

2

И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77-120

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ТЕОРИЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ ДИОДОВ  
БОЛЬШОГО РАДИУСА

Новосибирск

1977



ТЕОРИЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ ДИОДОВ БОЛЬШОГО  
РАДИУСА

Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютсв, Г.В.Ступаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Аналитически исследовано движение частиц в сильноточном вакуумном диоде. Найдены зависимости тока электронов и ионов от параметров диода и напряженности внешнего магнитного поля. Показано, что эмиссия ионов с анода приводит к сильной фокусировке электронного пучка. Построенные решения хорошо согласуются с результатами ряда экспериментов и могут быть использованы для расчета реальных диодов.



## 1. Введение

Автоэмиссионный диод генератора мощных релятивистских электронных пучков обычно представляет собой два плоских или почти плоских электрода, разделенных вакуумным зазором, ширина которого  $a$  мала по сравнению с радиусом электродов  $R$ . Одна из главных особенностей такого диода состоит в том, что на его работу сильно влияет собственное магнитное поле пучка. Роль этого поля растёт с увеличением разности потенциалов  $U$ , приложенной к диоду. При достаточно малых значениях  $U$  ( $U \ll \frac{mc^2}{e} \frac{a}{R}$ ) сила Лоренца, действующая на электроны, мала по сравнению с электрической силой, и диодный ток  $I$  подчиняется "закону  $3/2$ " [1, 2]:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{9} \frac{mc^3}{e} \frac{R^2}{a^2} \left( \frac{eU}{mc^2} \right)^{3/2} \quad (1)$$

Когда разность потенциалов достигает величины  $mc^2 a / eR$ , магнитная и электрическая силы сравниваются. При этом становится существенным искривление траекторий частиц в диоде, и зависимость тока от напряжения начинает отклоняться от "закона  $3/2$ ". Подчеркнём, что в диодах большого радиуса ( $R \gg a$ ) собственное магнитное поле заметно перестраивает картину движения частиц уже при нерелятивистских напряжениях. С переходом в релятивистскую область эта тенденция, естественно, только усиливается.

Чтобы оценить диодный ток при  $U \gtrsim mc^2 a / eR$ , достаточно заметить, что в этом случае характерное значение ларморовского радиуса электронов  $\rho$  должно быть по порядку величины равно ширине зазора  $a$ . Действительно, при  $\rho \gg a$  магнитное поле вообще не могло бы ограничить ток, а при  $\rho \ll a$  оно, напротив, подавило бы его практически полностью. Остаётся только промежуточная возможность ( $\rho \sim a$ ), и, соответственно,

$$I \sim \frac{mc^3}{2e} \frac{R}{a} \sqrt{\left(1 + \frac{eU}{mc^2}\right)^2 - 1} \quad (2)$$

ж) Здесь подразумевается, что в диоде нет внешнего магнитного поля.



Попытки уточнить эту оценку и найти аккуратное решение задачи о сильноточном диоде предпринимались неоднократно, но до недавнего времени оказывались безуспешными. В результате приходилось либо ограничиваться упрощенными несамосогласованными моделями диода [3-5], либо прибегать к помощи численных расчётов [6-8]. Трудности здесь были вызваны двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что ток (2) эмитируется по преимуществу периферической частью катода, а это требует учёта краевых эффектов. Во-вторых, тем, что траектории частиц в зазоре пересекаются, т.е. движение является многопоточным (см. рис. I). Эти трудности можно, однако, обойти, если вместо диода с постоянным зазором рассмотреть диод с зазором, плавно увеличивающимся от центра к краю. В таком диоде движение электронов с хорошей точностью представляет собой дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях. При этом, как показано в работе [9], задача о распределении полей и тока в диоде допускает точное решение.

Другая возможность решить задачу о диоде аналитически имеется в том случае, когда диод помещён в достаточно сильное внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно к плоскости электродов. Этот случай примечателен тем, что электроны в диодном промежутке двигаются строго вдоль силовых линий. Сами силовые линии, однако, не совпадают с линиями внешнего поля, а определяются с учётом собственного поля тока. Ограничение на профиль электродов в сильном поле уже не существенно, поскольку роль краевых эффектов здесь оказывается незначительной.

Имея в виду указанные упрощения, мы найдём в настоящей работе зависимость диодного тока от величины внешнего магнитного поля, а также рассмотрим вопросы о фокусировке электронного пучка и об ускорении ионов в диоде.

Источником ионов является анодная плазма, которая обычно возникает при подаче на диод высокого напряжения. В начале импульса, когда время, прошедшее с момента включения, ещё мало по сравнению со временем пролёта иона через зазор, импеданс диода, очевидно, остаётся почти таким же, как и в чисто электронном режиме. Далее диод постепенно заполняется ионами и переходит в стационарное состояние с новым импедансом. Динамика

перекрытия зазора ионами рассмотрена в работе [10]. Ионный ток создаёт в диоде дополнительное магнитное поле, которое может уменьшать ток электронов, но практически не влияет на движение самих ионов, поскольку их масса очень велика. Это позволяет сделать долю ионного тока гораздо большей, чем в диодах, где ток ограничивается только объёмным зарядом. В частности, при надлежащем выборе параметров диода ионный ток может быть больше электронного. Подводимая к диоду мощность передаётся в этом случае преимущественно ионам. Рост к.п.д. ускорения ионов за счёт указанного эффекта наблюдался в экспериментах [11], а также при численном моделировании диода [12].

Эмиссия ионов, как будет видно из дальнейшего, приводит ещё к одному интересному явлению. Она вызывает сильную фокусировку электронного пучка. Роль ионов в процессе фокусировки впервые обсуждалась в работе [13], где проделаны оценки, относящиеся к начальной стадии заполнения диода ионами. Мы же рассмотрим в данной работе стационарную картину фокусировки. Для диода с плавным профилем электродов соответствующую задачу удаётся решить аналитически. При этом выясняется, что степень фокусировки можно управлять, изменяя геометрию электродов. Это обстоятельство представляет интерес для различных приложений: в первую очередь — для опытов по обжатию и нагреву плотной ДТ-мишени [14, 15]. Отметим, что усиление фокусировки электронов при наличии ионной эмиссии подтверждается результатами экспериментов [16] и численных расчётов [12, 17]. Аналитические решения, найденные в настоящей работе, хорошо согласуются с этими результатами.

Прежде чем перейти к основному содержанию работы, подчеркнём ещё, что условия применимости рассмотренных в ней аналитических моделей диода оказываются весьма мягкими и позволяют описать довольно широкий класс реальных устройств. Эти модели, разумеется, не могут полностью заменить численный подход, но существенно дополняют его. В частности, их можно использовать как тест при отладке вычислительных программ. Кроме того, аналитические решения обладают тем преимуществом, что дают более наглядное (чем численный счёт) представление о физических механизмах, определяющих работу диода.



## 2. Диод в сильном внешнем магнитном поле

Рассмотрим плоский диод, электроды которого представляют собой диски радиуса  $R$ , находящиеся на расстоянии  $a$  друг от друга и введем цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  с осью  $z$ , направленной по оси диода. Относительно внешнего магнитного поля предположим, что оно однородно и имеет только компоненту  $H_z$ . Кроме  $H_z$ , отлична от нуля компонента  $H_\theta$  — собственное магнитное поле тока, — зависящая только от  $r$ . Если внешнее поле достаточно велико (количественный критерий будет получен ниже), то, как мы уже отмечали, траектории электронов совпадают с силовыми линиями и представляют собой отрезки спиралей, заключенные между катодом и анодом. Компонента  $v_z$  скорости электрона равна

$$v_z = v \frac{H_z}{(H_z^2 + H_\theta^2)^{1/2}} \quad (3)$$

а величина скорости  $v$  определяется из закона сохранения энергии

$$v = c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{e\varphi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $c$  — скорость света; потенциал  $\varphi$  отсчитывается от катода. Согласно уравнению непрерывности плотность электронного тока  $j_z = -en_e v_z$  не зависит от  $z$ . Находя отсюда плотность электронов  $n_e$  и подставляя её в уравнение Пуассона, получим\*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{4\pi}{c} j_z \frac{(H_z^2 + H_\theta^2)^{1/2}}{H_z} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{e\varphi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{-1/2} \quad (5)$$

Считая эмиссионную способность катода бесконечной, мы положим  $(\partial\varphi/\partial z)|_{z=0} = 0$ . Кроме того, учтем, что потенциал катода равен нулю, а на аноде  $\varphi = (mc^2/e)(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — релятивистский фактор, соответствующий приложенному напряжению. Ин-

\* Здесь пока предполагается, что эмиссия ионов с анода отсутствует.

тегрируя уравнение (5) с этими граничными условиями, получим

$$j_z = - \frac{mc^3}{2\pi ea^2} \frac{H_z}{(H_z^2 + H_\theta^2)^{1/2}} g(\gamma) \quad (6)$$

где

$$g(\gamma) \equiv \frac{1}{4} \left[ \int_1^\gamma \frac{dx}{(x^2 - 1)^{1/4}} \right]^2 \quad (7)$$

График функции  $g(\gamma)$  приведен на рис. 2. В нерелятивистском и ультрарелятивистском пределах  $g(\gamma)$  имеет следующие асимптотики:

$$g(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{9} (\gamma - 1)^{3/2}; & \gamma - 1 \ll 1, \\ \gamma & \gamma \gg 1. \end{cases}$$

Найдём теперь распределение магнитного поля  $H_\theta$ . Для этого подставим  $j_z$  (см. (6)) в уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\theta = \frac{4\pi}{c} j_z$$

и введем безразмерные переменные

$$h = - \frac{H_\theta}{H_z}, \quad \xi = \frac{r}{a} \frac{2mc^2}{e a H_z} g(\gamma). \quad (8)$$

В этих переменных уравнение для  $h(\xi)$  принимает следующий вид

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi h = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \quad (9)$$

Его регулярное в нуле решение, полученное путём численного интегрирования, приведено на рис. 3. При малых и больших значениях  $\xi$  справедливы простые формулы

$$h = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi, & \xi \ll 1, \\ \left( \frac{2}{3} \xi \right)^{1/2}, & \xi \gg 1. \end{cases} \quad (10)$$

Зная распределение магнитного поля, нетрудно найти ток, протекающий через диод: \*

$$I = -\frac{1}{2} R c H_\theta(R)$$

\* Здесь и далее символом  $I$ , в том числе с индексами, обозначается модуль тока, т.е.  $I > 0$ .



В тех случаях, когда можно воспользоваться приближениями (10), ток записывается следующим образом:

$$I = \frac{mc^3}{2e} g(\gamma) \frac{R^2}{a^2}, \quad \frac{R}{a} \ll \frac{eaH_z}{mc^2 g(\gamma)}, \quad (11)$$

$$I = \frac{mc^3}{\sqrt{3}e} g(\gamma) \left(\frac{R}{a}\right)^{3/2} \left[\frac{eaH_z}{mc^2 g(\gamma)}\right]^{1/2}, \quad \frac{R}{a} \gg \frac{eaH_z}{mc^2 g(\gamma)}. \quad (12)$$

Формулы (11), (12) позволяют проследить за зависимостью диодного тока от напряженности внешнего магнитного поля. Если внешнее поле намного меньше собственного, то ток пропорционален  $H_z^{1/2}$  (см. формулу (12)). С увеличением внешнего поля ток выходит на насыщение и в пределе  $H_z \rightarrow \infty$  определяется релятивистским обобщением "закона 3/2" (формула (11)).

Укажем теперь условие применимости полученного решения. Электроны можно считать "нанизанными" на силовую линию, если скорость их дрейфа  $cE/H$  мала по сравнению с полной скоростью  $v$ . Легко проверить, что для этого внешнее магнитное поле должно существенно превосходить критическую величину  $H_c$ :

$$H_z \gg H_c \equiv \frac{mc^2}{eR} \frac{(\gamma-1)^2}{g(\gamma)}. \quad (13)$$

Если же  $H_z \ll H_c$ , то движение вдоль силовых линий сменяется дрейфом в радиальном направлении (см. раздел 3). Величина  $H_c$ , таким образом, соответствует границе между случаями сильного и слабого внешнего поля.

Рассмотрим теперь работу диода, предполагая, что анод может эмиттировать ионы. При этом в правую часть уравнения Пуассона следует включить плотность ионов

$$n_i = - \frac{j_i}{ce} \left[ \frac{2m}{M} \left( \gamma - 1 - \frac{e\varphi}{mc^2} \right) \right]^{-1/2},$$

т.е. вместо (5) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \frac{4\pi}{c} j_{ze} \frac{(H_z^2 + H_0^2)^{1/2}}{H_z} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{e\varphi}{mc^2} \right)^{-2} \right]^{-1/2} + \frac{4\pi}{c} j_i \left( \frac{M}{2m} \right)^{1/2} \left[ \gamma - 1 - \frac{e\varphi}{mc^2} \right]^{-1/2}. \quad (14)$$

Кроме того, появляется дополнительное граничное условие:

$(\partial\varphi/\partial z)|_{z=a} = 0$  (условие бесконечной эмиссионной способности анода), позволяющее определить новую неизвестную величину — плотность ионного тока  $j_i$ .

Интегрируя уравнение (14), находим

$$j_{ze} = - \frac{mc^3}{2\pi ea^2} \frac{H_z}{(H_z^2 + H_0^2)^{1/2}} g_1(\gamma), \quad (15)$$

$$j_i = - \frac{mc^3}{2\pi ea^2} \left[ \frac{m}{2M} (\gamma+1) \right]^{1/2} g_1(\gamma), \quad (16)$$

где

$$g_1(\gamma) \equiv \frac{1}{4} \left\{ \int_1^\gamma dx \left[ \sqrt{x^2-1} - \sqrt{\gamma^2-1} + \sqrt{(\gamma+1)(\gamma-x)} \right]^{-1/2} \right\}^2. \quad (17)$$

График функции  $g_1(\gamma)$  приведен на рис. 2, а её асимптотики имеют следующий вид:

$$g_1(\gamma) = \begin{cases} 0,58 (\gamma-1)^{3/2}, & \gamma-1 \ll 1, \\ \frac{\pi^2}{4} \gamma, & \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (18)$$

Как видно из формулы (16), плотность ионного тока постоянна по сечению диода и не зависит от напряженности внешнего магнитного поля. Полный ионный ток, протекающий через диод равен

$$I_i = \frac{mc^3}{2e} \frac{R^2}{a^2} \left[ \frac{2m}{M} (\gamma+1) \right]^{1/2} g_1(\gamma). \quad (19)$$

Чтобы найти электронный ток, необходимо предварительно решить уравнение для магнитного поля

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\theta = \frac{4\pi}{c} (j_{ze} + j_i). \quad (20)$$

Воспользовавшись формулами (15), (16) и совершив переход к безразмерным переменным

$$h = - \frac{H_\theta}{H_z}, \quad \xi = \frac{r}{a} \frac{2mc^2}{eaH_z} g_1(\gamma),$$

запишем это уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi h = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} + \sqrt{\frac{2m}{M} (\gamma+1)}. \quad (21)$$

Предположим сначала, что ионный ток мал по сравнению с электронным, так что вторым слагаемым в правой части (21) можно



пренебречь. Тогда уравнение (21) переходит в (9). В результате распределение  $H_\theta$  по радиусу и выражение для электронного тока будут отличаться от соответствующих зависимостей для диода без ионов только заменой  $g(\gamma)$  на  $g_1(\gamma)$ .

Условие малости ионного тока ( $I_e \gg I_i$ ) с помощью формул (12) и (19) можно записать в виде ограничения на величину внешнего магнитного поля

$$\frac{e\alpha H_z}{mc^2} \gg \frac{m}{M} \frac{R}{a} \gamma g_1(\gamma). \quad (22)$$

Для диодов не слишком большого радиуса это неравенство выполняется автоматически, поскольку  $H_z$  ограничено снизу величиной  $H_c$  (см. (13)). Если же

$$\frac{R}{a} \gg \frac{\gamma-1}{g_1(\gamma)} \sqrt{\frac{M}{\gamma m}}, \quad (23)$$

то возможна ситуация, когда вместе с (13) выполняется неравенство, обратное (22). При этом электронный ток, текущий через диод, меньше ионного, что позволяет пренебречь в правой части уравнения (21) первым слагаемым. Находя из (21) магнитное поле, а затем вычисляя электронный ток с помощью формулы (15), получим:

$$I_e = c R H_z \sqrt{\frac{M}{2m(\gamma+1)}}. \quad (24)$$

### 3. Электронный диод в слабом магнитном поле

В этом разделе мы будем считать, что внешнее магнитное поле много меньше критического значения  $H_c$  (см. (13)). Тогда оно слабо влияет на работу диода, и в первом приближении можно принять  $H_z = 0$ . Чтобы аналитически решить задачу о диоде в такой постановке, необходимо предположить, что зазор между электродами  $a$  плавно возрастает от центра диода к краю (см. рис. 4а), так что  $da/dr \ll 1$ , причем  $a(R) \gg a(0)$ . Важной для дальнейшего характеристикой профиля диода является отношение  $a(r)/r$ .

Мы будем считать, что эта функция имеет вид, изображенный на рис. 4б, т.е. достигает минимума при некотором значении аргумента  $r < R$ , причем  $a(R)/R \gg \min[a(r)/r]$ . Отметим, что такой диод может быть, в частности, почти плоским, т.е. иметь постоян-

ный зазор по всей поверхности электродов, за исключением узкой по сравнению с  $R$  (но широкой по сравнению с  $\alpha(R)$ ) периферической области.

Под действием магнитного поля тока  $H_\theta$  траектории электронов изгибаются к оси диода, и электроны двигаются, в основном, в радиальном направлении ( $v_r \gg v_z$ ). Весьма существенно, что при плавном профиле электродов поле, действующее на электрон, адиабатически медленно (по сравнению с циклотронным периодом) нарастает во времени. Это означает, что траектория электрона является плавной, а его скорость близка к скорости электрического дрейфа<sup>\*)</sup>

$$\vec{v} = c \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{H^2}. \quad (25)$$

Естественно, что этим соотношением можно пользоваться только там, где  $E < H$ , т.е., как будет видно из дальнейшего, почти во всем диоде, за исключением узкой приосевой области.

Формально из (25) следует, что электрон движется вдоль эквипотенциали. На самом же деле составляющая скорости вдоль электрического поля, хотя и мала, но отлична от нуля (она появляется в следующем приближении по параметру  $\alpha/R$ ). Поэтому уравнение (25) позволяет с достаточной точностью определить только компоненту скорости, перпендикулярную  $\vec{E}$ . Мы будем пользоваться им для нахождения  $v_r$ :

$$v_r = -c \frac{E_z}{H_\theta}. \quad (26)$$

Соотношение (26) дополняется законом сохранения энергии, который с учётом малости  $v_z$  можно записать в виде:

$$mc^2 \left(1 - \frac{v_r^2}{c^2}\right)^{-1/2} - e\varphi = mc^2. \quad (27)$$

Магнитное поле  $H_\theta$  и потенциал  $\varphi$  в диоде определяются из следующих уравнений:

<sup>\*)</sup> Строго говоря, электрон совершает осцилляции вокруг плавной траектории, соответствующей движению со скоростью (25). Можно, однако, показать, что амплитуда этих осцилляций пренебрежимо мала (см. ниже). По этой же причине мы не учитываем градиентного дрейфа в выражении (25).



$$\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} en_e v_r, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi en_e. \quad (29)$$

В последнем уравнении ввиду малости  $da/dr$  мы пренебрегли производной от  $\varphi$  по радиусу. Исключая из (26), (27), (28) скорость электронов  $v_r$ , получим:

$$H_\theta \frac{\partial H_\theta}{\partial z} = 4\pi en_e \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (30)$$

$$mc^2 \left[ 1 - \frac{1}{H_\theta^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} - e\varphi = mc^2. \quad (31)$$

Уравнения (29) - (31) образуют замкнутую систему, описывающую электронное течение в диоде. Заметим, что координата  $r$  в них не входит. Зависимость всех величин от радиуса проявляется через граничные условия:

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (33)$$

$$\varphi|_{z=a(r)} = \frac{mc^2}{e} (\gamma - 1). \quad (34)$$

Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение следующие величины:  $I_k(r)$  - ток, эмиттируемый катодом внутри круга радиуса  $r$ ,  $I_a(r)$  - ток, приходящий на анод внутри такого же круга,  $I$  - полный диодный ток,  $H_k(r)$ ,  $H_a(r)$  - напряженности магнитного поля на катоде и аноде, соответственно. Очевидно, что  $H_k(r)$  и  $H_a(r)$  можно выразить через введенные токи:

$$H_k(r) = -\frac{2I_k(r)}{rc}; \quad H_a(r) = -\frac{2I_a(r)}{rc}. \quad (35)$$

Исключая из системы (29) - (31) плотность  $n_e$  и интегрируя оставшиеся уравнения с учетом граничных условий, получим

$$\varphi = \frac{mc^2}{e} (\operatorname{ch} \chi z - 1), \quad (36)$$

$$H_\theta = H_k \operatorname{ch} \chi z, \quad (37)$$

где  $\chi = e|H_k|/mc^2$ .

Рассмотрим сначала решение в области  $r > r^*$ , где пучок не касается анода (см. рис. 4). Обозначим через  $a_1(r)$  расстояние от поверхности катода до границы электронного потока. При  $z < a_1(r)$  справедливы формулы (36), (37), а при  $z > a_1(r)$  электрическое и магнитное поля не зависят от  $z$ . Учитывая непрерывность полей и потенциала при  $z = a_1(r)$ , имеем

$$\varphi = \frac{mc^2}{e} [\chi(z - a_1) \operatorname{sh} \chi a_1 + \operatorname{ch} \chi a_1 - 1], \quad z > a_1, \quad (38)$$

$$H_\theta = H_k \operatorname{ch} \chi a_1, \quad z > a_1. \quad (39)$$

Из формулы (38) и граничного условия (34) следует, что  $a_1$  и  $H_k$  связаны между собой соотношением

$$\operatorname{ch} \chi a_1 + \chi(a - a_1) \operatorname{sh} \chi a_1 = \gamma. \quad (40)$$

Второе уравнение для этих величин получается из формул (35) и (39), если принять во внимание, что в области  $r > r^*$  ток  $I_a(r)$  постоянен и равен  $I$ :

$$|H_k| \operatorname{ch} \chi a_1 = \frac{2I}{rc}. \quad (41)$$

Уравнения (40) и (41) определяют функции  $H_k(r)$  и  $a_1(r)$ , а с ними и все решение в области  $r > r^*$  с точностью до единственного не известного пока параметра  $I$ .

В области  $r < r^*$  решение (36), (37) справедливо вплоть до  $z = a(r)$ . Соответственно, граничное условие (34) здесь имеет вид

$$\operatorname{ch} \chi a = \gamma \quad (42)$$

Находя отсюда  $H_k$  и вычисляя затем токи  $I_k(r)$  и  $I_a(r)$ , получим:

$$I_a(r) = \frac{mc^3}{2e} \frac{r}{a(r)} \gamma \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}), \quad (43)$$

$$I_k(r) = \frac{mc^3}{2e} \frac{r}{a(r)} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}).$$



Поскольку анод, очевидно, не эмиттирует электронов, то функция  $I_a(r)$  должна монотонно возрастать с увеличением  $r$ . Это значит, что электронный поток касается анода при меньшем значении  $r$ , чем точка минимума функции  $a(r)/r$ . Величина  $r^*$  определяется из условия  $I_a(r^*) = I$ :

$$\frac{a(r^*)}{r^*} = \frac{mc^3}{2eI} \gamma \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}). \quad (44)$$

Отметим, что в ультрарелятивистском случае  $I \gg I_k(r^*)$ , т.е. основная часть тока, как это уже отмечалось во Введении, эмиттируется внешней частью диода (при  $r > r^*$ ).

Найдём теперь ток, текущий через диод. Для этого рассмотрим зависимость  $I_k$  от  $r$  при  $r > r^*$ . Исключая из уравнений (40), (41) величину  $a_1$  и выражая  $N_k$  через  $I_k$ , получим:

$$\frac{2eI}{mc^3} \frac{a(r)}{r} = F\left(\gamma, \frac{I_k}{I}\right), \quad (45)$$

где

$$F(\gamma, x) \equiv \frac{\gamma - \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right). \quad (46)$$

График функции  $F(\gamma, x)$  при фиксированном  $\gamma$  изображен на рис.5. Эта функция имеет минимум, причём значение  $x$ , соответствующее минимуму, больше, чем величина  $I_k(r^*)/I$ . Сравнивая графики функций  $a(r)/r$  и  $F(\gamma, x)$ , нетрудно понять, что зависимость  $I_k(r)$  в области  $r > r^*$ , задающаяся соотношением (45), может быть непрерывной только в том случае, когда минимум левой части (45) по  $r$  совпадает с минимумом правой части по  $x$ . Отсюда определяется величина полного тока  $I$ :

$$I = \frac{mc^3}{2e} \max_r \left[ \frac{r}{a(r)} \right] \min_x F(\gamma, x) \quad (47)$$

Зависимость  $\min_x F(\gamma, x)$  от  $\gamma$  может быть представлена в параметрическом виде

$$\min_x F(\gamma, x) = \mu^3 \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}), \quad (48)$$

$$\gamma = \mu + (\mu^2 - 1)^{3/2} \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}), \quad \mu \geq 1,$$

где  $\mu$  - параметр. График этой зависимости изображён на рис.6.

Укажем также её асимптотики:

$$\min_x F(\gamma, x) = \begin{cases} \sqrt{2(\gamma-1)} & , (\gamma-1) \ll 1, \\ \gamma & , \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (49)$$

Полученное нами решение обладает тем свойством, что  $I_k \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ , что соответствует отсутствию стороннего тока на оси диода. Определенный интерес представляет и другая постановка задачи, когда по оси диода течёт заданный сторонний ток  $I_1$ . Этот случай соответствует экспериментам типа [18, 19], в которых для нейтрализации пространственного заряда электронов в приосевой области создавался плазменный шнур радиуса  $\lesssim a$ , перекрывающий весь межэлектродный зазор. При плавном профиле электродов влияние магнитного поля тока, текущего по плазменной перемычке, на движение частиц может быть легко учтено. Приведём соответствующие результаты.

Будем сначала считать, что  $I_1$  меньше величины  $I$ , определяемой формулой (47). Тогда во внешней части диода, при  $r$ , больших некоторой критической величины  $r_1$ , решение совпадает с решением для  $I_1 = 0$ , а при  $r < r_1$  электронный поток открывается от анода (см.рис.7а). Положение точки отрыва  $r_1$  определяется из условия

$$I_a(r_1) = I_1$$

При  $r < r_1$  катодный ток  $I_k(r)$  вычисляется по формуле (45), в которой необходимо заменить  $I$  на  $I_1$ :

$$\frac{2eI_1}{mc^3} \frac{a(r)}{r} = F\left(\gamma, \frac{I_k}{I_1}\right).$$

Здесь в качестве  $F(\gamma, I_k/I_1)$  берётся правая ветвь функции  $F(\gamma, x)$  (см.рис.5), так что  $I_k/I_1 \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow 0$ . Полный ток, протекающий через диод, по-прежнему определяется формулой (47), однако теперь он включает в себя сторонний ток  $I_1$ . Соответственно, ток, переносимый электронами, равен  $I - I_1$ . Отметим, что при  $r < r_1$  функция  $I_k(r)$  возрастает с уменьшением  $r$ , т.е. электроны в этой области возвращаются на катод.

Можно построить решение и для  $I_1 > I$ . В этом случае электронный поток вовсе не касается анода (рис.7б). Эмиттирован-



ные внешней частью катода электроны движутся к оси диода и там снова попадают на катод.

В заключение этого раздела мы уточним условия применимости полученных результатов. Как видно из формул (43), плотности анодного и катодного токов при  $r \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности как  $1/r$ . Появление этой особенности связано с тем, что магнитное поле при  $r \ll a$  становится малым, и использованное нами дрейфовое приближение (25) нарушается. Электроны здесь двигаются не по радиусу, а почти вдоль оси диода, и плотность тока по порядку величины даётся релятивистским "законом 3/2" (см. (II)). При этом полный ток, протекающий через область  $r \ll a$ , мал по сравнению с (47), так что эта область не влияет на работу диода в целом.

Построенное решение несправедливо также в узком слое вблизи поверхности катода, где электроны, эмиттированные с нулевой начальной скоростью, движутся почти вдоль электрического поля. Оценим толщину этого слоя. Ввиду того, что скорость электронов в слое мала, влиянием магнитного поля на них в первом приближении можно пренебречь. Поэтому потенциал  $\varphi$  удовлетворяет здесь уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \frac{j_k}{v_z} \quad ; \quad v_z = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$$

Отсюда, учитывая граничное условие  $(\partial\varphi/\partial z)|_{z=0} = 0$ , находим

$$v_z = \left( \frac{18\pi e |j_k|}{m} \right)^{1/3} z^{2/3} \quad (50)$$

Воспользуемся теперь уравнением

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{ev_z}{mc} H_k$$

и найдём радиальную составляющую скорости

$$v_r = \frac{ez}{mc} H_k \quad (51)$$

Из формул (50), (51) и выражений для  $H_k$  и  $j_k$  нетрудно получить, что величины  $v_r$  и  $v_z$  сравниваются при

$$z \sim z_0 \equiv a \frac{a}{r} \left[ \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right]^{-2}$$

Начиная с этих значений  $z$ , становится справедливым дрейфовое приближение. Поэтому условием применимости нашего решения является малость  $z_0$  по сравнению с  $a$ . В релятивистском случае это условие выполняется автоматически; в нерелятивистском — оно даёт ограничение на размеры диода:

$$\frac{a}{R} \lesssim \gamma - 1 \ll 1.$$

На границе катодного слоя (при  $z \sim z_0$ ) скорость электронов равна

$$v \sim c \frac{a}{r \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})}$$

При дальнейшем движении частица сохраняет осцилляции скорости с амплитудой такого порядка (см. примечание на стр. 11).

#### 4. Ионный ток и фокусировка электронов в отсутствие внешнего магнитного поля

Рассматривая эффекты, обусловленные эмиссией ионов из анодной плазмы, мы, в соответствии со сказанным во Введении, ограничимся обсуждением стационарной картины, т.е. предположим, что характерное время задачи велико по сравнению со временем пролета иона через зазор. При этом мы по-прежнему будем считать профиль электродов плавным и воспользуемся для описания движения электронов уравнениями (26) и (27). Для ионов же достаточно учесть только движение в  $z$  - направлении, поскольку искривление их траекторий магнитным полем пренебрежимо мало. Выразив плотность ионов  $n_i(r, z)$  через потенциал  $\varphi$  и плотность ионного тока  $j_i(r)$ , можно записать уравнение Пуассона в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi en_e + \frac{4\pi}{c} j_i \left( \frac{M}{2m} \right)^{1/2} \left( \gamma - 1 - \frac{e\varphi}{mc^2} \right)^{-1/2} \quad (52)$$

Это уравнение вместе с уравнениями (26) - (28) образует замкнутую систему.

Анодная плазма обычно имеет достаточно высокую плотность и способна дать значительный ионный ток уже при очень малом вытягивающем электрическом поле. Это позволяет считать её эмисси-



онную способность бесконечной и положить

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=a(r)} = 0. \quad (53)$$

Соотношения (53) и (32) - (34) задают граничные условия к рассматриваемой системе.

Для дальнейшего удобно перейти в исходных уравнениях к безразмерным переменным, сделав следующие замены:

$$\varphi \rightarrow \frac{mc^2}{e} \varphi, \quad H_0 \rightarrow \frac{mc^2}{ea(r)} H, \quad z \rightarrow a(r)z, \quad (54)$$

$$j_i \rightarrow \frac{-1}{16\pi} \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{mc^3}{ea^2(r)} j.$$

Исключим далее из уравнений (26), (28) и (52) величины  $v_r$  и  $h_e$ . Получающееся при этом соотношение удастся один раз проинтегрировать:

$$H^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - j \sqrt{\gamma - \varphi - 1} + H_*^2. \quad (55)$$

Здесь  $H_*$  - константа интегрирования. Формулы (55) и (31) дают следующее уравнение для потенциала  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (\varphi^2 + 2\varphi)^{1/2} \left( H_*^2 - j \sqrt{\gamma - 1 - \varphi} \right)^{1/2}. \quad (56)$$

Соотношения (55) и (56) относятся к области, занятой электронами. Вне этой области, т.е. между огибающей потока ( $z = a_1(r)/a(r)$ ) и анодом ( $z = 1$ ), магнитное поле не зависит от  $z$ , а распределение потенциала легко находится из уравнения (52) и граничных условий (53) и (34).

$$\varphi = \gamma - 1 - j^{2/3} \left[ \frac{3}{4} (1-z) \right]^{4/3}. \quad (57)$$

В точке  $z_* = a_1(r)/a(r)$  оба решения должны сшиваться. Условия непрерывности электрического поля и потенциала при  $z = z_*$  записываются следующим образом:

$$H_*^2 (\varphi_*^2 + 2\varphi_*) = j \sqrt{\gamma - 1 - \varphi_*} (1 + \varphi_*)^2, \quad (58)$$

$$\int_0^{\varphi_*} d\varphi (H_*^2 - j \sqrt{\gamma - 1 - \varphi})^{1/2} (\varphi^2 + 2\varphi)^{-1/2} = 1 - \frac{4}{3} j^{-1/2} (\gamma - 1 - \varphi_*)^{3/4}, \quad (59)$$

где через  $\varphi_*$  обозначен потенциал на границе электронного потока.

Используя уравнения (55) и (57) и учитывая непрерывность величин  $H$ ,  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial z$ , нетрудно показать, что  $H_*(r)$  представляет собой магнитное поле в точке  $z = z_*$ . Его можно выразить через полный электронный ток  $I_e$  и ионный ток, протекающий внутри круга радиуса  $r$ :

$$H_* = - \frac{a(r)}{2r} \sqrt{\frac{m}{2M}} \left[ \sqrt{\frac{8M}{m}} \frac{2e}{mc^3} I_e + \int_0^r j(r') \frac{r' dr'}{a^2(r')} \right]. \quad (60)$$

Это уравнение после подстановки в него зависимости  $H_*(j)$ , которая в неявном виде задается формулами (58) и (59), позволяет найти функцию  $j(r)$ , а также, как мы увидим, неизвестную константу  $I_e$ . Мы сделаем это для тех случаев, когда один из токов (электронный или ионный) мал по сравнению с другим.

Рассмотрим вначале ситуацию, когда можно пренебречь ионным током. Соотношение (60) при этом упрощается:

$$H_* = - \frac{a(r)}{r} \frac{2e}{mc^3} I_e. \quad (61)$$

Исключая из уравнений (58), (59) и (61) величины  $H_*$  и  $j$ , получим

$$\frac{a(r)}{r} \frac{2e}{mc^3} I_e = \Phi(\gamma, \varphi_*) \quad (62)$$

где

$$\Phi(\gamma, \varphi_*) = \frac{(1 + \varphi_*) (\gamma - 1 - \varphi_*)^{1/4}}{(\varphi_*^2 + 2\varphi_*)^{1/2}} \left\{ \frac{4}{3} (\gamma - 1 - \varphi_*)^{3/4} + \int_0^{\varphi_*} d\varphi \left[ \frac{(1 + \varphi_*)^2 (\gamma - 1 - \varphi_*)^{1/2}}{\varphi_*^2 + 2\varphi_*} - (\gamma - 1 - \varphi)^{1/2} \right]^{-1/2} (\varphi^2 + 2\varphi)^{-1/2} \right\}. \quad (63)$$

Функция  $\Phi(\gamma, x)$  при фиксированном  $\gamma$  определена на промежутке  $0 < x < x_c(\gamma)$ , где  $x_c(\gamma)$  является решением уравнения

$$\frac{(\gamma - x - 1)^{1/2} (1 + x)^2}{x^2 + 2x} = (\gamma - 1)^{1/2}. \quad (64)$$

На концах этого промежутка  $\Phi(\gamma, x)$  обращается в бесконечность



а внутри него имеет единственный минимум.

Чтобы определить полный электронный ток  $I_e$ , нам понадобится еще зависимость катодного тока  $I_k$  от потенциала  $\varphi_*$ :

$$\left(\frac{I_k}{I_e}\right)^2 = 1 - (\gamma - 1)^{1/2} \frac{\varphi_*^2 + 2\varphi_*}{(\gamma - 1 - \varphi_*)^{1/2} (1 + \varphi_*)^2} \quad (65)$$

Это выражение непосредственно следует из равенства

$$\frac{I_k}{I_e} = \frac{H(r, z)|_{z=0}}{H_*}$$

и формул (55) и (58). Отметим, что функция  $I_k(\varphi_*)$  монотонно убывает с ростом  $\varphi_*$ .

Соотношения (62) и (65) в неявной форме устанавливают зависимость  $I_k$  от  $r$ . Так же, как и в случае диода без ионов (см. раздел 3), для непрерывности функции  $I_k(r)$  необходимо, чтобы минимум левой части (62) по  $r$  совпадал с минимумом правой части по  $\varphi_*$ . Это условие и определяет полный электронный ток  $I_e$ :

$$I_e = \frac{mc^3}{2e} \max_r \left[ \frac{r}{a(r)} \right] \min_x \phi(\gamma, x) \quad (66)$$

График функции  $\min_x \phi(\gamma, x)$  представлен на рис. 8. Выпишем также ее асимптотики:

$$\min_x \phi(\gamma, x) = \begin{cases} \sqrt{2(\gamma-1)} & , \gamma - 1 \ll 1, \\ \frac{4}{3}\gamma & , \gamma \gg 1. \end{cases} \quad (67)$$

Выясним далее, какова в рассматриваемом случае величина ионного тока. При этом мы для простоты ограничимся ультрарелятивистским пределом ( $\gamma \gg 1$ ). Тогда в большей части диода  $\varphi_*$  также велико по сравнению с единицей. С другой стороны, при

$\gamma \gg 1$  из уравнения (64) следует, что  $\varphi_* \ll \gamma$  (корень уравнения (64)  $x_c$  мал по сравнению с  $\gamma$ ,  $a\varphi_* < x_c$ ). Учитывая эти соотношения и комбинируя формулы (54), (58), (61), (66) и (67), нетрудно показать, что

$$j_i = \frac{-1}{9\pi} \sqrt{\frac{2m}{M}} \gamma^{3/2} \frac{mc^3}{er^2} \left[ \max_r \frac{r}{a(r)} \right]^2 \quad (68)$$

Формально плотность ионного тока оказывается расходящейся при  $r \rightarrow 0$ . Но, как уже отмечалось в разделе 3, наше решение становится неприменимым вблизи оси диода. Обозначая радиус этой приосевой области через  $r_0$ , можно записать выражение для полного ионного тока в следующем виде:

$$I_i = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2m}{M}} \gamma^{3/2} \frac{mc^3}{e} \left[ \max_r \frac{r}{a(r)} \right]^2 \ln \frac{R}{r_0} \quad (69)$$

где  $R$  - радиус диода. Ввиду логарифмической зависимости  $I_i$  от  $r_0$  точное значение  $r_0$  не очень существенно. В зависимости от конкретной формы электродов эта величина определяется либо шириной межэлектродного зазора в приосевой области, либо амплитудой осцилляций электронов вокруг их плавной траектории.

Напомним, что условием применимости выражений (66) и (69) является малость ионного тока по сравнению с электронным. При  $\gamma \gg 1$  это требование дает следующее ограничение на параметры диода:

$$\left( \frac{2m\gamma}{9M} \right)^{1/2} \left[ \max_r \left( \frac{r}{a} \right) \right] \ln \frac{R}{r_0} \ll 1$$

Рассмотрим теперь второй предельный случай, т.е. будем считать, что ионный ток намного больше электронного. Тогда магнитное поле  $H$  определяется в основном ионным током и зависит только от радиуса. Используя безразмерные переменные (54), можно написать, что

$$H = - \frac{a(r)}{2r} \sqrt{\frac{m}{2M}} \int_0^r j(r') \frac{r' dr'}{a^2(r')} \quad (70)$$

Надо, однако, иметь в виду, что это соотношение выполняется не во всем диоде, а только при достаточно больших значениях  $r$  (оценка граничного радиуса  $r_c$  будет получена ниже).

Подчеркнем, что в пренебрежении электронным током  $H \approx H_*$  (см. формулу (60)), т.е. величина  $H^2$  значительно превосходит два первых слагаемых в правой части уравнения (55). Это позволяет существенно упростить соотношения (58) и (59) и привести



их к следующему виду:

$$\varphi_* \approx \frac{j\sqrt{\gamma-1}}{2H_*^2} \ll 1 \quad (71)$$

$$j \approx \frac{16}{9} (\gamma-1)^{3/2}. \quad (72)$$

Последнее равенство имеет очень простой смысл: оно означает, что плотность ионного тока оказывается такой же, как в отсутствие эмиссии электронов. В этом приближении ионный ток, текущий внутри круга радиуса  $r$  равен

$$I_i(r) = \frac{2}{9} \sqrt{\frac{2m}{M}} \frac{mc^3}{e} (\gamma-1)^{3/2} \int_0^r \frac{r' dr'}{a^2(r')} \quad (73)$$

Найдем еще величину электронного тока  $I_e(r)$ , эмиттируемого внешней частью катода и втекающего через боковую поверхность цилиндра радиуса  $r$ :

$$I_e(r) = -2\pi e r \int_0^{z_*} n_e v_r dz.$$

Подставляя в это выражение  $n_e$  и  $v_r$  (см. формулы (52) и (26)) и вычисляя интеграл, получим:

$$I_e(r) = -\frac{r}{a(r)H} \frac{mc^3}{4e} j (\gamma-1)^{1/2}. \quad (74)$$

Мы учли здесь, что магнитное поле слабо зависит от  $z$ , а также воспользовались соотношением

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \Big|_{z=z_*} \approx j\sqrt{\gamma-1-\varphi_*},$$

следующим из уравнений (56), (58) и (71). После подстановки в формулу (74) выражений (70) и (72) имеем:

$$I_e(r) = \frac{mc^3}{2e} \sqrt{\frac{2M}{m}} \frac{r^2}{a^2} (\gamma-1)^{1/2} \left[ \int_0^r \frac{r' dr'}{a^2(r')} \right]^{-1}. \quad (75)$$

Полученные выражения для токов применимы в той области, где  $I_i(r) \gg I_e(r)$  \*). Это неравенство дает возможность оценить граничный радиус  $r_c$ :

$$r_c \sim a \sqrt{\frac{M}{m(\gamma-1)}}$$

Здесь через  $a$  обозначена характерная величина межэлектродного зазора. Таким образом, построенное решение описывает диоды, радиус  $R$  которых превосходит  $r_c$ . В таком диоде магнитное поле ионов подавляет электронную эмиссию при  $r > r_c$ ; тем самым эффективный радиус диода для электронов становится равным  $r_c$ . Ионный ток, протекающий через диод, оказывается больше электронного в  $(R/r_c)^2$  раз.

В заключение этого раздела остановимся на вопросе о фокусировке электронного пучка. Вывод о наличии сильной фокусировки сразу следует из равенства нулю электрического поля у анода. Действительно, выполнение условий (53) и (26) означает, что скорость электронов на аноде обращается в нуль, что противоречит закону сохранения энергии. Поэтому при тех значениях  $r$ , где справедливы построенные решения, электронный поток не может коснуться анода, и электроны попадают на анод только вблизи оси диода, где наше решение становится неприменимым. Естественно попытаться найти такой профиль электродов, чтобы условия применимости решения оставались выполненными вплоть до возможно меньших радиусов. Этому требованию отвечает диод с коническим катодом ( $a(r)/r \approx \text{const}$ ). В его приосевой области нет характерного параметра с размерностью длины. Поэтому величина фокального пятна может определяться только осцилляциями электронов вокруг плавной траектории, но эти осцилляции можно сделать весьма малыми за счет плавного расширения периферической части диода \*\*).

\*) Строго говоря, в правую часть неравенства необходимо включить ещё тот электронный ток, который эмиттируется внутренней областью катода. Однако это приводит только к изменению численного коэффициента в оценке условия применимости решения.

\*\*\*) В реальных условиях на размер фокуса может влиять также перекрытие приосевой области плазмой, возникающей на электродах.



Конический диод вообще описывается построенными решениями точнее, чем диоды другой формы. Чтобы пояснить это, сравним его с плоским диодом, в котором зазор  $a(r)$  на большей части поверхности электродов постоянен. Для простоты ограничимся ультрарелятивистским случаем ( $\gamma \gg 1$ ), считая к тому же, что полный ионный ток существенно меньше электронного. Несложные вычисления показывают, что при этом практически во всей внутренней части плоского диода безразмерный потенциал  $\varphi_*$  на границе электронного потока близок к  $(2\gamma)^{1/3}$ , а огибающая потока имеет форму конуса:  $\alpha_+(r) = \alpha r / r_m$ , где  $r_m$  — точка максимума функции  $r/a(r)$ . За огибающей потенциал падает от величины  $(2\gamma)^{1/3}$  до единицы в тонком слое  $\Delta z \sim r / (r_m \gamma^{1/2})$ . Далее, по мере продвижения к катоду,  $\varphi$  уменьшается экспоненциально:

$$\varphi \sim \exp \left[ -\frac{4}{3} \frac{r_m}{r} \gamma^{1/2} \left( \frac{r}{r_m} - z \right) \right].$$

Магнитное поле электронов за слоем также убывает экспоненциально. По этой причине здесь довольно рано становится существенным магнитное поле ионов, что может привести к нарушению условий применимости модели. В случае же конического диода область экспоненциального спада поля отсутствует (она "заполнена" электродом), и критерий применимости результатов заметно смягчается.

### 5. Обсуждение результатов

В этом разделе мы сопоставим наши результаты с результатами других работ, относящихся к сильноточным диодам.

Как уже отмечалось в Введении, аналитическое исследование работы диода в слабом магнитном поле велось ранее на основе несамоогласованных моделей, которые могут претендовать в лучшем случае на точность порядка единицы. Шире всего известна так называемая парapotенциальная модель, которая при своей несамоогласованности все же правильно схватывает такие существенные черты, как преимущественная эмиссия электронов с периферии катода и по преимуществу радиальный характер движения электронов. Эта модель развита в работах [3, 4] (см. также [20]) и дает сле-

дующее выражение для тока через диод:

$$I = \frac{mc^3}{2e} \frac{R}{a} \gamma \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}). \quad (76)$$

Формула (76) относится к диоду с постоянным зазором. Ток, определяемый этой формулой, существенно отличается от результата, который дает для почти плоского диода ( $\min[a(r)/r] \approx a/R$ ) формула (47). Эти токи по-разному зависят от  $\gamma$  (см. рис. 9).

Еще значительнее отличается формула (47) от выражения для полного тока, приведенного без вывода в работе [5]:

$$I = \frac{mc^3}{2e} \frac{R}{a} \gamma^{1/2} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

Авторами работы [5] было найдено распределение полей и тока в области  $a < r \ll R$ , совпадающее с полученным в разделе 3. Однако для области  $r \sim R$ , определяющей полный ток через диод, решение построено не было, поскольку задача решалась без предположения о плавности профиля электродов.

Справедливость каждой из упомянутых моделей, в принципе, может быть проверена экспериментально. Точность, с которой измеряются ток и напряжение в диоде, для этого вполне достаточна. Однако при сравнении экспериментальных данных с теорией обычно возникает необходимость учесть изменение межэлектродного зазора за счет расширения плазменных слоев на катоде и аноде [21]. Это вносит в трактовку эксперимента существенную неопределенность. Кроме того, в экспериментах [21], специально предпринятых для выбора наиболее удачной теоретической модели, диод был плоским и имел резкие края, тогда как для количественной проверки теории предпочтителен диод с плавно расширяющимся (по радиусу) межэлектродным зазором. Если, отвлекаясь от этих обстоятельств, все же сравнить экспериментальные зависимости тока от напряжения с результатами, полученными в разделах 3 и 4 (формулы (47) и (66)), то можно отметить, что между ними имеется достаточно хорошее соответствие\*).

\* Сводка экспериментальных данных содержится в работе [20].



Решение, полученное в разделе 3, подтверждает сделанный в работе [5] вывод о возможности фокусировки электронного пучка в анодной плазме на начальной стадии работы диода, когда еще не играет роли эмиссия ионов. Если проводимость этой плазмы достаточно велика для полной нейтрализации объемного заряда и тока, то ускоренные электроны движутся внутри плазмы равномерно и прямолинейно со скоростью, которую они имели на границе. Как видно из результатов раздела 3, направления скоростей электронов на аноде таковы, что внутри плазмы происходит фокусировка пучка в малый объем. Расстояние фокуса от границы плазмы совпадает с найденным в работе [5]:

$$\delta z \sim a \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{-1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}).$$

Размер фокального пятна определяется наличием осцилляций вокруг плавной траектории частиц, конечностью толщины скин-слоя, а также неточностью, связанной с пренебрежением  $V_z$  по сравнению с  $V_r$  (см. раздел 3).

Фокусировка электронов в анодной плазме возможна и в том случае, когда проводимость позволяет скомпенсировать только объемный заряд, но не ток. При этом магнитное поле возвращает электроны, проникшие в плазму, обратно в диод. Испытывая многократные отражения от границы плазмы, электроны смещаются в радиальном направлении и попадают в приосевую область диода [7, 15]. Такой механизм фокусировки может осуществляться как в отсутствие, так и при наличии эмиссии ионов с анода. В последнем случае он важен только для диодов с резким краем, где электроны попадают в анодную плазму за счет большой амплитуды осцилляций (см. рис. 1). При плавном же профиле электродов действует механизм, рассмотренный в разделе 4, и фокусировка происходит уже в самом диодном промежутке, т.е. до того, как электроны попали в плазменный слой.

## Л и т е р а т у р а

1. C.D.Child. Phys. Rev., 32, 492, 1911.
2. I. Langmuir. Phys. Rev., 2, 450, 1913.
3. D. de Pach. Naval Research Laboratory, Radiation Project Internal Report No. 5, 1968.
4. J. Creedon. Phys. International Co. Report No. PIIR-17-72, 1972.
5. S.A.Goldstein, R.C.Davidson, J.G.Siambis, R.Lee. Phys. Rev. Lett., 33, 1471, 1974.
6. J.W. Poukey, J.R.Freeman, G. Yonas. J. Vac. Sci. Technol., 10, 954, 1973.
7. Дж. Ионас. ПМТФ, № 4, II, 1975.
8. О.И.Василенко, В.С.Воронин, А.Н.Лебедев. Препринт ФИАН № 107, Москва, 1976.
9. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов. ДАН СССР, 225, 1308, 1975.
10. Г.В.Ступаков. ПМТФ, № 3, 24, 1977.
11. S.J.Stephanakis, D.Mosher, G.Cooperstein, J.R.Boller, J.Golden. Phys. Rev. Lett., 37, 1543, 1976.
12. J.W. Poukey. J. Vac. Sci. Technol., 12, 1214, 1975.
13. S.A.Goldstein, R. Lee. Phys. Rev. Lett., 35, 1079, 1975.
14. Л.И.Рудаков, А.А.Самарский. Труды VI Европейской конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, Москва, 1973, стр. 487.
15. G.Yonas, J.W.Poukey, K.R.Prestwich, J.R.Freeman, A.J.Toepfer, M.I.Clauser. Nucl. Fusion, 14, 731, 1974.
16. A.E.Blaugrund, G.Cooperstein. Phys. Rev. Lett., 34, 461, 1975.
17. S.Miller, Z.Zinamon. Phys. Rev. Lett., 36, 1303, 1976.
18. G.Yonas, K.R.Prestwich, J.W.Poukey, J.R.Freeman. Phys.



Rev. Lett., 30, 164, 1973.

19. M.E.Read, J.A.Nation. J. Appl. Phys., 47, 5236, 1976.

20. J.Creedon. J. Appl. Phys., 46, 2946, 1975.

21. G.Cooperstein, J.J. Condon. J. Appl. Phys., 46, 1535, 1975.

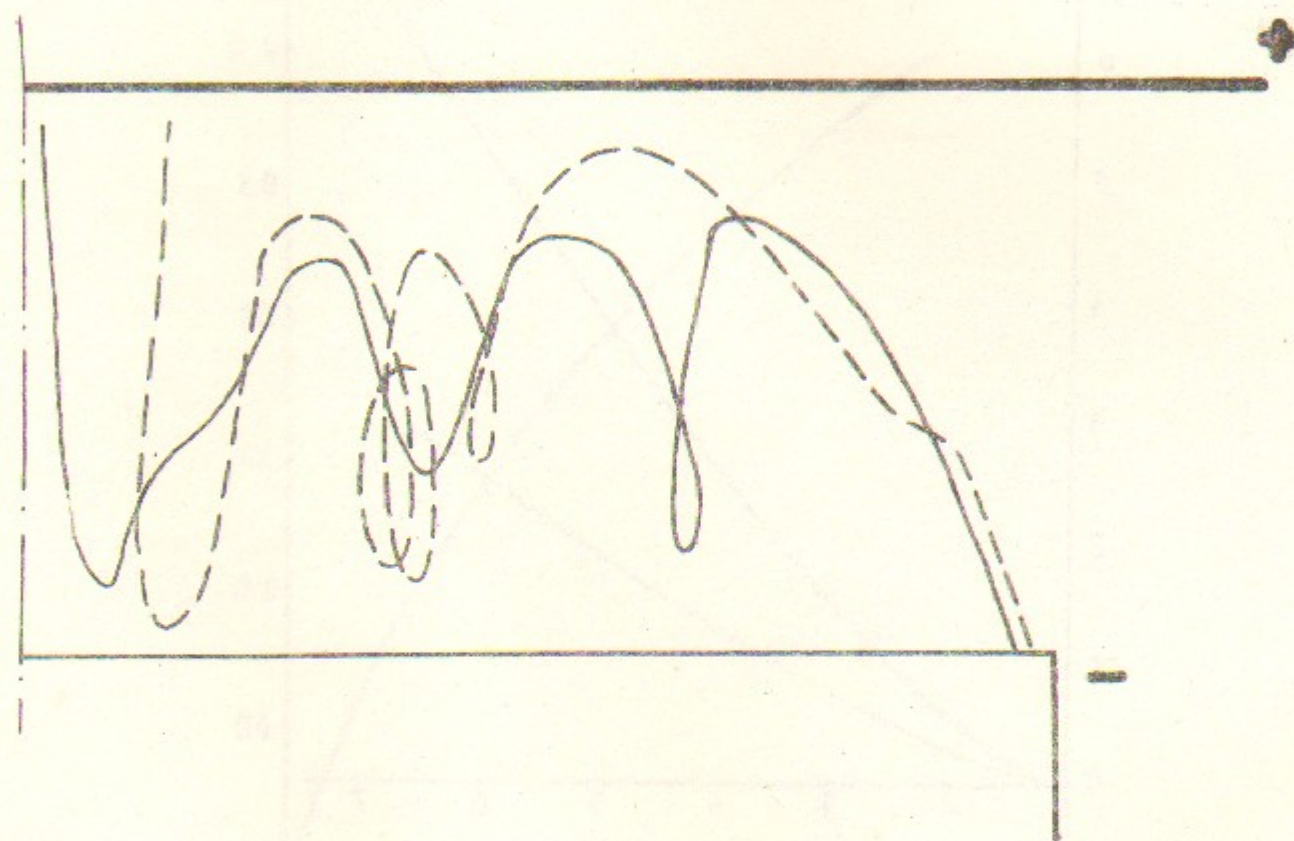


Рис. I. Качественный вид траекторий электронов в плоском сильноточном диоде (см. результаты численного счета /15/).



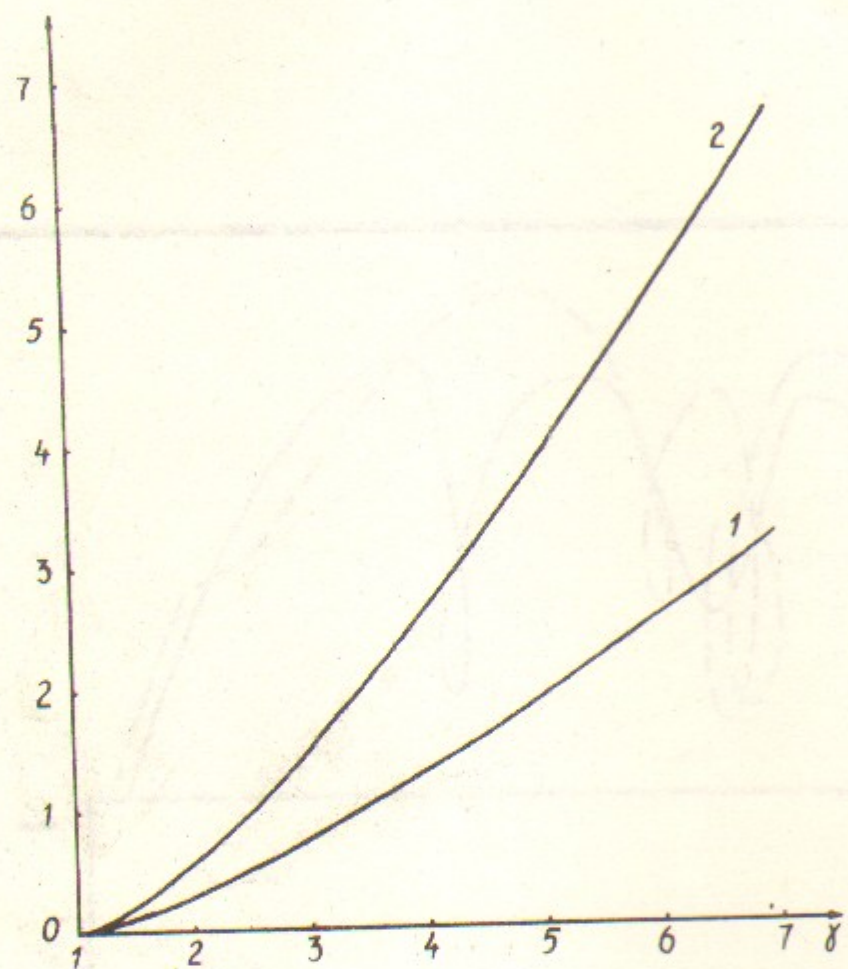


Рис.2. К вычислению диодного тока в сильном магнитном поле;  
 кривая 1 — график функции  $q(\gamma)$  (электронный диод);  
 кривая 2 — функция  $q_1(\gamma)$  (диод с ионами).

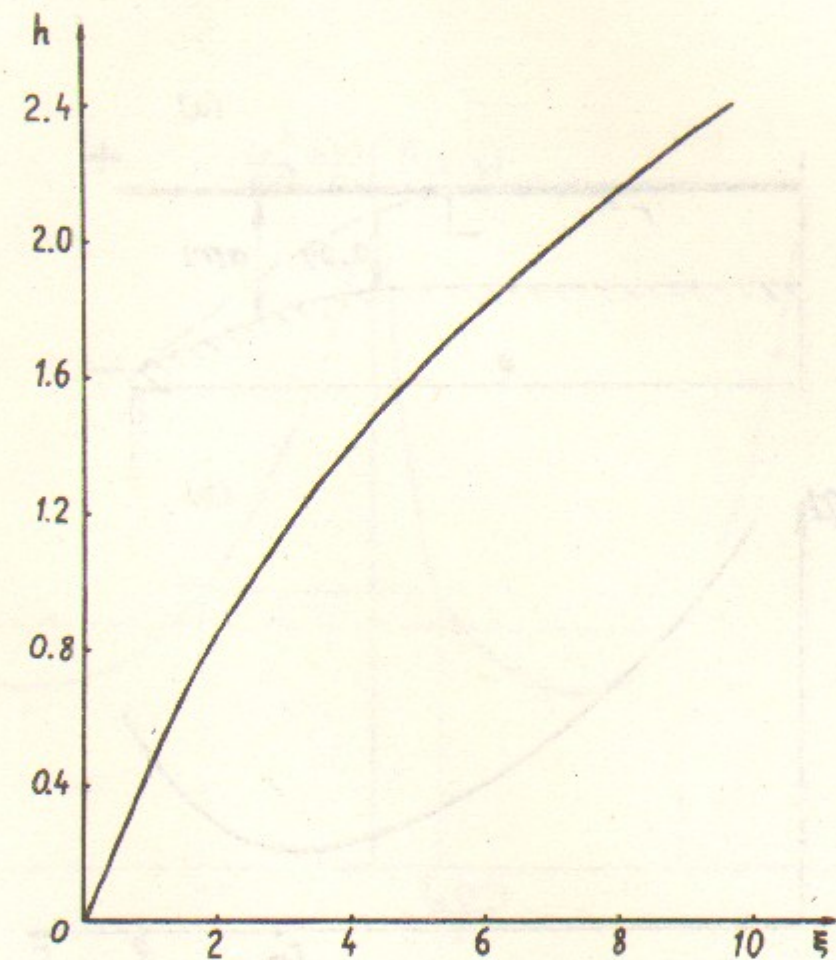


Рис.3. Радиальное распределение собственного магнитного поля  
 в электронном диоде (см.раздел 2); безразмерные пере-  
 менные  $h$  и  $\xi$  введены согласно формуле (8).



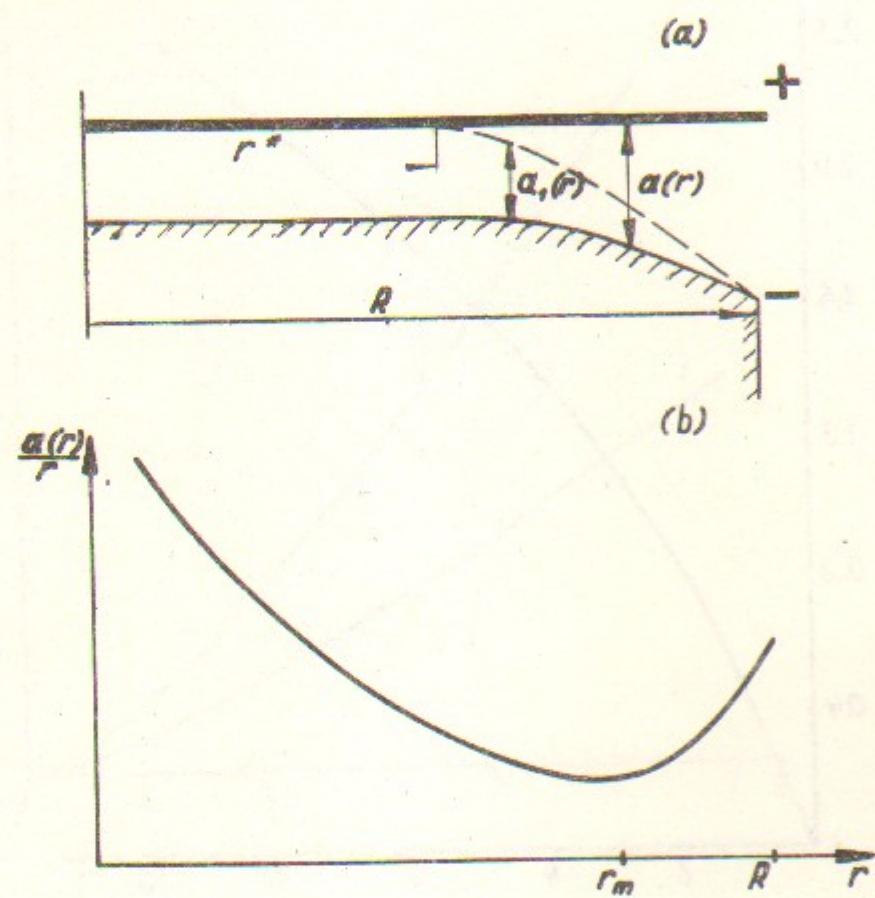


Рис.4. К решению задачи об электронном диоде без внешнего магнитного поля. ( а ) - геометрия электродов и огибающая пучка (показана пунктирной линией). Электроны заполняют область слева от огибающей. ( б ) - график функции  $a(r)/r$ .

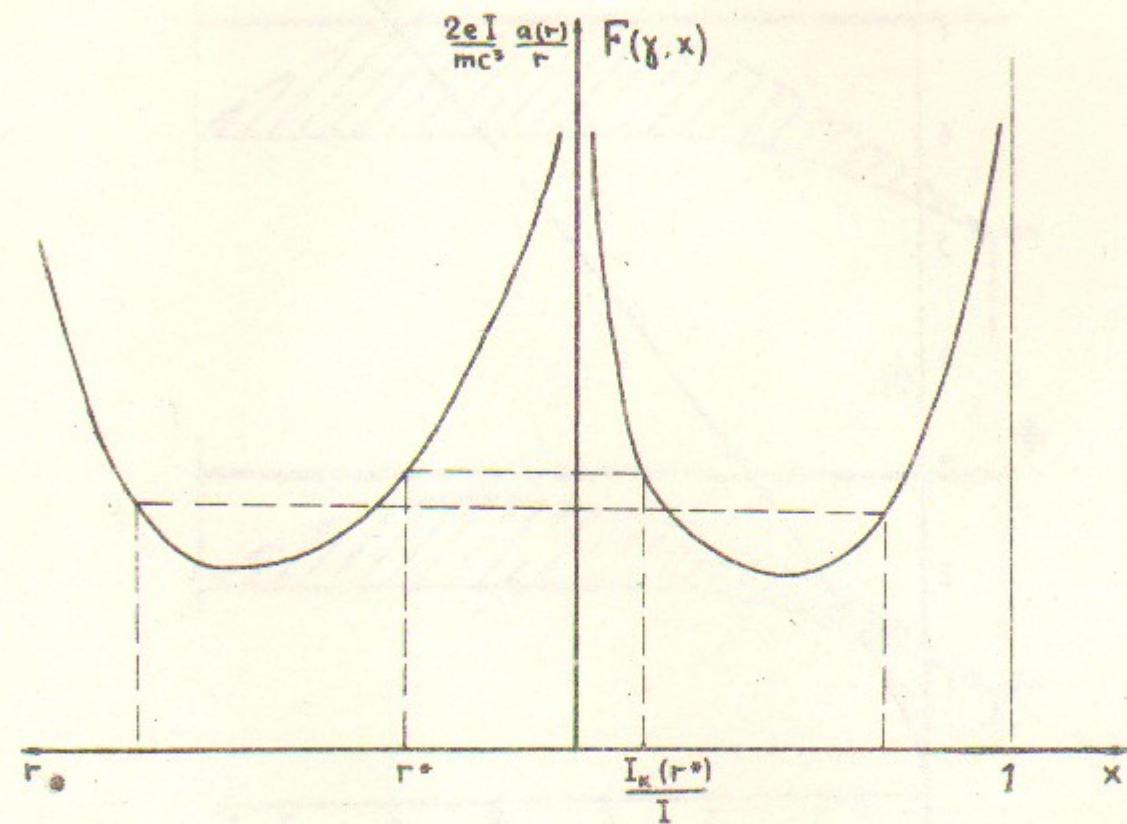


Рис.5. Графики левой и правой частей уравнения (45). Пунктиром показано, как устанавливается соответствие между  $I_k$  и  $r$ .



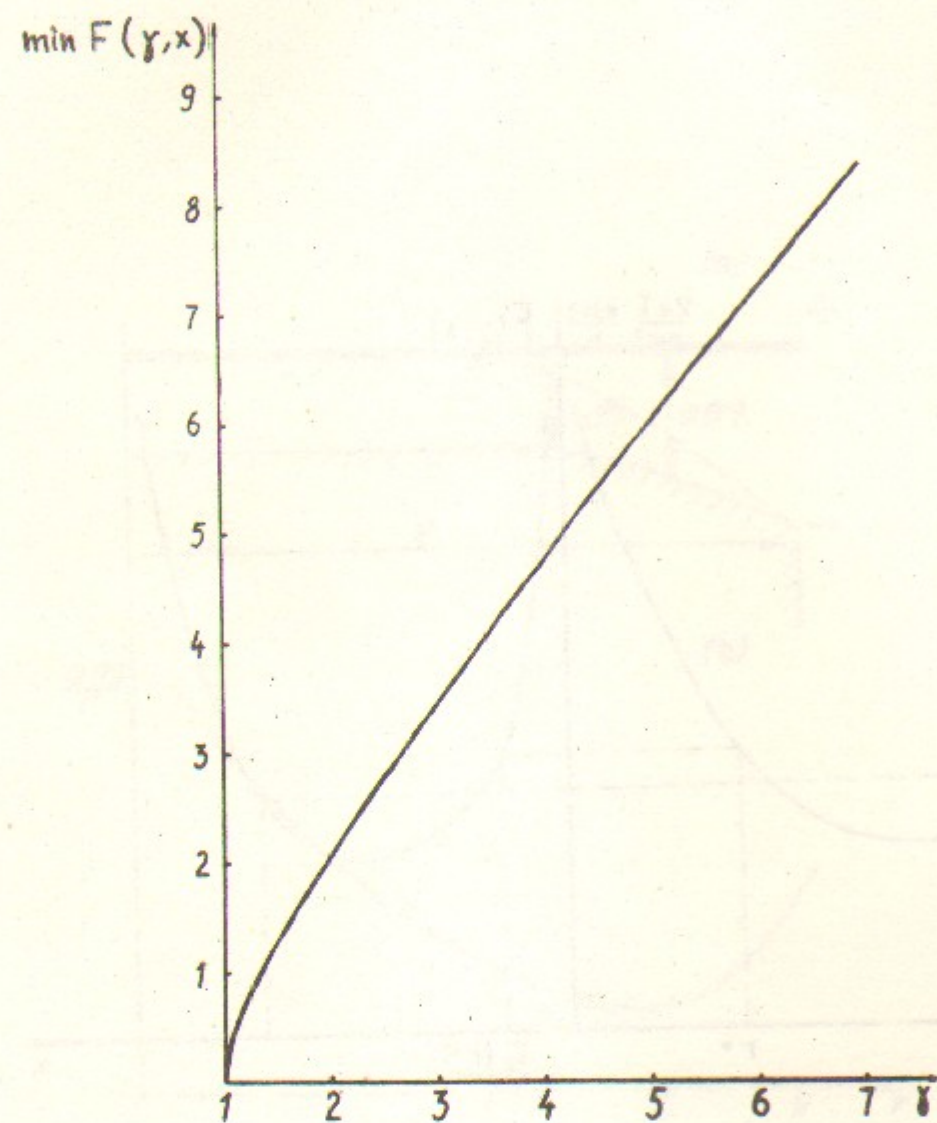


Рис.6. К зависимости тока в электронном диоде большого радиуса от приложенного напряжения. График функции  $\min_x F(\gamma, x)$  (см. формулы (47), (48)).

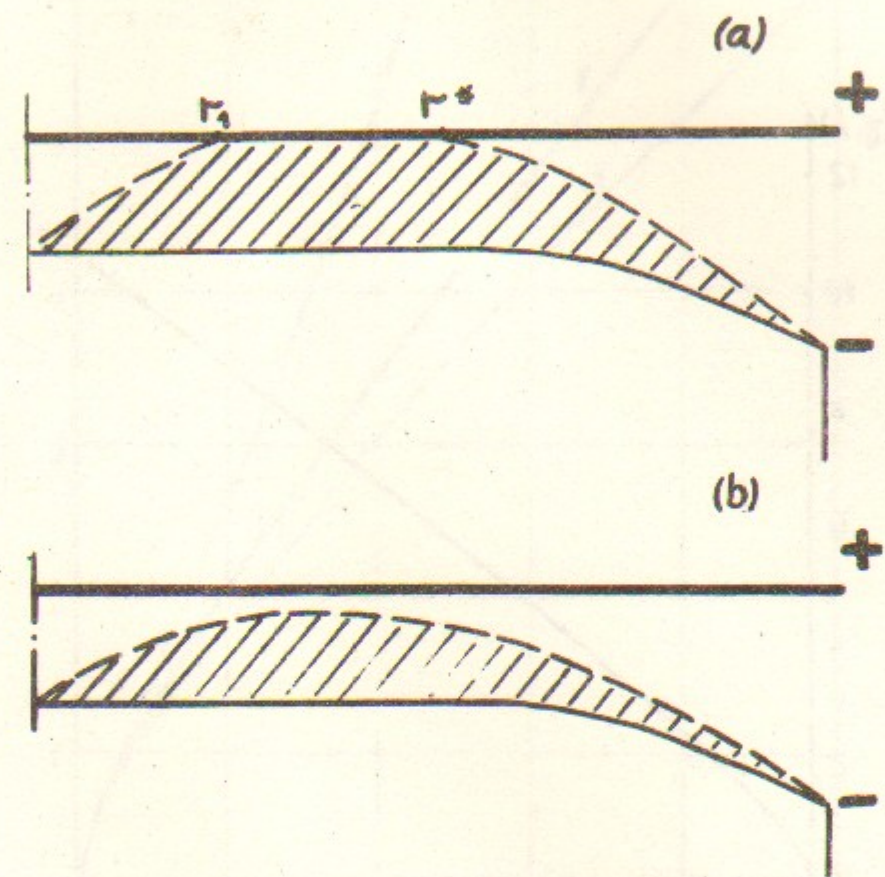


Рис.7. Огибающая электронного потока при наличии стороннего тока  $I_1$  на оси диода; (а) -  $I_1 < I$ ; (б) -  $I_1 > I$ . Величина  $I$  определяется по формуле (47).



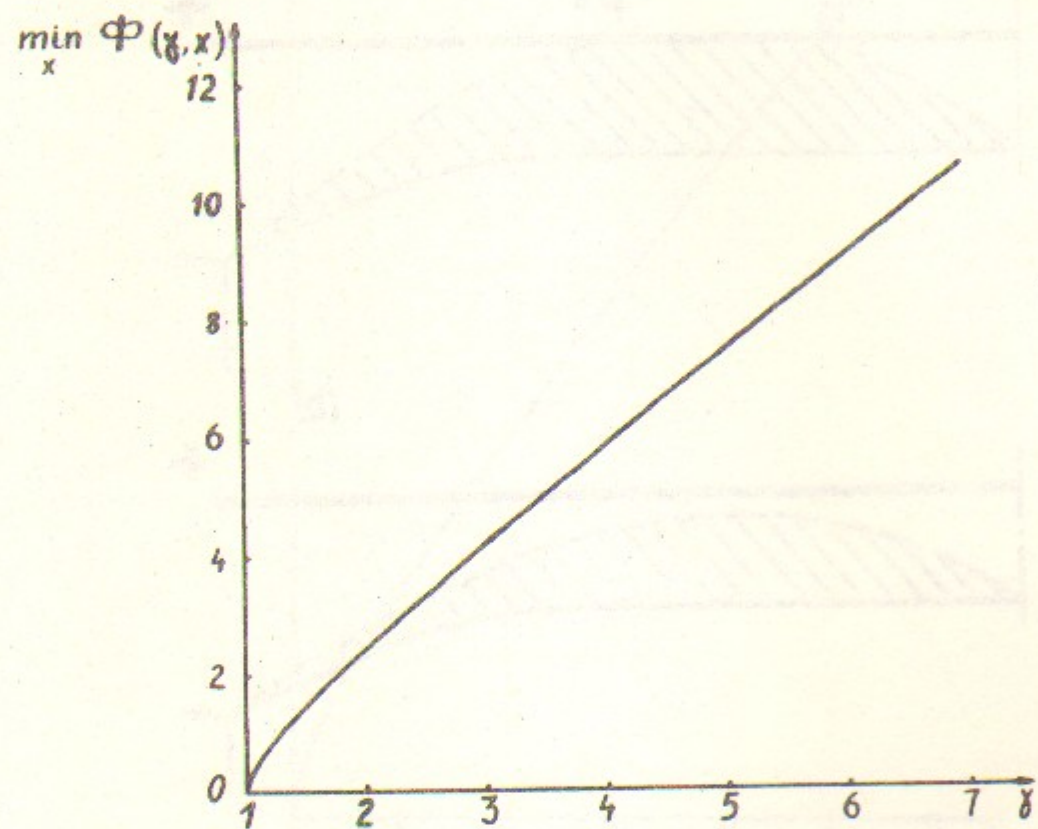


Рис.8. К определению зависимости электронного тока от приложенного напряжения в диоде с ионами. График функции  $\min_x \Phi(\gamma, x)$  (см. формулу (66)).

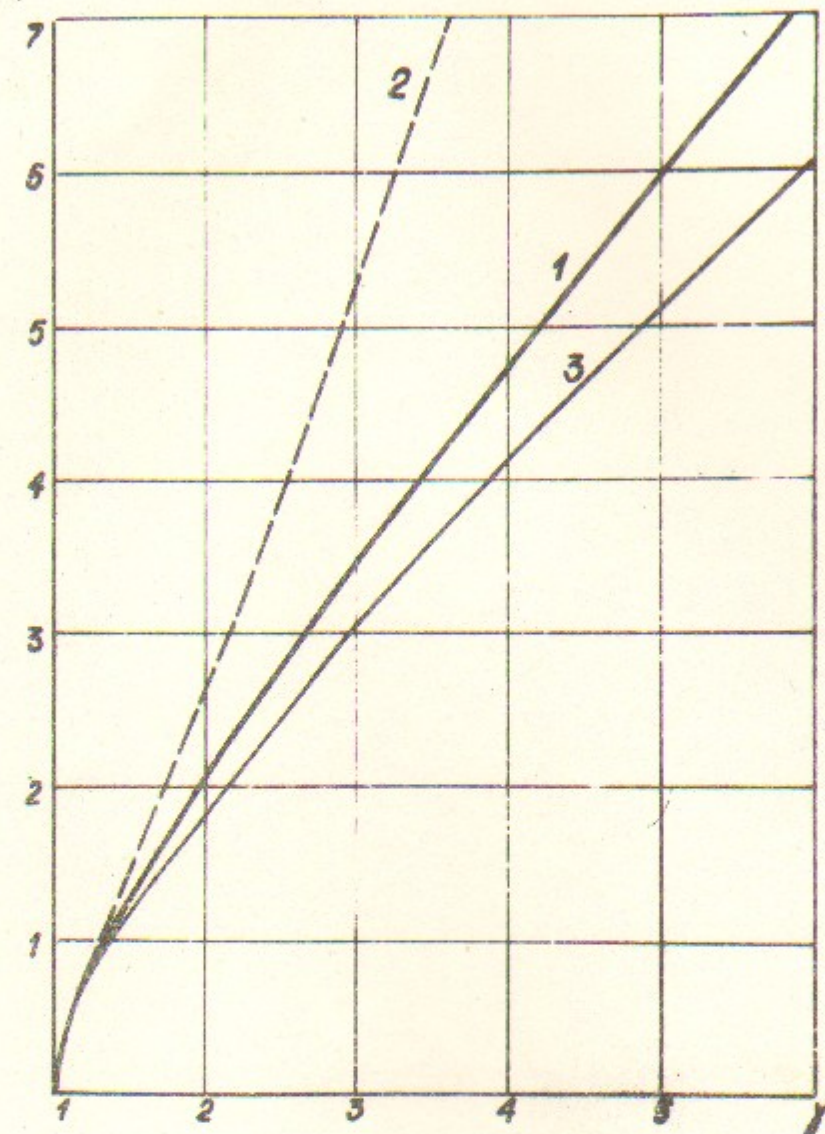
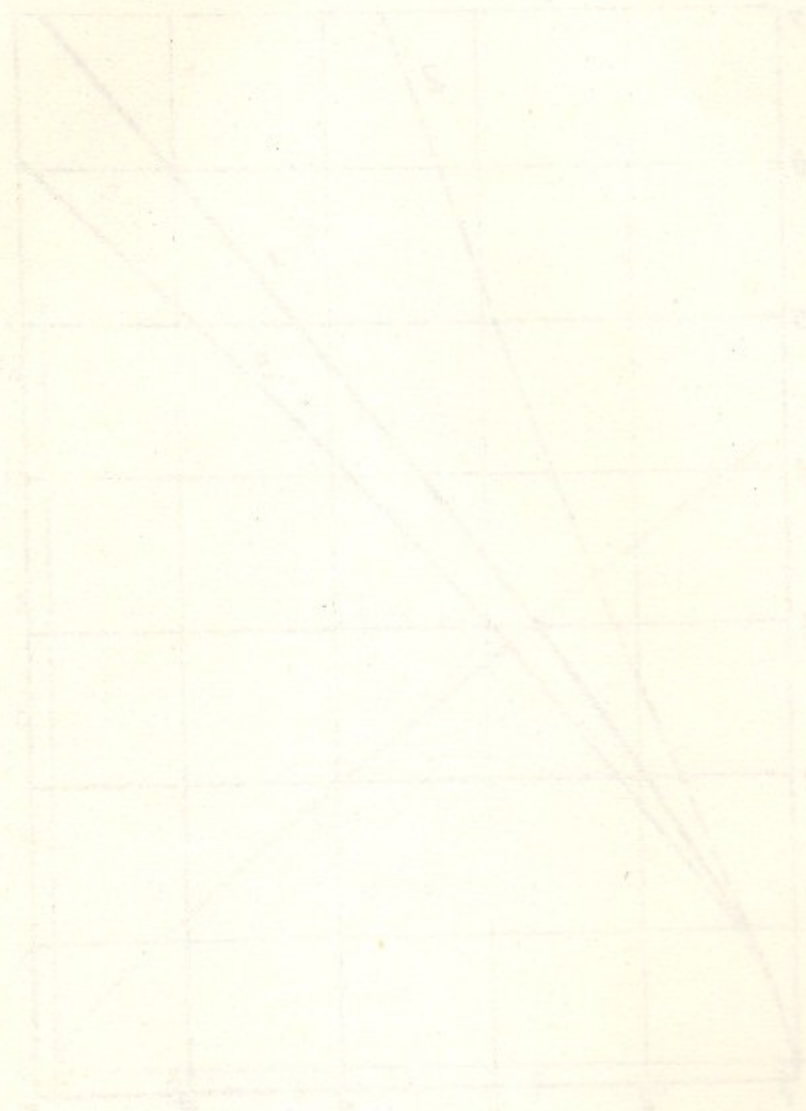


Рис.9. Сравнение различных моделей сильноточного электронного диода. По оси ординат отложена величина  $I \left[ \min \left( \frac{a}{r} \right) \right] \frac{2e}{mc^3}$ .  
 1 - Результат раздела 3 (формула (47)).  
 2 - Парapotенциальная модель /3, 4/.  
 3 - Результат работы /5/.





Работа поступила - 7 июня 1977 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ  
Подписано к печати 2.I-1978 г. МН 02601  
Усл. 2,1 печ.л., 1,9 учетно-изд.л.  
Тираж 250 экз. Бесплатно  
Заказ № 120.

---

Отпечатано на ротапринтере ИИФ СО АН СССР