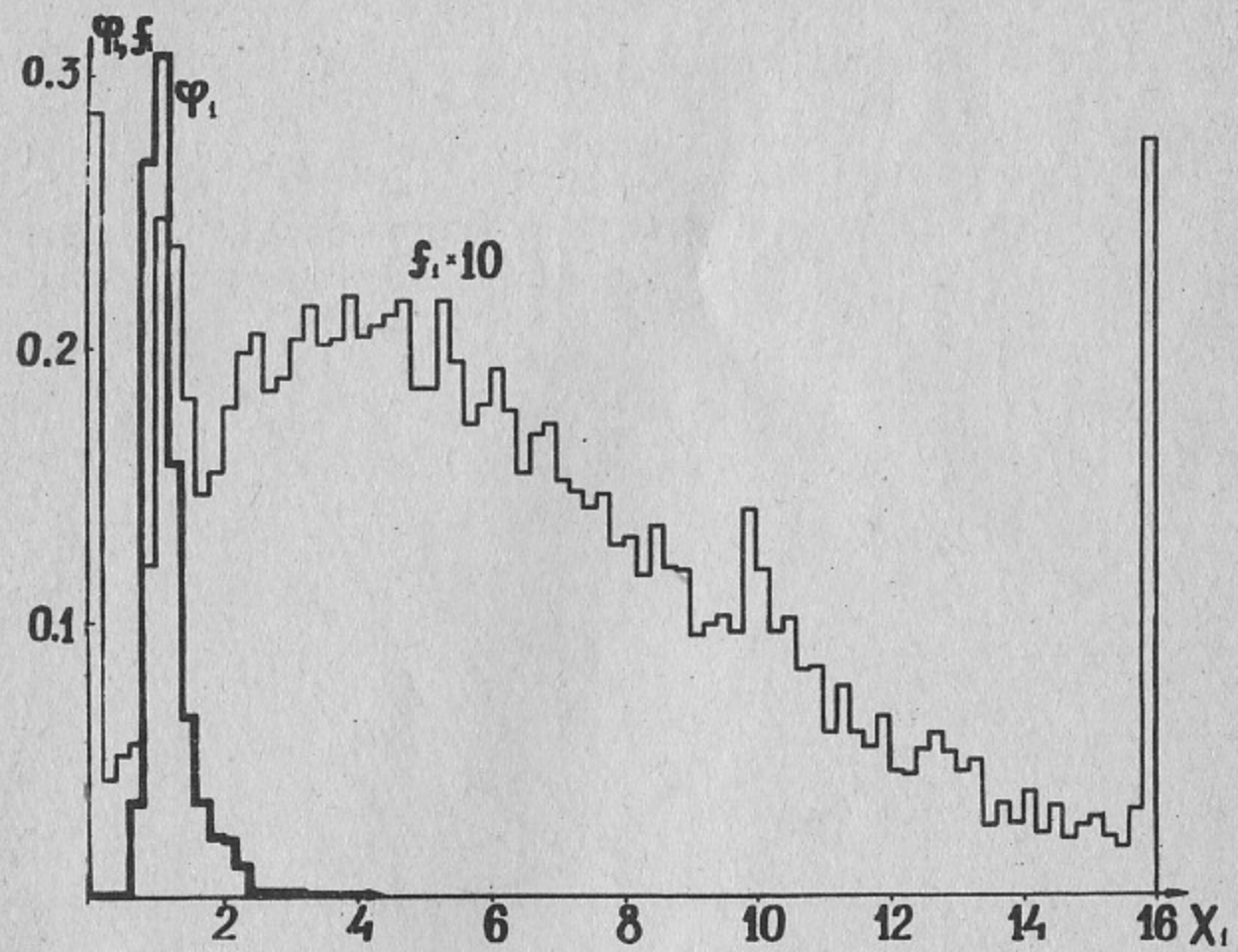


Рис. 2.

Амплитудные функции распределения в первом счетчике сэндвича для электронов и мюонов. Полная энергия частиц - 500 МэВ.

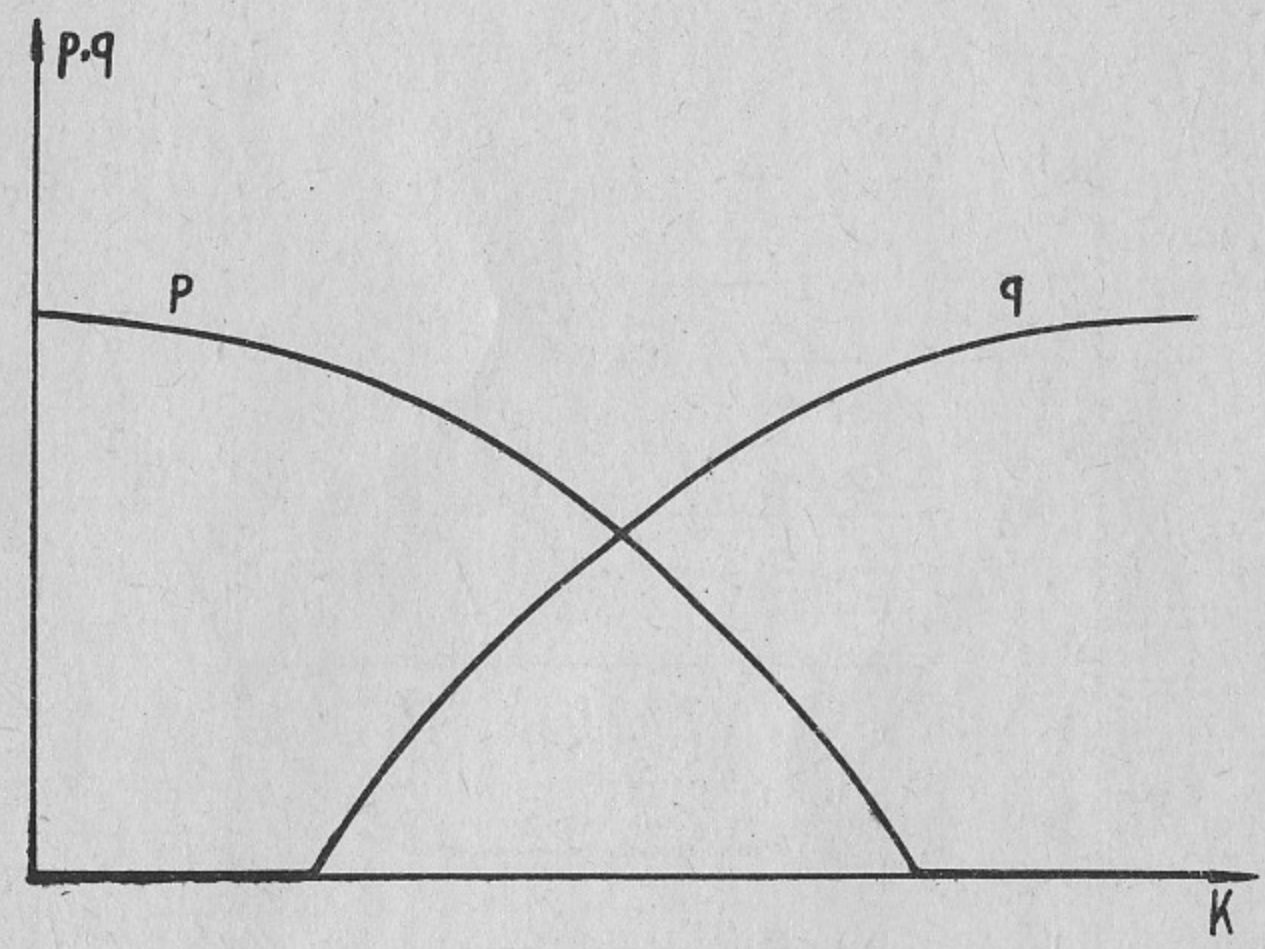


Рис. 3.

Функции распределений  $P(K)$  и  $q(K)$  для случая, когда система уравнений (5) имеет единственное решение.

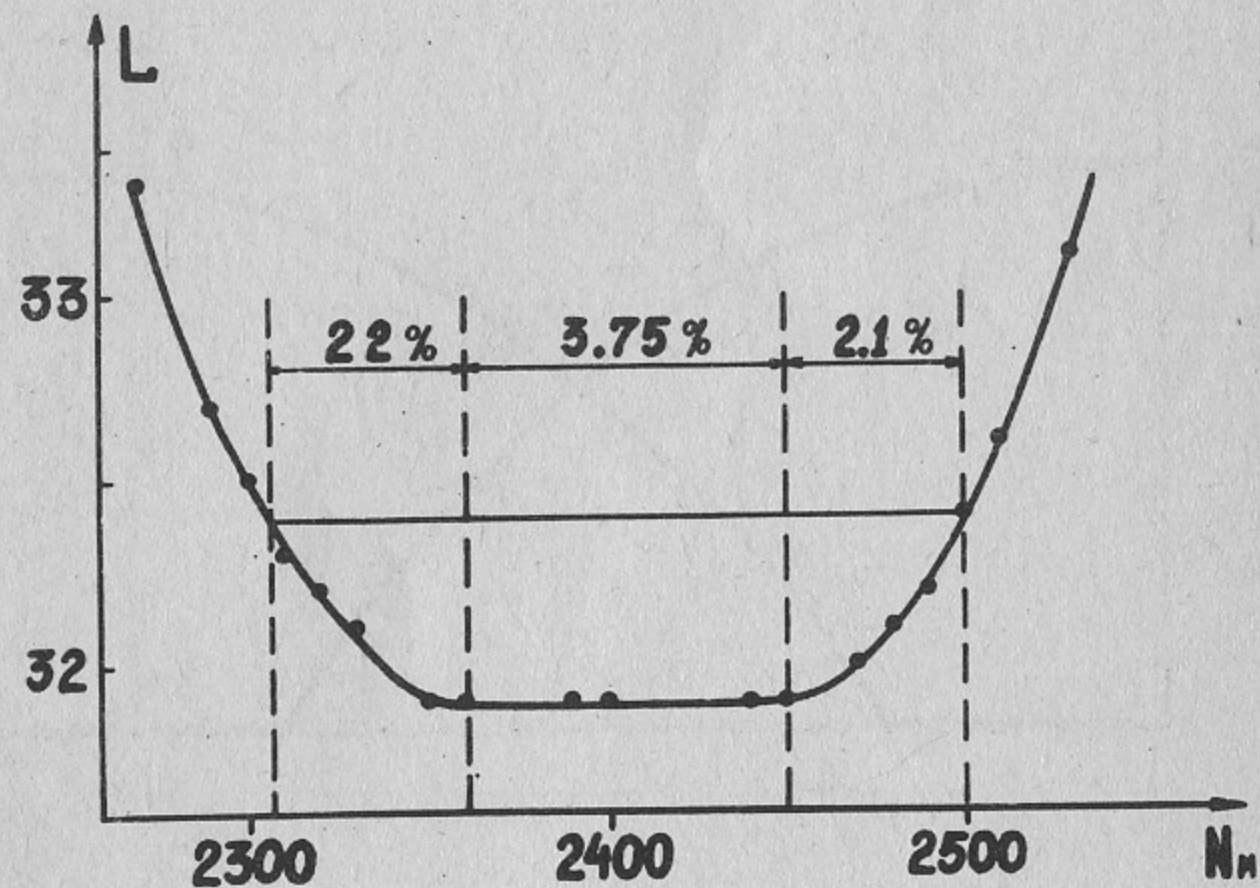


Рис. 4.

График функции правдоподобия, полученный при определении числа мезонов с помощью корреляционной матрицы в эксперименте по измерению параметров  $\Phi$  - мезона [5].

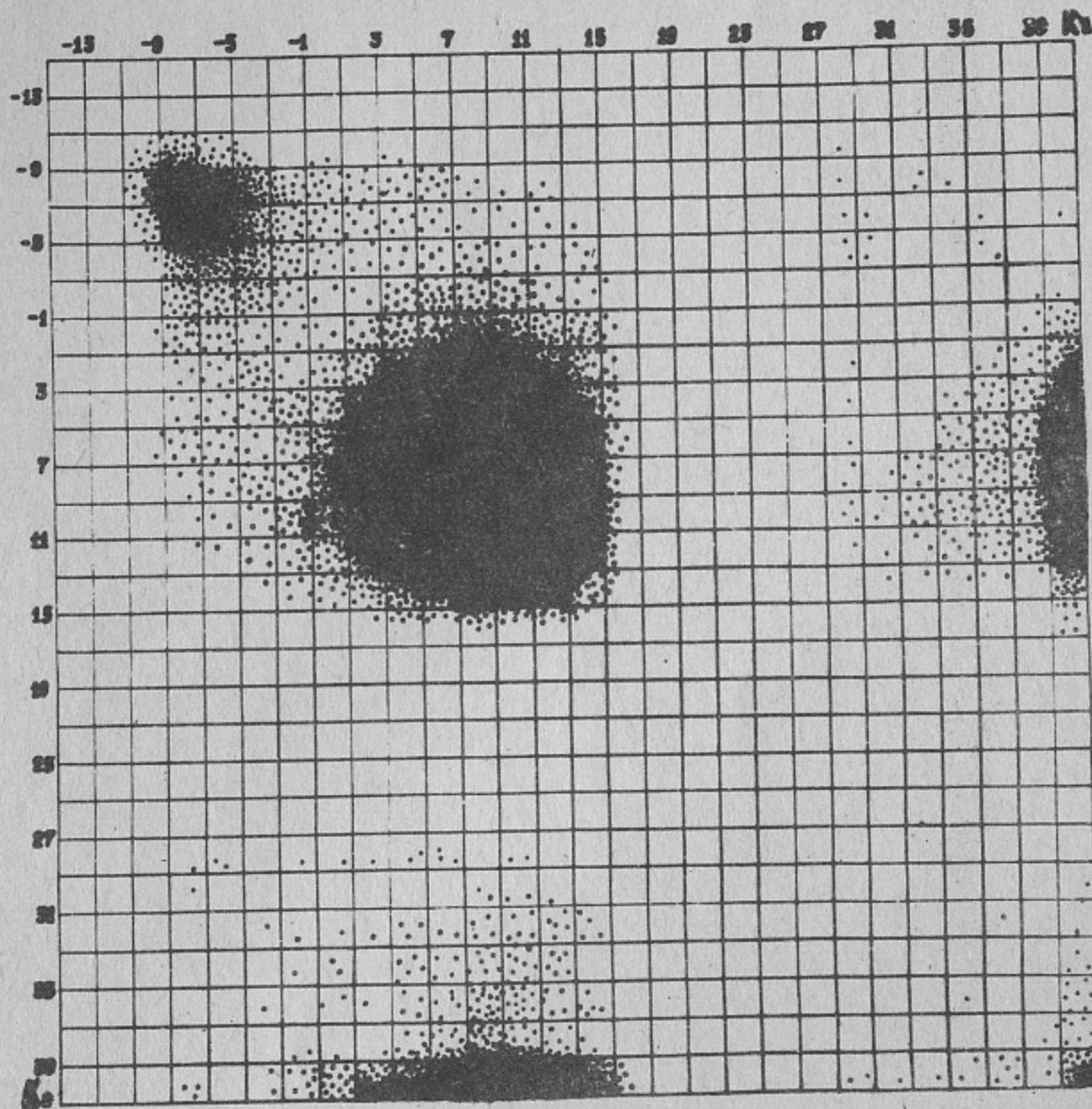


Рис. 5.

Распределение коллинеарных событий при энергии  $2 \times 500$  МэВ. по параметрам  $K_1$  и  $K_2$ , [5]. Две группы событий с  $K \sim 40$  связаны с электронами, у которых промежуточные сцинтилляторы дают нулевую амплитуду (для таких событий мезонная функция правдоподобия очень мала и  $K$  велико). Число событий в гистограмме - 12108.

Работа поступила - 27 июля 1977 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 3.IX-1977 г. МН 03014

Усл. I, 0 печ. л., 0, 8 учетно-изд. л.

Тираж 250 экз. Бесплатно

Заказ № 92.

---

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР