

19
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77-26

Я.С.Дербенёв, С.А.Хейфец

**О ВОЗНИКНОВЕНИИ НЕОБРАТИМОСТИ
В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

Новосибирск

1977

Я.С.Дербенёв, С.А.Хейфец

О ВОЗНИКНОВЕНИИ НЕОБРАТИМОСТИ В ДИСКРЕТНОЙ
СИСТЕМЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуется поведение дискретной системы взаимодействующих нелинейных осцилляторов в зависимости от параметров системы. Статистическое описание строится путем усреднения по ансамблю начальных условий. Показано, что характер движения осцилляторов меняется с плотностью их распределения в фазовом пространстве dN/dw в согласии с критерием Б.В.Чирикова. В предельных случаях найдены способы построения рядов по степеням dN/dw и $(dN/dw)^2$, описывающих движение осцилляторов, соответственно, в устойчивом и стохастическом случаях. Обсуждается характер расщепления корреляций в системе.

В в е д е н и е

Цель данной статьи, продолжающей предыдущую работу авторов /16/, является выяснение условий, при которых возможно описание системы с помощью кинетического уравнения (к.ур.).

Как и в /16/, наш подход основан на обычном для статистической физики и принципиально необходимом для вывода к.ур. переходе к огрубленному описанию системы. Упомянутое огрубление достигается в статье усреднением по начальным условиям. Явное проведение этого усреднения оказывается, в принципе, достаточным для получения вида кин.уравнения, но лишь в том случае, когда динамический сдвиг частоты в системе $\sqrt{\omega'V}$ превышает расстояние между резонансами $d\omega/dN$, или параметр стохастичности $K > 1$

$$K = \sqrt{\omega'V} \frac{dN}{d\omega} > 1 \quad (I)$$

В противном случае поведение системы (даже после огрубления) остается чисто динамическим.

Таким образом, стохастичность движения обязана динамическим свойствам системы, а не огрубленности описания.

Полученное условие (I) находится в согласии с критерием, впервые сформулированным Б.В.Чирковым /4,5/.

При выводе к.ур., как и в /16/, мы отказываемся от привлечения каких-либо обычно используемых гипотез типа принципа ослабления корреляций /9,10/, или принципа причинности /11/.

Наш подход связан с точкой зрения, согласно которой существование иерархии корреляторов является необходимым условием описания системы с помощью кинетического уравнения, но сама иерархия возникает лишь как следствие определенных динамических свойств системы, и поэтому должна не предлагаться заранее, а получаться в процессе вывода кин.уравнения как следствие стохастичности движения. В том случае, когда такой иерархии нет (случай устойчивого движения), само введение кружно-структурной ф.р. и к.ур. теряет смысл.

Действительно, заменяя среднее любой (достаточно гладкой) физической величины по точной ф.р. на среднее той же величины

с огрубленной ф.р., мы вносим ошибку, среднеквадратичная величина которой зависит от отличия огрубленной двухчастичной ф.р. от произведения огрубленных одночастичных ф.р., т.е. от малости двухчастичного коррелятора. Поэтому, если нет иерархии корреляторов, не только нельзя получить уравнение для огрубленной ф.р., не зависящее от точных начальных условий, но и сама огрубленная ф.р. не дает описания системы.

Применяемый в работе метод огрубления приводит к формализму, имеющему внешнее сходство с формализмом /13/, применяемом при изучении стохастических дифференциальных уравнений. Существенное отличие состоит в том, что в рассматриваемой задаче нет случайного параметра или случайной функции, и свойства возникающих корреляторов всех порядков не заданы априори.

В качестве модели динамической системы в предыдущей работе /16/ был выбран нелинейный осциллятор, подверженный внешнему возмущению, которое, в отличие от работы Боголюбова-Крылова /3/, имеет дискретный спектр.

В этой работе в § 1 мы формулируем более удобную диаграммную технику, с помощью которой в § 2 заново получаем результаты работы /16/, снимая некоторые вопросы, которые оставались там невыясненными. В § 3 делается попытка обобщить полученные результаты на более сложную систему - систему нелинейных осцилляторов, взаимодействующих между собой. Гамильтониан такой системы в переменных действие I - угол θ имеет вид:

$$H = \sum_{k=1}^N H_0(I_k) + \frac{V_0}{2} \sum_{i+j} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (2)$$

Для простоты мы предполагаем, что взаимодействие имеет лишь одну гармонику, его амплитуда V_0 не зависит от I , а зависимость частот от действия линейна:

$$\frac{\partial H_0}{\partial I_k} = \omega(I_k) = \bar{\omega} + \omega' I_k; \quad \omega' = \text{const} \quad (3)$$

В такой задаче (мы называем её, в отличие от рассмотренной в /16/, согласованной задачей) учитывается влияние каждого осциллятора на все остальные.

Показано, что основные качественные результаты § 2, вклю-

чая критерий стохастичности и вид к.ур., остаются неизменными и для согласованной задачи. Однако оказывается, что вычислить точное значение коэффициента диффузии в данной модели с дальним действием трудно, что связано с медленным, степенным характером расщепления корреляций в рассматриваемой модели.

Обозначения в данной работе и в /16/ совпадают.

§ 1. Общие соотношения

Поскольку гамильтониан (2) не зависит от времени, удобно воспользоваться каноничностью движения по траектории $I(t) = I(\dot{I}, \dot{\theta}, t); \theta(t) = \theta(\dot{I}, \dot{\theta}, t)$ и выбрать начальные условия $I(0) = \dot{I}; \theta(0) = \dot{\theta}$ в качестве канонических переменных:

$$F(I(t), \theta(t)) = F(\dot{I}, \dot{\theta}, t); \quad H(I(t), \theta(t)) = H(\dot{I}, \dot{\theta}) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \{H; F\}_{\dot{I}, \dot{\theta}} = \mathcal{H}(\dot{I}, \dot{\theta}) F(\dot{I}, \dot{\theta}, t)$$

В дальнейшем мы будем использовать переменную $\dot{\omega} = \bar{\omega} + \omega' \dot{I}$ вместо \dot{I} .

В (1.1) оператор \mathcal{H}

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\dot{I}, \dot{\theta}) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial I_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} - \frac{\partial H}{\partial \theta_k} \frac{\partial}{\partial I_k} \right) \equiv \dot{L} + \dot{V} \quad (1.2)$$

$$\dot{L} = \sum_k \dot{L}_k; \quad \dot{L}_k = \dot{\omega}_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}$$

$$\dot{V} = \sum_{k,j} \dot{V}_{kj}; \quad \dot{V}_{kj} = \frac{\omega' V_0}{2} \sin(\theta_k - \theta_j) \left(\frac{\partial}{\partial \omega_k} - \frac{\partial}{\partial \omega_j} \right)$$

Решение (1.1) имеет вид:

$$F(\dot{I}, \dot{\theta}, t) = e^{-\mathcal{H}t} F(\dot{I}, \dot{\theta}, 0) \quad (1.3)$$

$F(\dot{I}, \dot{\theta}, 0)$ - начальное значение функции. Применим эти соотношения для одночастичной ф.р.^{x)}

$$f(1, t) = \int d\dot{I}_1 \dots d\dot{I}_N f_N \delta(1 - 1(t)) \quad (1.4)$$

x) Точнее, для тождественных частиц (сумма по перестановкам):

$$f_N(1, \dots, N, t) = \frac{1}{N!} \int d\dot{I}_1 \dots d\dot{I}_N f_N(1, \dots, N) \delta(1 - 1(t)) \dots \delta(N - N(t))$$

Отсюда $f(1, t) = \frac{1}{N} \int d\dot{I}_1 \dots d\dot{I}_N f_N \delta(1 - \kappa(t))$

Для факторизованного начального распределения отсюда следует (1.5)

где f_N^0 - начальное N - частичное распределение,
 $\Gamma \equiv (\omega, \theta)$, $d\Gamma = d\omega d\theta$
 $f(t) = f(i, \dots, N, t)$ - траектория частицы.

Для простоты будем предполагать начальное распределение факторизованным

$$f_N^0 = \prod_k f^0(\Gamma_k)$$

Перепишем (I.4) в виде:

$$f(1, t) = \int d\Gamma_1 G(1, 1, t) f^0(1) \quad (I.5)$$

где одночастичная функция Грина

$$G(1, 1, t) = \int d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N f^0(2) \dots f^0(N) e^{\mathcal{H}t} \delta(1-1) = \langle e^{\mathcal{H}t} \delta(1-1) \rangle \quad (I.6)$$

Здесь мы определили операцию усреднения $\langle \dots \rangle$, состоящую в интегрировании по всем начальным условиям, кроме начальных условий для пробной частицы, входящих в аргумент ф.Грина.

Аналогично определяется 2-х частичная ф.Грина:

$$G(1, 1; 2, 2, t) = \langle e^{\mathcal{H}t} \delta(1-1) \delta(2-2) \rangle \quad (I.6')$$

и т.д.

Таким образом, мы переходим от описания всей системы к описанию её малой подсистемы. Как объяснялось во введении, принципиально необходимо перейти от точной ф.Грина к огрубленной. В данном случае это достигается тем, что в качестве начального распределения при $t=0$ мы будем использовать её сглаженное значение. Тем самым проводится усреднение по различным значениям начальных условий с вероятностью $f^0(\Gamma)$, что означает пренебрежение имеющимися при $t=0$ корреляциями.

Как будет видно ниже, при $K \gg I$ эта процедура достаточно конструктивна для установления вида к.ур., хотя не является причиной его возникновения. Так, при $K \ll I$ движение остается динамическим, а не стохастическим, несмотря на усреднение. Более того, при $K \gg I$ движение становится стохастическим, уравнение, его описывающее, - универсальным и не зависящим (с известной точностью) от вида гладкой начальной ф. Поэтому функцию f можно выбрать достаточно произвольно. Для простоты мы будем

считать начальное распределение равномерным по фазам и постоянным:

$$f^0 = (2\pi \Delta\omega_\Sigma)^{-1} \theta(-|\omega| - \frac{1}{2} \Delta\omega_\Sigma) \quad (I.7)$$

В дальнейшем мы будем считать, что $N \rightarrow \infty$, $\Delta\omega_\Sigma \rightarrow \infty$ так, что спектральная плотность $N/\Delta\omega_\Sigma = dN/d\omega$ конечна. Такой предельный переход соответствует для начального распределения сохранению дискретного характера частотного спектра.

Таким образом, произвол в выборе ансамбля есть лишь в начальный момент, и мы не будем делать каких-либо предположений о характере корреляций при $t > 0$.

Удобно еще перейти к представлению взаимодействия:

$$G(1, 1, t) = \langle S^+(t) \rangle \delta(1-1(t)), \quad (I.8)$$

где

$$1(t) = \{ \omega_i, \theta_i(t) = \theta_i + \omega_i t \}$$

$$S(t) = e^{i\mathcal{H}t} e^{-\mathcal{H}t} = T \exp \left\{ - \int_0^t dt' V(t') \right\} \quad (I.9)$$

T - означает хронологическое упорядочение,

$$V(t) = e^{i\mathcal{H}t} \dot{V} e^{-i\mathcal{H}t} = \sum_{k,j} V_{kj}(t)$$

$$V_{kj} = \frac{\omega' V_0}{2} \sin(\varphi_k(t) - \varphi_j(t)) (\mathcal{D}_k(t) - \mathcal{D}_j(t)) \quad (I.10)$$

Здесь $\varphi_k(t) = \theta_k + \omega_k t$; $\mathcal{D}_k(t) = \frac{\partial}{\partial \omega_k} - t \frac{\partial}{\partial \theta_k}$

Таким образом, задача сводится^{x)} к отысканию $\langle S(t) \rangle$.

x) По определению $\langle S^+(t) \rangle = \int d\Gamma f^0(\Gamma) S^+(t) = (\int d\Gamma S(t) f^0(\Gamma))^+$ т.е. $\langle S(t) \rangle$ надо понимать как $\langle S \rangle = \int d\Gamma S f^0$, где f^0 стоит справа. При этом $\langle S^+(t) \rangle = \langle S(t) \rangle^+$. Для $f^0 = \text{Const}$ это не существенно.

§ 2. Несогласованная задача

Сначала рассмотрим более простую задачу, когда движение всех частиц, кроме пробной (первой частицы), можно считать заданным. Соответственно, пренебрегаем в (2) взаимодействием всех частиц между собой, кроме взаимодействия с первой и обратным воздействием первой частицы на остальные, что соответствует замене (I.10) на

$$V_{1\kappa}(t) = \frac{\omega' V_0}{2i} \sum_{\alpha} \alpha e^{-i\alpha \varphi_{\kappa}(t)} \quad (2.1)$$

Это взаимодействие удобно переписать в виде

$$V(t) = \frac{\omega' V_0}{2i} \sum_{\alpha} \alpha e^{-i\alpha \varphi_{\kappa}(t)} Q_{\alpha}(t) n_{\alpha}(t)$$

где $\alpha = \pm 1$, а воздействие всех частиц сводится к действию сигнала

$$n_{\alpha}(t) = \sum_{\kappa=2}^N e^{i\alpha \varphi_{\kappa}(t)} \quad (2.2)$$

Используя предположение (I.7), легко видеть, что среднее:

$$\langle n_{\alpha}(t_1) n_{\alpha}^*(t_2) \rangle = \delta_{\alpha, \alpha} \delta_{\Delta\omega_{\alpha}}(t_1 - t_2) 2\pi \frac{dN}{d\omega} \quad (2.3)$$

Здесь $\delta_{\alpha, \alpha}$ - символ Кронекера, а $\delta_{\Delta\omega_{\alpha}}(t_1 - t_2)$ - острая функция, отличная от нуля при $|t_1 - t_2| < \Delta\omega_{\alpha}^{-1}$ и равная в нуле $\delta_{\Delta\omega_{\alpha}}(0) = \frac{\Delta\omega_{\alpha}}{2\pi}$. При $\Delta\omega_{\alpha} \rightarrow \infty$, $\delta_{\Delta\omega}(t)$ переходит в δ - функцию Дирака.

Соотношение (2.3) имеет вид коррелятора белого шума, что наводит на мысль о возможности вычисления $\langle S(t) \rangle$ по аналогии с тем, как это делается в теории случайных процессов. Эта аналогия выглядит правдоподобно в свете теоремы Каца [14], говорящей, что сумма гармонических функций асимптотически может вести себя как случайная функция.

Однако ситуация сложнее, поскольку высшие средние не сводятся к парным и не содержат дополнительной малости. Например, среднее четвертого порядка (при $\alpha, > 0$)

$$\langle n_{\alpha}(t_1) n_{\alpha}(t_2) n_{\alpha}^*(t_3) n_{\alpha}^*(t_4) \rangle = \langle n(1) n^*(3) \rangle \langle n(2) n^*(4) \rangle + \langle n(1) n^*(4) \rangle \langle n(2) n^*(3) \rangle + 2\pi \frac{dN}{d\omega} \delta_{\Delta\omega_{\alpha}}(t_1 + t_2 - t_3 - t_4) \quad (2.3)$$

Аналогично, среднее n -го порядка содержит член $\delta_{\Delta\omega}(t_1 + \dots - t_n)$ что приводит, вообще говоря, к долговременным корреляциям.

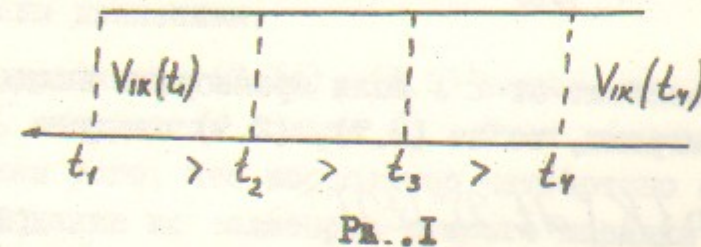
Рассмотрим усреднение S -матрицы:

$$\langle S(t) \rangle = \sum_n (-1)^n \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \langle V(t_1) \dots V(t_n) \rangle \quad (2.4)$$

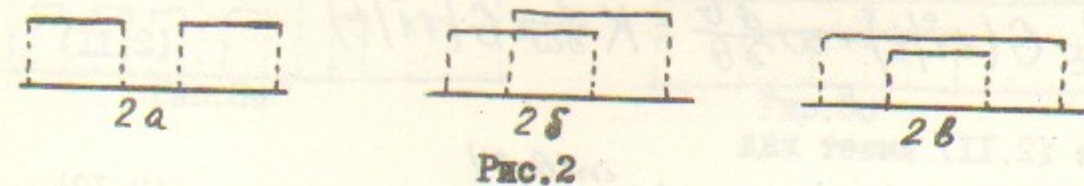
Оно сводится к последовательному выделению из нескольких множителей $V(t)$ одной и той же гармоники $V_{1\kappa}(t)$ (см. (2.1)) и усреднению:

$$\langle V_{1\kappa}(t_1) \dots V_{1\kappa}(t_n) \rangle = \int d\Gamma_{\kappa}^0 f(\Gamma_{\kappa}^0) V_{1\kappa}(t_1) \dots V_{1\kappa}(t_n) \quad (2.5)$$

Среднее в (2.4) представляется в виде (перекрывающегося) произведения одночастичных средних (2.5). Эту процедуру можно изобразить графически, сопоставив каждому множителю $V_{1\kappa}(t)$ вертикальные пунктирные линии, упорядоченные во времени, а усреднение (2.5) горизонтальную линию (с номером κ):



При этом усреднение (2.5) сводится к сумме диаграмм, каждая из которых соответствует разному способу выделения гармоник с одним номером из множителей $V(t)$:



При усреднении (2.4) $\langle S(t) \rangle$ разбивается на неприводимые бло-

ки, которые зависят (кроме Γ_1^0) только от своих переменных $\{\Gamma_a\}$. Обозначим вклад неприводимого блока после усреднения:

$$O_e(t_1 \dots t_e) = \langle V(t_1) \dots V(t_e) \rangle_0; \quad e \gg 1 \quad (2.6)$$

O_e Зависит лишь от переменных Γ_i . Тогда:

$$\langle S(t) \rangle = \sum_n \sum_{e=1}^n \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{e-1}} dt_e (-1)^e O_e(t_1 \dots t_e) \langle S_{n-e}(t_e) \rangle$$

Меняя порядок интегрирования, это соотношение можно переписать в виде уравнения Дайсона:

$$\langle S(t) \rangle = 1 + \sum_{e=1}^{\infty} \int_0^t dt' Q_e(tt') \langle S(t') \rangle \quad (2.7)$$

где

$$Q_e(tt_e) = (-1)^e \int_{t_e}^t dt_1 \int_{t_e}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_e}^{t_{e-1}} dt_{e-1} O_e(t_1 \dots t_e) \quad (2.8)$$

(Мы предпочитаем работать с неприводимыми диаграммами, а не в технике кумулянтов /15/, т.к. при этом не возникает вопроса о коммутативности операторов). С помощью (2.1), (2.3) легко найти, что неприводимая диаграмма второго порядка

$$Q_2(t_1, t_2) = \frac{5N}{\Delta \omega_z} (\omega' V_0)^2 \mathcal{D}_1^2(t_1) \delta(t_1 - t_2)$$

так что (переходя к пределу $N \rightarrow \infty, \Delta \omega_z \rightarrow \infty$)

$$Q_2(tt_1) = 2\pi (\omega' V_0)^2 \frac{dN}{d\omega} \mathcal{D}_1^2(t_1) \quad (2.9)$$

Отметим, что Q_2 не зависит от t . Если пренебречь вкладом высших неприводимых диаграмм, то из (2.7), (2.9) следует

$$\langle S(t) \rangle = \exp \left\{ K \int_0^t dt' \mathcal{D}_1^2(t') \right\} \quad (2.10)$$

$$K = 2\pi \left(\frac{\omega' V_0}{2} \right)^2 \frac{dN}{d\omega}$$

В этом приближении ф.Грина (1.8), а также одночастичная ф.распределения (1.5) удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} G(1i|t) + \omega \frac{\partial G}{\partial \theta} = K \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} G(1i|t) \quad (2.11)$$

Решение (2.11) имеет вид

$$G(1i|t) = \frac{1}{2\pi} \sum_n G_n(t) e^{in(\theta - \theta')} \quad (2.12)$$

$$G_n(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K t}} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega')^2}{4Kt} - i \frac{\omega + \omega'}{2} n t - \frac{K n^2 t^3}{12} \right\}$$

Эти результаты характерны для стохастического, диффузионного движения пробной частицы.

Проверим, насколько законно пренебрежение высшими неприводимыми диаграммами.

Диаграмма 4-го порядка (рис.1) дает

$$Q_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \Lambda \delta(t_1 - t_2 - t_3 + t_4) \quad (2.13)$$

$$\cdot \{ \mathcal{D}_1(t_1) \mathcal{D}_1(t_4) [\mathcal{D}_1(t_2) - i(t_3 - t_4)] [\mathcal{D}_1(t_2) - i(t_3 - t_4)] + \text{к.с.} \}$$

где $\Lambda = 2\pi \frac{dN}{d\omega} \left(\frac{\omega' V_0}{2} \right)^4$

Определяя из (2.8), (2.13) величину $Q_4(tt')$, легко видеть, что

$$Q_4(tt') \sim \Lambda (t - t')^4 \mathcal{D}_1^2(t') \quad (2.14)$$

Отметим, что $Q_4(tt')$ зависит от t , что не позволяет переписать (2.7) в виде дифференциального уравнения по времени. Уравнение для ф.Грина (или ф.р. $f(t)$) становится в отличие от (2.11) интегро-дифференциальным, определяя $f(t)$ через $f(t')$ при $t' < t$. Таким образом, высшие неприводимые диаграммы приводят к наличию "памяти" о предыдущей истории системы. Если существенны все высшие диаграммы, то, очевидно, мы имеем дело с динамическим движением.

Из сравнения (2.14), (2.9) видно, что при больших временах вклад Q_4 становится больше Q_2 . Этот результат является прямым следствием того, что коррелятор четвертого порядка не сводится к произведению корреляторов второго порядка (ср.(2.3)). Аналогичная ситуация возникает при сравнении других высших диаграмм.

Ситуация меняется, если в разложении (2.7) заменить неприводимые скелетные диаграммы $O_e(tt')$ типа рис.1 на "одетые" диаграммы рис.3.

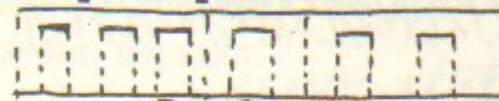


Рис.3а

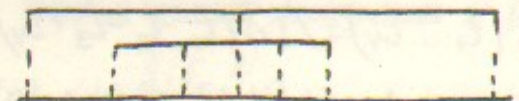


Рис.3б

Сначала рассмотрим "одевание" лишь горизонтальных линий (рис. 3а), пренебрегая одеванием вершин (рис. 3б). В этом случае:

$$\langle S(t) \rangle = 1 + \int_0^t dt' \sum_{\ell} \tilde{Q}_{\ell}(tt') \langle S(t') \rangle \quad (2.15)$$

где вклад неприводимой "одетой" диаграммы \tilde{Q}_{ℓ} типа рис. 3а выражается через

$$\tilde{Q}_{\ell}(t_1 \dots t_{\ell}) = \langle V(t_1) \langle S(t_1, t_2) \rangle V(t_2) \dots \langle S(t_{\ell-1}, t_{\ell}) \rangle V(t_{\ell}) \rangle \quad (2.16)$$

так же, как в (2.8).

В (2.16) $\langle S(t, t_2) \rangle$ определяется последовательностью неприводимых диаграмм:

$$\langle S(t, t_2) \rangle = 1 + \int_{t_2}^t dt' \sum_{\ell} Q_{\ell}(t, t') \langle S(t', t_2) \rangle \quad (2.16)$$

Если ограничиться одеванием неприводимыми диаграммами второго порядка, т.е. учесть только член $\ell = 2$, то (ср. с (2.10))

$$\langle S(t, t_2) \rangle = \exp \left\{ K \int_{t_2}^t dt' \mathcal{D}^2(t') \right\} = E(t, t_2 | \frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \theta}) \quad (2.18)$$

Мы ввели для этой величины новое обозначение во избежание путаницы в дальнейшем.

При $\Delta \omega \rightarrow \infty$ в этом приближении вклад диаграммы второго порядка (а также вид уравнения (2.11)) не меняется:

$$\tilde{Q}_2(tt') = Q_2(tt')$$

а также не происходит одевания вершин (для суммы рис. 2б, 2в дадут нуль).

Используя соотношения (2.16), (2.18) и тождество:

$$S(\frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \theta}) e^{\pm i\varphi(t')} = e^{\pm i\varphi(t')} S(\frac{\partial}{\partial \omega} \pm it', \frac{\partial}{\partial \theta} \pm i)$$

нетрудно вычислить вклад "одетой" неприведенной диаграммы четвертого порядка. Вместо (2.13) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_4(t_1 \dots t_4) = & \Lambda \delta(t_1 - t_2 - t_3 + t_4) \{ \mathcal{D}_1(t_1) \mathcal{D}_1(t_4) [\mathcal{D}_1(t_2) - i(t_3 - t_4)] \cdot \\ & \cdot [\mathcal{D}_1(t_3) - i(t_3 - t_4)] \cdot E(t_1, t_2 | \frac{\partial}{\partial \omega} - it_1, \frac{\partial}{\partial \theta} - i) \cdot \\ & \cdot E(t_2, t_3 | \frac{\partial}{\partial \omega} - i(t_1 - t_2), \frac{\partial}{\partial \theta}) E(t_3, t_4 | \frac{\partial}{\partial \omega} + it_4, \frac{\partial}{\partial \theta} + i) + \text{к.с.} \} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Множители

$$E(t_1, t_2) E(t_2, t_3) E(t_3, t_4) \sim \exp \{ -K(t_1 - t_2)^2 [\frac{2}{3}(t_1 - t_2) + t_2 - t_3] \}$$

которыми отличается (2.19) от (2.13), экспоненциально затухают при

$$|t_1 - t_2| \sim |t_2 - t_3| \sim |t_3 - t_4| > K^{-1/3} \quad (2.20)$$

Это приводит к тому, что $\tilde{Q}_4(tt')$ перестает зависеть от t при $|t - t'| > \tau_c \sim K^{-1/3}$

В этом пределе: $\tilde{Q}_4(t') = \lim \tilde{Q}_4(tt') \approx -(\Lambda K^{1/3}) \mathcal{D}^2(t')$

и решение (2.15) при $Kt^3 \gg 1$ с учетом \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4 принимает вид:

$$\langle S(t) \rangle = \exp \left\{ \int_0^t dt' [\tilde{Q}_2(t') + \tilde{Q}_4(t')] \right\} \quad (2.21)$$

Показатель экспоненты в (2.21)

$$\tilde{Q}_2 + \tilde{Q}_4 \approx [1 - O(\Lambda K^{-1/3})] \tilde{Q}_2$$

Отличие от единицы определяется параметром $K^{-1/3}$ где K - параметр стохастичности (см. введение (3)). При $K \gg 1$ (что совпадает с критерием Чирикова) вклад диаграмм четвертого порядка оказывается малым, что оправдывает сделанное при выводе (2.21) предположение о возможности "одевать" скелетную диаграмму неприводимыми диаграммами второго порядка.

Утверждение (2.20) означает, что хотя исходное время корреляции (2.3) было неограниченным (см. также (2.14)), динамическое взаимодействие при $K \gg 1$ "злает" его конечным $\tau_c \sim K^{-1/3}$.

Это, в свою очередь, позволяет оценить вклад любой "одетой" диаграммы, включая диаграммы с вершинами (типа рис. 3б). Если в исходной скелетной диаграмме было ℓ пунктирных линий (что дает множитель $(\omega' V_0)^{\ell} (\partial/\partial \omega)^{\ell}$) и ν горизонтальных (каждой, как в (2.3), соответствует множитель $dN/d\omega$ и δ -функция по времени), то при $Kt^3 \gg 1$ вклад такой диаграммы в \tilde{Q}_{ℓ} будет порядка

$$\tilde{Q}_{\ell} \sim (\omega' V_0)^{\ell} \left(\frac{dN}{d\omega} \right)^{\nu} K^{\frac{1}{3}(\ell - \nu - 3)} \mathcal{D}^2(t) \sim K^{-\frac{\nu}{3}(\frac{\ell}{2} - \nu)} Q_2 \quad (2.22)$$

х) При $|t - t'| \ll K^{-1/3}$, $\tilde{Q}_{\ell}(tt')$ совпадает с $Q_{\ell}(tt')$

Действительно, из $(\ell-1)$ интегрирования по времени, каждое из которых дает $K^{-1/3}$, ν снялось за счет δ -функций; каждая из производных $(\partial/\partial\omega)$; кроме первой и последней, также дает множитель порядка $K^{-1/3}$.

Оценка (2.22) аналогична оценке $\mathcal{L}^{\ell} \tau_c^{\ell-1} t$ для величины ℓ -го куммулянта в теории стохастических дифференциальных уравнений /13/.

Отметим, что Ван-Кампен неявно предполагает, кроме условия $\mathcal{L} \tau_c < 1$, еще возможность выразить высшие свертки через низшие. Прделанный выше анализ показывает, что это предположение при $t \rightarrow \infty$ оправдывается в несогласованной задаче лишь в области стохастичности $K \gg I$ (при этом условии в (2.3) можно пренебречь сверткой четвертого порядка). В согласованной же задаче (см. § 3) высшие куммулянты имеют тот же порядок, что и низшие, даже при $K \gg I$.

Из (2.22) видно, что при $K \gg I$ максимальный вклад дают диаграммы, в которых число взаимодействий вдвое больше числа усреднений. В несогласованной задаче такая неприводимая диаграмма единственная - второго порядка O_2 . Отметим также, что из (2.22) следует, что бессмысленно "одевать" скелетную диаграмму точнее, чем было сделано выше (в частности, вставлять "точную" ф.распределения вместо горизонтальных линий, не учитывая одновременно "одевания" вершин (рис.3б)). Таким образом, при $K \gg I$ поправки (2.21) от высших диаграмм малы, уравнение (2.11) не меняется, уточняется лишь величина коэффициента диффузии $K \rightarrow K[1 - O(K^{-1/3})]$.

Совсем другая картина получится, если $K \ll I$. Как видно из (2.21), диаграммы высокого порядка дают большой вклад. Легко показать /16/, что в этом случае максимальный вклад в $\langle S(t) \rangle$ дадут диаграммы, которые получаются, если в разложении (2.4) из каждого множителя $V(t)$ выделить одну и ту же гармонику $V_{k_1}(t)$ и провести усреднение (см.рис.4). При этом каждый член суммы (2.4) будет пропорционален $dN/d\omega$, и результат суммирования будет иметь вид $K f(\tilde{t}, \partial \tilde{\omega})$, где $\tilde{t} = \sqrt{\omega} \nu_0 t$; $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega} \nu_0}$ - безразмерные величины.

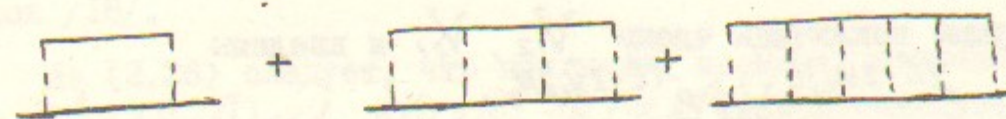


Рис.4.

Сумма графиков с двумя горизонтальными линиями дает поправку порядка $K^2 f(\tilde{t})$ и т.д., т.е. в K раз меньше. Проводимое так суммирование эквивалентно учету взаимодействия пробной частицы лишь с одной (двумя и т.д.) внешней гармоникой ω_k , а проводимое усреднение является усреднением по её частоте. Задача сводится к динамической задаче о взаимодействии двух осцилляторов.

Всюду выше мы считали $\Delta\omega_{\Sigma}$ достаточно большим $\Delta\omega_{\Sigma} \rightarrow \infty$. Теперь это условие можно уточнить.

Были существенны два обстоятельства: возможность обращаться с $\delta_{\Delta\omega_{\Sigma}}(t-t')$ как с δ -функцией Дирака и неявное использование предположения о том, что при диффузии частица не выходит из ширины спектра системы. Первое предположение законно, если

$$\Delta\omega_{\Sigma}^{-1} < t$$

Второе предположение верно, если при диффузии

$$\bar{\omega}^2 \sim Kt \ll (\Delta\omega_{\Sigma})^2$$

Это определяет применимость проделанного рассмотрения:

$$\Delta\omega_{\Sigma}^{-1} \ll t \ll \frac{\Delta\omega_{\Sigma}^2}{K}; \quad \Delta\omega_{\Sigma} \gg K^{1/3} \quad (2.23)$$

При $\Delta\omega_{\Sigma} < K^{1/3}$ к.ур. неприменимо, и вопрос о поведении пробной частицы остается открытым. Можно думать, что при этом систему внешних осцилляторов можно заменить одним осциллятором с суммарной мощностью. Анализ движения в этом случае становится тривиальным.

Получим теперь еще уравнение для двухчастичной ф.Грина $G(\Pi^0, 22^0/t)$, введенной в (1.6'), предполагая $K \gg I$. Удобно переопределить оператор эволюции $S(t)$, выделив явно взаимодействие между пробными частицами 1,2:

$$S(t) = e^{(L+2V_{12})t} e^{-\mathcal{H}t} = T \exp \left\{ - \int_0^t dt' \sum_{ij} V_{ij}(t') \right\}$$

Здесь из сумм исключены члены V_{12}, V_{21} и введены

$$V_{kj}(t) = e^{(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t} V_{kj} e^{-(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t}$$

Если $k \neq 1, 2$ и $j \neq 1, 2$, то $V_{kj}(t)$ совпадает с (I.10); $V_{ij}(t)$ и $V_{2j}(t)$ определены аналогично, но $\varphi_{1,2}(t)$ и $\mathcal{D}_{1,2}(t)$ — решение двухчастичной задачи:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(t) &= e^{(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t} \hat{Q}_{1,2} e^{-(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t} \\ \mathcal{D}_{1,2}(t) &= e^{(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_{1,2}} e^{-(\tilde{L} + 2\tilde{V}_{12})t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Усреднение в (I.6') должно проводиться по всем частицам, кроме пробных 1, 2.

При $K \gg I$ можно ограничиться неприводимыми диаграммами второго порядка (с точностью $K^{-4/3}$). Это дает

$$\langle S(t) \rangle = \exp \left\{ K \int_0^t dt' [\mathcal{D}_1^2(t') + \mathcal{D}_2^2(t') + 2\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 \cos(\varphi_1(t') - \varphi_2(t'))] \right\} \quad (2.25)$$

Из (2.25) и определения

$$G(1\dot{1}, 2\dot{2}, t) = \langle S^+(t) \rangle \delta(1 - \dot{1}(t)) \delta(2 - \dot{2}(t))$$

где $\dot{1}(t), \dot{2}(t)$ — траектории (2.24), легко получить уравнение для двухчастичной ф.Грина

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \omega' V_0 \sin(\theta_1 - \theta_2) \left(\frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \right] G(1\dot{1}, 2\dot{2}, t) = \\ = K \left[\frac{\partial^2}{\partial \omega_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \omega_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] G(1\dot{1}, 2\dot{2}, t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Начальное условие $1 \equiv (\omega_1, \theta_1), \dot{1} \equiv \dot{\omega}_1, \dot{\theta}_1$:

$$G(1\dot{1}, 2\dot{2}, 0) = \delta(1 - \dot{1}) \delta(2 - \dot{2})$$

Тому же уравнению удовлетворяет двухчастичная ф.распределения.

Как видно из (2.26), даже в отсутствии прямого взаимодействия между частицами 1, 2 двухчастичная ф.Грина не факторизуется, вследствие возникновения динамической корреляции между частицами (последний член справа в (2.26)). Физическая причина такой корреляции — взаимодействие обеих пробных частиц с одной и той же внешней системой осцилляторов. Характер расщепления этой динамической корреляции проанализирован в предыдущей работе ав-

торов /16/.

Из (2.26) следует, что при малых временах близкие траектории $\Delta \theta = (\theta_1 - \theta_2) \ll 1$, $\Delta \dot{\omega} = |\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2| \ll K^{1/3}$ экспоненциально расходятся, в согласии с общими положениями теории эргодичности (Чирков /5/):

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \theta(t))^2 \rangle &\sim \Delta^2 e^{\lambda t}, \quad \langle (\Delta \omega)^2 \rangle \sim \lambda^2 \Delta^2 e^{\lambda t} + O(e^{-\lambda t}), \\ \lambda &\equiv (4K)^{1/3}, \quad \Delta^2 = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\Delta \dot{\omega}}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \dot{\omega}}{\lambda} + \Delta \theta \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Начиная с времен $t \geq \tau_c \sim K^{-1/3} \ln 1/\Delta^2$, когда разность фаз становится порядка единицы, рост $\langle (\Delta \omega)^2 \rangle$ становится линейным

$$\langle (\Delta \omega)^2 \rangle \sim 4Kt$$

а двухчастичная ф.Грина факторизуется. Если $\Delta \dot{\omega} > K^{1/3}$, то факторизация начинается раньше, с времен $t \geq \Delta \dot{\omega}^{-1}$.

При этих временах все ненулевые гармоники ф.Грина становятся малыми:

$$G_{n,-n} / G_{00} \sim (t \Delta \omega(t))^{-n} \quad (2.27)$$

$$\Delta \omega(t) = \max \{ \Delta \dot{\omega}, \sqrt{4Kt} \}$$

и независимыми от своих начальных значений. Начальные корреляции экспоненциально затухают со временем (с декрементом порядка $K^{1/3}$), поэтому их явный вид не существен. Это позволяет оправдать произвол в выборе начального распределения, по которому мы проводим усреднение, а также объясняет, почему коэффициент диффузии K зависит лишь от такой грубой характеристики внешнего возмущения как средняя плотность резонансов $dN/d\omega$.

Значение нулевой гармоники приближается к своему факторизованному значению $G_0(1)G_0(2)$ по степенному закону:

$$[G_{00}^{(12)} - G_0(1)G_0(2)] / G_0(1)G_0(2) \sim (t \Delta \omega(t))^{-1} \quad (2.28)$$

Этот результат определяет одновременно дисперсию одночастичной ф.Грина, вносимую рассматриваемым в работе способом усреднения (сравни с рассуждением на стр.5). Видно, что при $Kt^3 \gg 1$ она становится малой, показывая тем самым, что усреднение не является причиной возникновения стохастичности, как это и утверждалось выше.

Поскольку ненулевые гармоники одночастичной ф.Грина (2.12) убывают экспоненциально, то их величина определяется их дисперсией, которая по (2.27) убывает со временем степенным образом, пока не станет порядка стохастических флуктуаций.

Аналогично с той же точностью можно получить уравнение для трехчастичной ф.Грина или ф.распределения:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + U_{12} + U_{13} + U_{23}\right) f(123/t) = 0 \quad (2.29)$$

Здесь $\mathcal{L}_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} - K \frac{\partial^2}{\partial \omega_1^2}$

$$U_{12} = 2 \dot{V}_{12} - 2K \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial^2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2}$$

\dot{V}_{12} определено в (1.2).

Если ввести обычным способом корреляторы:

$$\begin{aligned} f(12/t) &= f(1,t) f(2,t) + R(12/t) \\ f(123) &= f(1) f(2) f(3) + f(1) R(23) + f(2) R(13) + \\ &+ f(3) R(12) + R(123) \end{aligned} \quad (2.30)$$

то уравнения для них примут вид:

$$\dot{R}_{12} + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) R_{12} = -U_{12} f_1 f_2, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{123} + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + U_{12} + U_{13} + U_{23}) R_{123} = \\ = -(U_{12} + U_{13}) f_1 R_{23} - (U_{13} + U_{23}) f_3 R_{12} - (U_{12} + U_{23}) f_2 R_{13} \end{aligned} \quad (2.31')$$

Эти соотношения позволяют оценить зависимость двух R_2 и трехчастичного R_3 корреляторов от времени и проверить характерное для метода БКГИ допущение $R_3 \ll R_2$. Например, если усреднить $\omega_i^2 \Phi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, где нулевая и первая гармоники функции Φ порядка единицы, двумя способами:

$$\overline{\omega_i^2} = \int \omega_i^2 \Phi f_0(1) f_0(2) d\Gamma_1 d\Gamma_2 \sim 2Kt$$

$$\overline{\omega_i^2} = \int \omega_i^2 \Phi R_{1,-1}(1,2) d\Gamma_1 d\Gamma_2 \sim t^{-2}$$

то можно прийти к выводу, что величина двухчастичного коррелятора (в среднем) в Kt^3 раз меньше.

Аналогичная оценка вклада трехчастичного коррелятора $R_{1,0,-1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ еще в (Kt^3) раз меньше, чем двухчастичного. Таким образом, при $Kt^3 \gg 1$ есть иерархия корреляторов, (к сожалению, лишь степенная), что и предполагается в методе БКГИ. Действительно, полученные нами соотношения совпадают с тем, что получается в методе БКГИ. Так, если в стандартном уравнении для R_{12} Боголюбовской цепочки а) пренебречь трехчастичным коррелятором; б) учесть, что все гармоники (кроме нулевой) одночастичной ф.р. экспоненциально затухают со временем; в) считать $R_{00} \sim R_{2,-2} \ll R_{1,-1}$, поскольку одночастичная ф.р. непосредственно возбуждает лишь гармонику $R_{1,-1} = R_{-1,1}^*$, то уравнение для $R_{1,-1}$ примет вид.

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{1,-1}(1,2,t) + i(\omega_1 - \omega_2) R_{1,-1} = \frac{\omega V_0}{2i} \left[f_0(1) \frac{\partial f_0(2)}{\partial \omega_2} - (1 \leftrightarrow 2) \right]$$

Если найденное отсюда значение коррелятора $R_{1,-1}$ подставить в уравнение для нулевой гармоники одночастичной ф.р., то получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(1)}{\partial t} = \pi(\omega' V_0)^2 \sum_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int d\omega_2 \int dt' \cos[(\omega_1 - \omega_2)(t-t')] \cdot \\ \left[f_0(2t') \frac{\partial f_0(1t')}{\partial \omega_1} - f_0(1t') \frac{\partial f_0(2t')}{\partial \omega_2} \right] \end{aligned}$$

Переходя к пределу $t \rightarrow \infty$, окончательно:

$$\frac{\partial f_0(1)}{\partial t} = \pi(\omega' V_0)^2 N \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(f_0(2t) \frac{\partial f_0(1t)}{\partial \omega_1} - (1 \leftrightarrow 2) \right)_{\omega_1 = \omega_2} \quad (2.32)$$

В нашем выводе предполагалось, что для всех частиц, кроме пробной, начальное распределение определяется (1.7). Такое же распределение остается для них и в любой момент времени:

$$f_0(2) = (2\pi \Delta \omega_2)^{-1}, \quad 2 \neq 1, \quad |\omega| < \Delta \omega_2$$

Подставляя это значение в (2.32), найдем

$$\frac{\partial f_0(1)}{\partial t} = 2\pi \left(\frac{\omega' V_0}{2} \right)^2 \frac{\partial N}{\partial \omega} \frac{\partial^2}{\partial \omega_1^2} f_0(\omega, t)$$

т.е. то же, что следует из (2.11).

Таким образом, можно сказать, что иерархия убывающих корреляций и обрыв цепочки Боголюбова является необходимым условием

получения кинетического уравнения. Если нет иерархии, то в данных терминах нет и кинетики. Но сама по себе цепочка БКТИ не дает критерия возможности её обрыва. Таким условием является условие на динамические характеристики системы $K \gg I$.

§ 3. Согласованная задача

Попробуем найти уравнение для одночастичной ф.Грина в случае, когда все частицы взаимодействуют между собой. Мы попрежнему будем считать $\Delta\omega_x \gg K^{1/3}$. При $K \gg I$ можно было бы надеяться, что, как и в несогласованной задаче, главный вклад дадут низшие неприводимые диаграммы. Неприводимая диаграмма второго порядка снова даст (2.9), (2.10), (2.11). Вклад неприводимой скелетной диаграммы четвертого порядка получится из (2.13) заменой $(t_3 - t_4)$ в фигурных скобках на $2(t_3 - t_4)$. Так же, как в § 2, отсюда следует необходимость перехода от скелетных к "одетым" диаграммам. Однако, если в несогласованной задаче "одетая" диаграмма четвертого порядка в $K^{-4/3}$ раз меньше диаграммы второго порядка и т.д., то в случае согласованной задачи в нашей модели это не так: есть диаграммы любых порядков, вообще говоря, сравнимые по величине. Это связано с тем, что, кроме диаграммы типа рис.3, возможны диаграммы типа рис.5а с вставками, отдельно показанными на рис.5б.

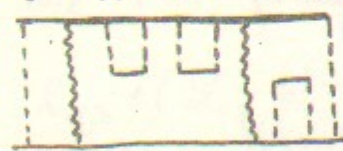


Рис.5а

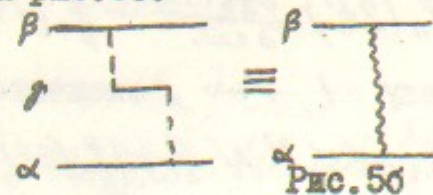


Рис.5б

Из оценки (2.22) ясно, что такая диаграмма порядка скелетной диаграммы второго порядка. То же будет, если в любую диаграмму вставить выражение (ср.рис.5б)

$$U_{\alpha\beta}(t) = 4 \int_0^t dt' \sum_r \int d^3r' f(r') V_{\beta\alpha}(t) V_{\alpha\beta}(t') = \quad (3.1)$$

$$= K \cos(\varphi_\beta(t) - \varphi_\alpha(t)) D_\beta(t) D_\alpha(t)$$

Эффективное взаимодействие $U_{\alpha\beta}(t)$, возникает за счет косвенного взаимодействия через возмущение других частиц. Вставка произвольного числа взаимодействий $U_{\alpha\beta}(t)$ (мы будем изображать

его волнистой линией как на рис.5б) в диаграмму не меняет, согласно (2.22), порядка величины диаграммы. Вставка невозможна лишь вначале и в конце диаграммы.

Например, непосредственное вычисление выражения \tilde{Q}_2 , соответствующего рис.6а, дает (ср. с (2.19)):

$$\tilde{Q}_2(t, t_4) = \sum_{\beta} \int_{t_4}^t dt_1 \int_{t_4}^{t_1} dt_2 \int_{t_4}^{t_2} dt_3 \cdot 2^4 \left(\frac{\omega' V_0}{2} \right)^2 < V_{\beta\alpha}(t_1) E_1(t_1, t_2) \cdot U_{\beta\alpha}(t_2) E_1(t_2, t_3) U_{\beta\alpha}(t_3) E_1(t_3, t_4) V_{\beta\alpha}(t_4) >$$

Оценка этого выражения действительно подтверждает, что $\tilde{Q}_2 \approx Q_2$.

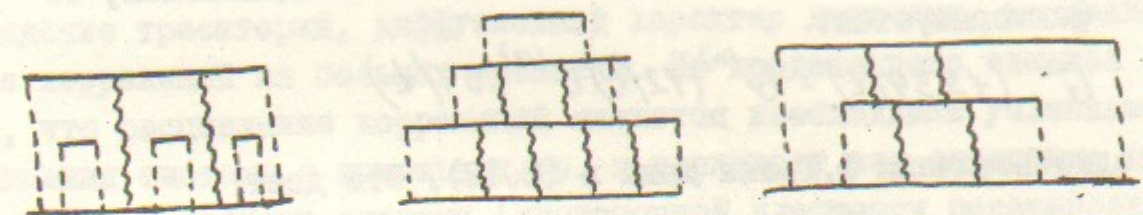


Рис.6а

6б

6в

Это означает, что существует много диаграмм одного порядка (например, рис.6б,в). Суммирование всех этих диаграмм вряд ли возможно. Поэтому определение $\langle S(t) \rangle$ и уравнения для ф.Грина в согласованной задаче даже в главном приближении - трудная задача. Можно лишь утверждать, что, поскольку все диаграммы одного порядка и дают при $Kt^3 \gg 1$ выражения одной структуры, то уравнения (2.9) + (2.11) не изменятся, но коэффициент диффузии K заменится на $K_{эфф} \approx K$.

В Приложении в качестве примера оценки роли высших диаграмм в согласованной задаче рассмотрена задача о суммировании цепочки:

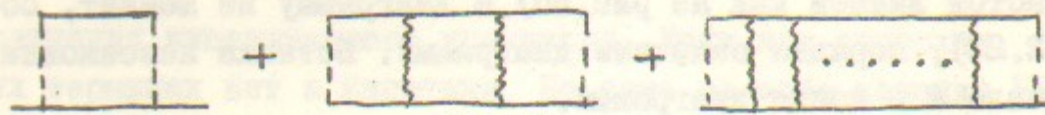


Рис. 7

где горизонталы "одеты" парными взаимодействиями.

Так как потенциал V_{12} модели имеет лишь первую гармонику, то в (п.10) входят лишь гармоники $G_{\pm 1, \mp 1}^{(n)}$ двухчастичной ф.Грина, которые экспоненциально убывают при больших временах. Поэтому, при $Kt^3 \gg 1$ (п.10) можно записать в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_1\right) G(1\bar{1}t) = \int d\Gamma_2 \mathcal{L}(12) G(2, \bar{1}, t) \quad (3.2)$$

где оператор $\mathcal{L}(12)$ имеет вид (для $f(2)$) из (1.7))

$$\mathcal{L}(12) = \frac{2}{\pi} \frac{dN}{d\omega} \int d\epsilon \int d\Gamma_3 d\Gamma_4 V_{13} G^{(n)}(1, 2, 3, 4/\epsilon) V_{24} \quad (3.3)$$

Если в (2.26) пренебречь корреляционным взаимодействием, то $G^{(n)}$ факторизуется:

$$G^{(n)}(1, 2, 3, 4/t) = G^{(n)}(12/t) G^{(n)}(34/t)$$

где одночастичная ф.Грина дана в (2.12). Это дает:

$$\mathcal{L}(12) = K \frac{\partial}{\partial \omega_1} \delta(1-2) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \quad (3.4)$$

причем после интегрирования по $d\Gamma_3 d\Gamma_4$ в (3.3) возникает $\delta(\epsilon)$, т.е. характерные $\epsilon \rightarrow 0$.

Хотя (3.4) означает, что уравнение (3.2) имеет тот же вид, что для несогласованной задачи, верить этому нельзя, поскольку характерные ϵ в (3.3) малы, а в этой области сделанное пренебрежение корреляционным взаимодействием незаконно. Таким образом, можно лишь сказать, что отличие от несогласованной задачи определяется малыми временами, на которых еще не произошла факторизация двухчастичной ф.Грина несогласованной задачи. Теперь можно сказать, что пренебрежение более сложными диаграммами рис.6 возможно, если динамические корреляции трех, четырех и т.д. частичных ф.Грина падают со временем быстрее, чем

двухчастичной. Из приведенных в конце § 2 оценок следует, что это так при $Kt^3 \gg 1$, хотя в нашей модели с дальнедействием здесь нет численного параметра, что и не позволяет вычислить коэффициент диффузии до конца, как это и обсуждалось выше.

З а к л ю ч е н и е

Выше было показано, что переход к крупноструктурной ф.распределения, осуществляемый усреднением по гладким начальным условиям, является достаточно конструктивным для вывода к.ур. Показано, что результат усреднения имеет совершенно разный характер при $K \gg 1$ и $K \ll 1$. При $K \ll 1$ характер движения остается динамическим (усредненным по начальным условиям). При выполнении критерия Чирикова $K \gg 1$ возникает к.ур., что соответствует стохастизации движения. Было показано, что возникающие уравнения действительно описывают экспоненциальное (на малых временах) расхождение траекторий, диффузионный характер движения, расщепление корреляций на больших временах. Из проделанного анализа ясно, что расщепление корреляций является необходимым условием описания системы с помощью к.ур. и возникает как следствие динамических свойств системы (достаточной плотности резонансов). Хотя в рассматриваемой системе нет таких понятий, как столкновения, сечение и т.п., тем не менее можно говорить о иерархии времен Боголюбова, где роль времени столкновения играет характерное время сигнала $\tau_s \sim \Delta \omega^{-1}$, а роль времени пробега - время расщепления корреляций $\tau_c \sim K^{-1/3}$, $\tau_s \ll \tau_c$.

Показано, что в несогласованной задаче главным является учет сверток второго порядка, что и определяет вид к.ур. Высшие свертки приводят в этой задаче лишь к малым поправкам порядка $K^{-4/3}$. В согласованной задаче это не так. Хотя вид уравнения определяется в низшем порядке верно, определение коэффициента диффузии в рассматриваемой модели с дальнедействием требует учета высших порядков. Их вклад убывает с ростом номера многочастичной ф.Грина за счет более быстрой факторизации. В данной модели факторизация происходит лишь по степенному закону, что затрудняет точное определение коэффициента диффузии.

В принципе, такая же ситуация с высшими средними возможна и в теории стохастических диф. уравнений.

Аналогия со стохастическими диф. уравнениями возникает и при анализе вопроса об обратимости времени. Само по себе диффузионное уравнение имеет один и тот же вид как при $t > 0$, так и при $t < 0$ (фактически, в него входит производная по $|t|$). Это означает возрастание энтропии в системе при удалении от $t = 0$ как "вперед", так и "назад", что отмечалось уже в работе [3]. Однако, если при $t = t_0 > 0$ задать лишь значение крупноструктурной ф.р. $f(t_0)$, пренебрегая всеми сложившимися к этому моменту корреляциями, то при $t < t_0$ сохранится, вообще говоря, диффузионный характер движения. В этом смысле уравнение не описывает обратной эволюции системы от t_0 к моменту $t = 0$. Причина этого — проделанный переход к крупноструктурной ф.р. Кинетическое уравнение будет описывать обратную эволюцию лишь, если при $t = t_0$ задать состояние системы (ансамбля) со всеми микрокорреляциями, сложившимися в результате взаимодействия при прямой эволюции от $t = 0$ к $t = t_0$. Аналогично, решение стохастических диф. уравнений зависит от момента времени, в который задается начальное условие [13].

В заключение авторы благодарят С.Т.Беляева, Б.В.Чирикова, А.Н.Скринского, Б.А.Румянцеву, А.М.Кондратенко, Э.В.Шуряка, В.Г.Залевинского, Ф.М.Израйлева, Н.С.Диканского за ценные обсуждения, особенно вопросов, затронутых во введении. Один из авторов (С.Х.) благодарен С.Е.Нодельсону за стимулирующие дискуссии.

Приложение

Покажем, что последовательность (рис.7) сводится, как и следует ожидать, к некоторому эффективному взаимодействию двух частиц.

Имеем

$$\langle S(t_1, t_2) \rangle = 1 + \int_{t_2}^{t_1} dt' \sum_n Q_n(t_1, t') \langle S(t', t_2) \rangle \quad (\text{п.1})$$

где

$$Q_n(t, t_n) = \sum_{\beta} \int_{t_n}^t dt_1 \int_{t_n}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_n}^{t_{n-2}} dt_{n-1}, \quad (\text{п.2})$$

$$2^n \langle V_{1\beta}(t_1) E_{1\beta}(t_1, t_2) U_{1\beta}(t_2) \dots E_{1\beta}(t_{n-1}, t_n) V_{1\beta}(t_n) \rangle$$

Здесь

$$V_{1\beta}(t) = \left(\frac{\omega' V_0}{2} \right) \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \mathcal{D}_1(t)$$

$$E_{1\beta} = E_i E_{\beta}, \quad E_i(t, t_2) = \exp \left\{ K \int_{t_2}^t dt' \mathcal{D}_i^2(t') \right\}$$

Выполнив суммирование по n , (п.1) можно переписать в виде:

$$\langle S(t, t') \rangle = 1 + 4 \sum_{\beta} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \langle V_{1\beta}(t_1) E_{1\beta}(t_1, 0) \tilde{S}_{1\beta}(t_1, t_2) \cdot E_{1\beta}(0, t_2) V_{1\beta}(t_2) \rangle \langle S(t_2, t') \rangle \quad (\text{п.3})$$

где введен оператор

$$\tilde{S}_{1\beta}(t_1, t_2) = T \exp \left\{ 2 \int_{t_2}^{t_1} dt' \tilde{U}_{1\beta}(t') \right\} \quad (\text{п.4})$$

$$\tilde{U}_{1\beta}(t) = E_{1\beta}(0, t) U_{1\beta}(t) E_{1\beta}(t, 0)$$

Преобразуем (п.3) к другому виду. Оператор $\tilde{S}_{1\beta}(t_1, t_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \tilde{S}_{1\beta}(t_1, t_2) = 2 \tilde{U}_{1\beta}(t_1) \tilde{S}_{1\beta}(t_1, t_2), \quad \tilde{S}(t, t) = 1$$

Тому же уравнению и начальное условие удовлетворяет

$$\tilde{S}_{1\rho}(t_1, t_2) = E_{1\rho}(0, t_1) e^{\dot{L}t_1} \exp[\varepsilon(-\dot{L} + \dot{\mathcal{L}}_{1\rho})] e^{-\dot{L}t_2} E_{1\rho}(t_2, 0) \quad (\text{п.5})$$

$$\varepsilon = t_1 - t_2, \dot{L} = \sum_{\alpha} \dot{L}_{\alpha}, \dot{\mathcal{L}}_{1\rho} = K \left(\frac{\partial^2}{\partial \dot{\omega}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \dot{\omega}_2^2} + 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{\partial^2}{\partial \dot{\omega}_1 \partial \dot{\omega}_2} \right) \quad (\text{п.6})$$

Используя (п.5), можно переписать (п.3) в виде:

$$\langle S(t, t') \rangle = 1 + 4 \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \sum_{\beta} \langle e^{\dot{L}t_1} \dot{V}_{1\rho} e^{\varepsilon(-\dot{L} + \dot{\mathcal{L}}_{1\rho})} \dot{V}_{1\rho} e^{-\dot{L}t_2} \rangle \langle S(t_2, t') \rangle \quad (\text{п.7})$$

Из (п.7) и определения (I.8) получим

$$G(1i, t) = \delta(1-i(t)) + 4 \sum_{\beta} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle S^+(t_2) \rangle$$

$$\langle e^{\dot{L}t_2} \dot{V}_{1\rho} e^{\varepsilon(\dot{L} + \dot{\mathcal{L}}_{1\rho})} \dot{V}_{1\rho} e^{-\dot{L}t_1} \rangle e^{\dot{L}t} \delta(1-i) \quad (\text{п.8})$$

Перенесем действие операторов, действующих на переменные i , на переменные $1 = (\omega, \theta)$, например: $e^{\dot{L}t} \delta(1-i) = e^{-\dot{L}t} \delta(1-i)$ и заменим переменную β на $-\beta$. Это позволяет поменять порядок действия операторов в (п.8). Снова используя (I.8), преобразуем (п.8) к виду:

$$G(1i, t) = e^{-\dot{L}t} \delta(1-i) + 4 \sum_{\beta} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\dot{L}t} \langle e^{\dot{L}t_1} \dot{V}_{1\rho} e^{\varepsilon(-\dot{L}_1 - \dot{L}_2 + \dot{\mathcal{L}}_{1\rho})} \dot{V}_{1\rho} \rangle G(1i, t_2)$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_1 \right) G(1i, t) = 4N \int_0^t dt_2 \langle \dot{V}_{12} e^{\varepsilon(-L_1 - L_2 + \mathcal{L}_{12})} \dot{V}_{12} \rangle G(1i, t-t_2) \quad (\text{п.9})$$

Здесь уореднение означает интегрирование $\int d\Gamma_2 f(\Gamma_2)$. Начальное условие, как всегда, $G(1i/0) = \delta(1-i)$.

Заметим, что выражение $\exp[t(-L_1 - L_2 + \mathcal{L}_{12})] \delta(1-i) \delta(2-2')$ равно двухчастичной ф.Грина несогласованной задачи $G^{(2)}(11', 22'/t)$ поскольку удовлетворяет тому же уравнению (2.26) и начальному условию. (Здесь отсутствует прямое взаимодействие V_{12} , поскольку мы пренебрегли его вкладом). Окончательно, уравнение

для одночастичной ф.Грина в лестничном приближении (рис.7) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_1 \right) G(1i, t) = 4N \int_0^t dt_2 \int d\Gamma_2 d\Gamma_3 d\Gamma_4 f(2) \dot{V}_{12} \cdot G^{(2)}(13, 24/t_2) \dot{V}_{34} G(3i, t-t_2) \quad (\text{п.10})$$

Л и т е р а т у р а

1. Г.М.Заславский, "Статистическая необратимость в нелинейных системах", "Наука", Москва, 1970.
2. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105, 1971 (3).
3. Н.Н.Боголюбов. Избранные труды т.П, стр.3, "Наукова думка", Киев, 1970.
4. Б.В.Чириков. АЭ, 6, 630 (1959).
5. Б.В.Чириков, Докторская диссертация, Новосибирск, 1969.
6. В.К.Мельников. ДАН 139, 31 (1961).
7. N.N.Filonenko, R.Z.Sagdeev, G.M.Zaslavsky, Nuclear Fusion 7, 253 (1967).
8. В.И.Арнольд. ДАН 156, 9 (1964).
9. Н.Н.Боголюбов, "Проблемы динамической физике", Гостехиздат, 1946.
10. К.П.Гуров. "Основания кинетической теории", Наука, 1966.
11. I.Prigogin, "Non-equilibrium statistical mechanics", New-York - London, 1962.
12. Б.В.Чириков. Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität zu Berlin, Ges.-Sprachw. R. XXIV (1975), 2.
13. H.G.Van-Kampen. Phys.Reports 24C, No. 3 (1976).
14. М.Кас. "Statistical independence in probability analysis and number theory" И Л Москва, 1963 г.
15. R.Broght. Phys.Rev. 115, 824 (1959).
16. Я.С.Дербенёв, С.А.Хейфец. Препринт ИЯФ СО АН 76-57, Новосибирск 1976.

Работа поступила - 9 декабря 1976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати II.Ш-1977г. МН 02680

Усл. 1,7 печ.л., 1,4 учетно-изд.л.

Тираж 180 экз. Бесплатно

Заказ № 26.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР