22

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 30

Б.Г.Конопельченко

О ЕДИНООБРАЗНОМ ОПИСАНИИ ГРУПП СИММЕТРИИ

Новосибирск
1977

О ЕДИНООБРАЗНОМ ОПИСАНИИ ГРУПП СИММЕТРИИ

Б.Г. Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается формулировка, в которой различные группы симметрии (группы внутренней симметрии, пространственно-временные группы, динамические группы и т.д.) описываются единым образом. Обсуждается связь между пространственно-временными группами и группами внутренней симметрии.

О ЕДИНООБРАЗНОМ ОПИСАНИИ ГРУПП СИММЕТРИИ

Б.Г.Конопельченко

I. Группы симметрии, встречающиеся в настоящее время в классических и квантовых теориях, весьма разнообразны. Это группы пространственно-временных симметрий, локальные группы симметрии, группы суперсимметрии, динамические группы симметрии (см., например, обзоры [I-5]). Различия между этими группами проявляются прежде всего в трансформационных свойствах величин, входящих в теории (волновых функций, полей). В случае пространственно-временных групп преобразуются как координаты x пространства-времени, так и сами величины: $x \to x'$, $\psi(x) \to \psi'(x') = f(\psi(x))$. (f - некоторая функция). Преобразования групп внутренней симметрии не затрагивают координат: $\psi(x) \to \psi'(x) = f(\psi(x))$. Группы суперсимметрии являются промежуточными между пространственно-временными группами и группами внутренней симметрии. В случае динамических групп $\psi(x) \to \psi'(x) = F(\psi(x))$, где F является дифференциальным оператором порядка не ниже второго. Например, уравнения Шредингера для гармонического трехмерного осциллятора инвариантно относительно преобразований (i, k, ℓ = I,2,3; ω_{ik} - произвольные числа)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + \omega_{ik}\big(\partial_i \partial_k - x_i x_k - \delta_{ik} + x_i \partial_k - x_k \partial_i\big)\psi(x), \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (I)$$

Группами симметрии подобного типа обладают и полевые уравнения. Уравнение Клейна-Гордона $(\Box + m^2)\psi(x) = 0$ инвариантно, например, относительно преобразований вида [6]

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) + \omega_{\mu_1 \ldots \mu_n} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \psi(x) \qquad (2)$$

где n - произвольное целое число. Существуют также группы симметрии, для которых F является интегро-дифференциальным оператором [7] .

Из перечисленных групп только пространственно-временные группы являются геометрическими, т.е. группами преобразований координат пространства-времени. Остальные же группы не являются таковыми - их действие задано непосредственно на полях или волновых функциях.

Существует, конечно, возможность геометризации этих групп путем введения таких вспомогательных пространств, что рассматриваемые группы будут группами преобразований координат этих пространств. Однако все эти вспомогательные пространства являются фиктивными и в каждом случае мы нуждаемся в своем пространстве. Так для групп унитарной внутренней симметрии - это комплексные пространства. В случае групп суперсимметрии - это суперпространства, часть координат которых является антикоммутирующими спинорами. Для группы преобразований вида (I.) -трехмерное пространство с координатами $\eta_i = x_i - \partial_i$. Для преобразований (2) - это пространства с координатами, являющимися тензорами ранга $n \geq 2$.

В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на другую возможность, а именно на возможность негеометрического рассмотрения пространственно-временных групп. Закон преобразования полей при этом имеет вид

$$\psi(x) \to \psi'(x) = F(\psi(x), \omega) \qquad (3)$$

где ω - параметры преобразований, F - некоторый оператор (вообще говоря, интегро-дифференциальный). При такой формулировке достигается единообразие в описании различных групп симметрии, т.к. во всех случаях преобразованиям подвергаются только поля. Специфика каждой группы сказывается в виде оператора F . Оказывается также возможным рассмотреть взаимосвязи между различными группами симметрии с новой точки зрения.

2. Рассмотрим произвольную непрерывную пространственно-временную группу $G : \{ x \to x' = gx, \ g \in G \}$.

Как известно, преобразованные поля выражаются через исходные поля в преобразованной пространственно-временной точке:

$$\psi(x) \to \psi'(gx) = f(\psi(x), \omega), \qquad (4)$$

или

$$\psi(x) \to \psi'(x) = f(\psi(g^{-1}x), \omega).$$

Для того, чтобы представить (4) в виде (3) рассмотрим инфинитезимальное преобразование

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) - \omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x) \psi(x) \qquad (5)$$

Здесь $\omega_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, n)$ - параметры преобразований, $\mathcal{D}_\alpha$ - инфинитезимальные операторы группы G , являющиеся дифференциальными операторами первого порядка. Формально интегрируя (5), получаем

$$\psi(x) \xrightarrow{G} \psi'(x) = exp\{-\omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x)\} \cdot \psi(x) \qquad (6)$$

Тем самым, действие пространственно-временной группы задано так, что преобразованное поле выражается через исходное в той же пространственно-временной точке.

В квантовой теории $[L_\alpha, \psi(x)] = i \mathcal{D}_\alpha(x) \psi(x)$ (L_α - генераторы группы) и мы опять приходим к (6)

$$\psi'(x) = exp\{i\omega_\alpha L_\alpha\} \psi(x) \, exp\{-i\omega_\alpha L_\alpha\} =$$

$$= \psi(x) + i\omega_\alpha [L_\alpha, \psi(x)] + \frac{i^2}{2!} \omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} [L_{\alpha_1}, [L_{\alpha_2}, \psi(x)]] + \ldots =$$

$$= \psi(x) + i^2 \omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x) \psi(x) + \frac{i^4}{2!} \omega_{\alpha_1} \omega_{\alpha_2} \mathcal{D}_{\alpha_1} \mathcal{D}_{\alpha_2} \psi(x) + \ldots =$$

$$= exp\{-\omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x)\} \cdot \psi(x).$$

Ясно, что в виде (6) может быть задана любая группа преобразований. Вид операторов $\mathcal{D}_\alpha$ (инфинитезимальных операторов) различен для разных типов групп. Для групп внутренней симметрии $\mathcal{D}_\alpha$ являются матрицами, для пространственно-временных групп

$\mathcal{D}_\alpha$ - дифференциальные операторы первого порядка, для динамических групп - дифференциальные операторы порядка $n \geq 2$ (см., например, (I), (2)). В случае, когда $\mathcal{D}_\alpha$ - дифференциальный оператор, мультиплеты соответствующих групп бесконечны и в качестве элементов базиса можно выбрать $\psi(x)$, $\mathcal{D}_\alpha(x)\psi(x)$, $\mathcal{D}_{\alpha_1}(x)\mathcal{D}_{\alpha_2}(x)\psi(x), \ldots, \mathcal{D}_{\alpha_1}(x)\cdots\mathcal{D}_{\alpha_n}(x)\psi(x), \ldots$. В такой формулировке уравнения, инвариантные относительно группы G представляют собой инвариантные комбинации базисных элементов $\psi, \mathcal{D}_\alpha\psi, \mathcal{D}_{\alpha_1}\mathcal{D}_{\alpha_2}\psi, \ldots$, группы G. Например, для группы Пуанкаре элементы базиса - это $\psi(x)$, $\partial_\mu\psi(x)$, $(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\psi(x)$, $\partial_\mu\partial_\nu\psi(x)$, $(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\partial_\rho\psi(x), \ldots$ и одно из простейших инвариантных уравнений -

$$\partial_\mu\partial_\mu\psi(x) + m^2\psi(x) = 0$$

Из инвариантности уравнения (и соответствующего действия) относительно преобразований (6) вытекает по теореме Нётер существование сохраняющихся величин. При этом однако необходимо учитывать, что соответствующий лагранжиан, в случае когда $\mathcal{D}_\alpha$ - дифференциальный оператор, не инвариантен относительно преобразований (6) (инвариантно только действие). В квантовой теории инвариантность уравнений и вакуума относительно преобразований (6) приводит, как обычно, к существованию сохраняющихся операторов и к уравнениям для функций Грина.

В рамках предлагаемого подхода мы можем единым для всех групп симметрии методом рассмотреть вопросы нелинейных реализаций, спонтанного нарушения симметрии и т.д. Мы также можем по-новому взглянуть на соотношения между группами внутренней симметрии, пространственно-временными группами и динамическими группами. В этой заметке мы остановимся только на одной стороне взаимосвязи между пространственно-временными группами и группами внутренней симметрии.

Рассмотрим для определенности пространственно-временную группу Лоренца. Для однокомпонентного поля $\psi(x)$ закон преобразования имеет вид (μ, ν = 0,1,2,3)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{-\omega_{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\}\cdot\psi(x) \quad (7)$$

В случае многокомпонентного поля

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{-\omega_{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + \Sigma_{\mu\nu})\}\cdot\psi(x) \quad (8)$$

где $\Sigma_{\mu\nu}$ - соответствующая спиновая матрица.

Пусть у нас имеется группа $SO(1,3)_B$ внутренней симметрии с законом преобразования

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{-\tilde{\omega}_{\mu\nu}\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}\}\cdot\psi(x) \quad (9)$$

Рассмотрим поле $\psi(x)$, являющееся однокомпонентным по отношению к группе Лоренца (7) и преобразующееся по некоторому конечномерному представлению группы $SO(1,3)_B$ внутренней симметрии. Зададим на таком поле $\psi(x)$ действие группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$, являющейся прямым произведением группы преобразований (7) и группы преобразований (9);

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\{-\omega_{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) - \tilde{\omega}_{\mu\nu}\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}\}\cdot\psi(x) \quad (10)$$

Сравнивая (8) и (10), мы видим, что преобразования (8) образуют подгруппу $SO(1,3)_{\Lambda.C.}$ группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$, соответствующую выбору $\tilde{\omega}_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}$ (и $\tilde{\Sigma}_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu}$). Таким образом, мы можем считать, что многокомпонентность поля ψ по отношению к пространственно-временной группе Лоренца связана на самом деле с группой $SO(1,3)_B$ внутренней симметрии.

Аналогично многокомпонентность поля по отношению к любой пространственно-временной группе может интерпретироваться как многокомпонентность по отношению к соответствующей группе внутренней симметрии. В таком подходе спин поля отщепляется от пространственно-временных групп и оказывается связанным с группами внутренней симметрии. Появление спина в унитарных симметриях (группа $SU(6)$), по-видимому, свидетельствует в пользу предлагаемого подхода.

4. Проиллюстрируем сказанное выше на двух примерах.

Пусть $\psi_\alpha(x)$ - свободное поле, являющееся скаляром по отношению к группе Лоренца и преобразующееся по представлению $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ группы $SO(1,3)_B$ внутренней симметрии ($\alpha = 1,2,3,4$), Уравнение Клейна-Гордона

$$(\Box + m^2)\Psi_\alpha(x) = 0 \qquad (11)$$

инвариантно, как легко видеть, относительно преобразований (10), образующих группу $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$ [x] и, следовательно, имеет решения, ковариантные по отношению к этой группе.

Рассмотрим теперь подгруппу $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$ группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$. Уравнение инвариантное относительно только этой подгруппы имеет вид

$$i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\,\partial_\mu \Psi_\beta + m\Psi_\alpha = 0 \qquad (12)$$

где γ_μ – матрицы Дирака. ($\alpha, \beta = 1,2,3,4$).

Поскольку уравнение (12) совпадает с уравнением Дирака и закон преобразования (8) поля Ψ_α относительно группы $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$ совпадает с законом преобразования дираковского спинора, то теория свободного спинорного поля вытекает из теории поля Ψ_α при сужении группы симметрии $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$ до подгруппы $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$.

Аналогично можно рассмотреть и векторное поле. Пусть скалярное по отношению к группе Лоренца $SO(1,3)_\Lambda$ поле V_i ($i = 0,1,2,3$) преобразуется по представлению ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) группы $SO(1,3)_B$ внутренней симметрии. Уравнение

$$(\Box + m^2)V_i(x) = 0 \qquad (13)$$

инвариантно относительно группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$. [xx] Если мы хотим рассматривать V_i как векторное поле, мы должны перейти от группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$ к ее подгруппе $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$.

---

[x] Отметим, что уравнение (11) инвариантно также относительно более широкой группы, а именно группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes GL(4, C)_B$. Группу Лоренца мы можем, естественно, расширить до группы Пуанкаре.

[xx] Более широкой группой симметрии является (группа Пуанкаре)$\otimes GL(4,E)_B$.

Действительно, для исключения одной компоненты поля $V_i(x)$ мы должны наложить условие

$$\partial_\mu V_\mu(x) = 0$$

которое инвариантно только относительно группы $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$.

При $m = 0$ выражения для тензора напряженностей

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

и уравнения Максвелла также инвариантны только относительно группы $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$.

Отметим, что для уравнений, инвариантных относительно группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$ (уравнения (11) и (13)) сохраняющимися величинами являются по отдельности генераторы $J_{\mu\nu}$ и $S_{\mu\nu}$ групп $SO(1,3)_\Lambda$ и $SO(1,3)_B$. Для уравнений инвариантных только относительно подгруппы $SO(1,3)_{\Lambda.c.}$ сохраняется лишь сумма $J_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$.

Подобным образом можно рассмотреть произвольное многокомпонентное поле.

Таким образом, многокомпонентность поля по отношению к группе Лоренца возникает в теории инвариантной относительно группы $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B$ в результате редукции $SO(1,3)_\Lambda \otimes SO(1,3)_B \to SO(1,3)_{\Lambda.c.}$.

Литература

1. Л.Мишель, М.Шааф, Симметрии в квантовой физике "Мир", 1974.
2. Ю.М.Широков, ЭЧАЯ, 3, 606 (1972).
3. Э.Б.Аронсон, И.А.Малкин, В.И.Манько, ЭЧАЯ, 5, 122(1974).
4. В.И.Огиевецкий, Л.Мезинческу, УФН, 117, 637 (1975).
5. Б.Г.Конопельченко, ЭЧАЯ, 8, 135 (1977),
6. Б.Г.Конопельченко, препринты ИЯФ СО АН СССР, 76-50(1976), 77-5 (1977).
7. В.И.Фущич, ТМФ, 7, 3 (1971), ТМФ , 7, 3 (1971), Lett, Nuovo CIM, 11, 508 (1974).

Работа поступила - 22 марта 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 30.III-1977 г. МН 02701
Усл. 0,6 печ.л., 0,5 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 30.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР