28

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 40

Я.С.Дербенёв, А.Н.Скринский

ЭФФЕКТЫ ЗАМАГНИЧЕННОСТИ В ЭЛЕКТРОННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

Новосибирск
1977

Я.С.Дербенёв, А.Н.Скринский

ЭФФЕКТЫ ЗАМАГНИЧЕННОСТИ В ЭЛЕКТРОННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается охлаждение пучка тяжелых частиц в сопутствующем электронном потоке, "замороженном" продольным магнитным полем. Распределение электронов по скоростям считается резко сплющенным в продольном направлении ($\Delta_{e\parallel} \ll \Delta_{e\perp}$). В этих условиях в области $\Delta_i < \Delta_{e\perp}$ (Δ_i - разброс скоростей ионов), благодаря дальнодействующему характеру кулоновских сил и замагниченности поперечного движения электронов, эффективная температура электронов определяется только продольным разбросом их скоростей. При этом, сравнительно с ситуацией $\Delta_{e\parallel} \sim \Delta_{e\perp}$, резко вырастает скорость охлаждения, и температура ионов может понижаться до продольной температуры электронов. Показано, что в определённых условиях этот эффект ограничивается отклонениями силовых линий магнитного поля от направления замкнутой орбиты тяжелых частиц на участке охлаждения.

Кинетика электронного охлаждения - метода охлаждения пучков тяжелых частиц, основанного на передаче тепловой энергии пучка сопутствующему электронному потоку вследствие кулоновских столкновений /I/, обладает рядом особенностей, отличающих её от обычной релаксации двухкомпонентной плазмы. Эти особенности обусловлены циклическим характером движения частиц охлаждаемого пучка и условиями формирования электронного потока.

Ранее /2,3/ были рассмотрены основные явления, связанные со спецификой движения частиц в накопителях, и сформулированы ограничения принципиального характера на возможные отклонения состояния электронного потока от термодинамически равновесного (в системе, сопутствующей охлаждаемому пучку). Практически эти требования могут быть удовлетворены без существенного снижения эффективности электронного охлаждения.

Успех первых экспериментов по охлаждению пучка протонов /4,5,6/ подтвердил общую оптимистическую оценку реализуемости метода и стимулировал дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования.

В данной работе рассматриваются особенности охлаждения в электронном потоке, сопровождаемом сильным магнитным полем и имеющем низкую (сравнительно с поперечной) продольную температуру. В работе /2/ приводилось кинетическое уравнение с учетом замагниченности электронов, с использованием интеграла столкновений в сильном магнитном поле, впервые полученного С.Т.Беляевым /7/. Однако конкретный анализ процесса охлаждения в /2/ был проведен в пренебрежении замагниченностью, так как начальное исследование электронного охлаждения ориентировалось в основном на ситуации, когда разброс скоростей электронов примерно одинаков по всем направлениям, а в таких условиях магнитное поле не изменяет существенным образом процесса релаксации. В дальнейшем В.В.Пархомчук обратил внимание на важное обстоятельство, что в варианте охлаждения в проходящем (не циркулирующем) пучке электронов, их продольная температура вследствие электростатического ускорения оказывается гораздо ниже температуры катода. Как показано в /6/, уровень шумов ускоряющего напряжения удается понизить до такой степени, что распределение электронов по скоростям в сопутствующей системе действительно остается резко сплющенным в продольном направлении. Исследование влияния замагниченности на процесс охлаждения в этих условиях было стимулировано работой Н.С.Диканского и Д.В.Пестрикова /8/, где рассматривалось когерентное взаимодействие пучка протонов с замагниченным электронным потоком и было показано, что декремент малых когерентных колебаний короткого сгустка может быстро увеличиваться при уменьшении продольного разброса скоростей электронов.

В данной работе показано, что совокупность двух факторов - замагниченности и малости продольной температуры электронов, может приводить к довольно неожиданному явлению - резкому ускорению охлаждения пучка тяжелых частиц при разбросе скоростей, меньшем поперечного разброса скоростей электронов ($\Delta_i < \Delta_{e\perp}$), и понижению его температуры до продольной температуры электронов, на несколько порядков меньшей температуры катода.

I. Известно, что при кулоновском взаимодействии обмен импульсом и энергией сталкивающихся частиц логарифмически расходится в области больших прицельных параметров и должен обрезаться на некотором макроскопическом параметре ρ_{max} , за которым взаимодействие оказывается эффективно уменьшенным. Отсюда ясно, что при столкновениях тяжелых частиц с электронами в магнитном поле в условиях, когда

$$r_L \ll \rho_{max}$$

(r_L - ларморовский радиус электронов), существенный вклад в интеграл столкновений может давать область прицельных расстоя-

ний ρ , удовлетворяющих условию:

$$r_L < \rho < \rho_{max} \qquad (I.I)$$

При этом, если скорость иона относительно ларморовского кружка, равная

$$\vec{u}_A = \vec{v} - \vec{v}_{e\parallel} = \vec{v}_\perp + \vec{u}_\parallel \qquad (I.2)$$

где $\vec{v}$ - скорость протона в сопутствующей системе электронного пучка, не превосходит поперечной к магнитному полю H скорости электрона $v_{e\perp}$, то во всей области (I.I) ионы эффективно взаимодействуют не со свободными электронами, а с ларморовскими кружками, так как длительность столкновения

$$\tau \sim \rho / u_A$$

превышает ларморовский период электрона.

С уменьшением u_A увеличивается длительность столкновения, а вместе с ней быстро возрастает интенсивность обмена. При этом в обмене участвует лишь продольная степень свободы электрона, так как столкновения происходят адиабатически медленно по отношению к ларморовскому вращению электронов. Эффект слабо, лишь логарифмически, зависит от величины магнитного поля и поперечной температуры электронов.

2. Силу трения $\vec{F}$ и тензор диффузии импульса $d_{\alpha\beta} = \frac{d}{dt}\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$ при столкновениях в сильном магнитном поле можно представить суммой

$$\vec{F} = \vec{F}^0 + \vec{F}^A$$
$$d_{\alpha\beta} = d^0_{\alpha\beta} + d^A_{\alpha\beta} \qquad (2.I)$$

где индексы "0" и "A" обозначают вклады обычных (быстрых) и адиабатических столкновений соответственно. Выражения $\vec{F}^0$ и $d^0_{\alpha\beta}$ хорошо известны /2,9/:

$$\vec{F}^0 = -\frac{4\pi n z^2 e^4}{m} \int L^0(u) \frac{\vec{u}}{u^3} f(\vec{v}_e)\, d^3 v_e \qquad (2.2)$$

$$d^0_{\alpha\beta} = 4\pi n z^2 e^4 \int L^0(u) \frac{u^2\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta}{u^3} f(\vec{v}_e)\, d^3 v_e \qquad (2.3)$$

где e и m – заряд и масса электрона, ze – заряд иона, n – плотность электронного потока, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_e$ – относительная скорость иона и электрона, $f(\vec{v}_e)$ – распределение электронов по скоростям. В случае релятивистских пучков все рассмотрение проводится в терминах сопутствующей системы.

В кулоновском логарифме

$$L^0(u) = \ln (r_L m u^2 / z e^2)$$

мы принимаем в качестве максимального прицельного параметра ρ^0_{max} быстрых столкновений средний ларморовский радиус электронов r_L. В случае вырожденных распределений электронов по скоростям определение ρ^0_{max} нуждается в уточнении, что будет сделано в дальнейшем, при более детальном рассмотрении эффектов магнитного поля.

Выражения $\vec{F}^A$ и $d^A_{\alpha\beta}$, приведенные в /2/, можно получить, используя известное выражение для тензора диффузии от быстрых столкновений и соотношение (см.Приложение I):

$$\vec{F}^A = \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \frac{d}{dt} \langle \Delta\vec{p}\, \Delta p_{\parallel} \rangle^A \qquad (2.4)$$

являющееся, вместе с аналогичным соотношением

$$F^0_\alpha = \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial v_\beta} d^0_{\alpha\beta}$$

следствием общих соотношений С.Т.Беляева для кинетических моментов /IO/.

Поскольку в случае кулоновского взаимодействия для составления тензора диффузии достаточно вычислить приращение импульса $\Delta\vec{p}$ в I-м порядке по взаимодействию (по невозмущенным траекториям сталкивающихся частиц), то выражение $d^A_{\alpha\beta}$ будет аналогично $d^0_{\alpha\beta}$, с заменой относительной скорости $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_e$ на $\vec{u}_A = \vec{v} - \vec{v}_{e\parallel}$ и кулоновского логарифма $L^0(u)$ на $L^A(u_A)$:

$$d^A_{\alpha\beta} = 4\pi n z^2 e^4 \int L^A \frac{u_A^2 \delta_{\alpha\beta} - u_{A\alpha} u_{A\beta}}{u_A^3} f(\vec{v}_e)\, d^3 v_e \qquad (2.5)$$

где

$$L^A(u_A) = \ln (\rho^A_{max} / \rho^A_{min}) \qquad (2.6)$$

Используя (2.5) и (2.4), получаем

$$\vec{F}^A_\perp = -\frac{2\pi n z^2 e^4}{m} \int L^A \frac{\vec{v}_\perp u_\parallel}{u_A^3} \frac{\partial f}{\partial v_{e\parallel}}\, d^3 v_e \qquad (2.7)$$

$$F^A_\parallel = \frac{2\pi n z^2 e^4}{m} \int L^A \frac{v_\perp^2}{u_A^3} \frac{\partial f}{\partial v_{e\parallel}}\, d^3 v_e \qquad (2.8)$$

Заметим, что $\vec{F}^A$ нельзя получить из $\vec{F}^0$ аналогично тому, как это можно сделать для $d^A_{\alpha\beta}$. Это связано с тем обстоятельством, что сила трения принципиально обязана своим возникновением конечности инерции рассеивателя; при переходе же от быстрых к адиабатическим столкновениям электрон как рассеиватель утрачивает поперечные к магнитному полю степени свободы.

В качестве параметра ρ^A_{max} в кулоновском логарифме адиабатических столкновений (2.6) нужно принять

$$\rho^A_{max} = \min \{ r_\perp ,\ u_A \ell/\beta c ,\ u_A/\omega_0 \} \qquad (2.9)$$

где $r_\perp$ – поперечный размер электронного пучка, $\ell/\beta c$ – время пролета частицами участка охлаждения, $\omega_0 = \sqrt{4\pi n e^2/m}$ – частота ленгмюровских колебаний электронов. Параметр ρ^A_{min} должен быть не меньше прицельного расстояния, при котором передача импульса электрону в продольном направлении становится порядка $m u_A$, поэтому

$$\rho^A_{min} = \max \{ r_L ,\ e^2/m u_A^2 \} \qquad (2.10)$$

В этой работе мы будем предполагать, что для характерных скоростей u_A выполняется условие

$$\rho^A_{min} \ll \rho^A_{max}$$

$$\text{или} \quad u_A \gg (u_A)_{min} , \qquad (2.11)$$

где

$$(u_A)_{min} \simeq max\left\{ r_L/\tilde{\tau}_{eff}, (e^2/m\tilde{\tau}_{eff})^{1/3} \right\}, \tilde{\tau}_{eff} = min\left\{ \omega_0^{-1}, \ell/\beta c \right\} \tag{2.12}$$

В условиях экспериментов, в частности, на установке с электронным охлаждением НАП-М, существуют области параметров и протонных скоростей, когда эти условия хорошо выполняются. Более общее рассмотрение взаимодействия тяжелых частиц с замагниченными электронами будет проведено в дальнейшем.

3. Обсудим характер поведения силы $\vec{F}^A$ как функции скорости иона $\vec{v}$ относительно средней скорости электронов. Пусть $\Delta_{e\parallel}$ – разброс продольных скоростей электронов.

Рассмотрим сначала ситуацию

$$v \gg \Delta_{e\parallel} \tag{3.1}$$

При этом удобно в (2.7), (2.8) выполнить интегрирование по частям, после чего распределение $f(v_{e\parallel})$ можно заменить на $\delta(v_{e\parallel})$. С точностью до поправок $\sim 1/L_A$ получим:

$$\vec{F}_\perp^A = -\frac{2\pi n z^2 e^4}{m} L^A(v) \frac{v_\perp^2 - 2v_\parallel^2}{v^2} \cdot \frac{\vec{v}_\perp}{v^3} \tag{3.2}$$

$$F_\parallel^A = -\frac{6\pi n z^2 e^4}{m} L^A(v) \frac{v_\perp^2}{v^2} \cdot \frac{v_\parallel}{v^3} \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle^A = 4\pi n z^2 e^4 L^A(v) \frac{v^2 \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta}{v^3} \tag{3.4}$$

Как видно, продольное трение от столкновений с ларморовскими кружками в случае (3.1) обладает той особенностью, что оно исчезает при $v_\perp \ll v_\parallel$. Это обстоятельство имеет очевидную причину: при адиабатическом движении иона мимо ларморовского кружка вдоль силовой линии магнитного поля, интегральная передача импульса в продольном направлении равна нулю.

Особенно необычны свойства поперечного трения: при $v_\perp < \sqrt{2}\,|v_\parallel|$, $\vec{F}_\perp^A$ направлена по (а не против) $\vec{v}_\perp$, то есть возникает антитрение. Изменение знака трения при малых $v_\perp \ll |v_\parallel|$ (по сравнению с трением на свободных электронах) можно понять из следующих соображений: при приближении иона к "силовой линии" ларморовского кружка, продольная скорость электрона интегрально уменьшается, в то время как при удалении – увеличивается; возникающее различие времен эффективного взаимодействия приводит к ускорению иона (для одноименных зарядов аналогичные рассуждения, с очевидными изменениями, приводят, разумеется, к тому же результату).

Оценим теперь трение и диффузию при скоростях

$$v < \Delta_{e\parallel} \tag{3.5}$$

Для определенности выберем распределение $f(v_{e\parallel})$ в виде

$$f = \left\{ (2\pi)^{3/2} \Delta_{e\perp}^2 \Delta_{e\parallel} \exp\left(\frac{v_{e\perp}^2}{2\Delta_{e\perp}^2} + \frac{v_{e\parallel}^2}{2\Delta_{e\parallel}^2} \right) \right\}^{-1} \tag{3.6}$$

При этом из (2.7), (2.8) и (2.5) получаем

$$\vec{F}_\perp^A \approx -2\sqrt{2\pi}\, \frac{n z^2 e^4}{m \Delta_{e\parallel}^3}\, \vec{v}_\perp \ln\left(\frac{\Delta_{e\parallel}}{v_\perp} \right) \cdot L^A(\Delta_{e\parallel}) \tag{3.7}$$

$$F_\parallel^A \approx -2\sqrt{2\pi}\, \frac{n z^2 e^4}{m \Delta_{e\parallel}^3}\, v_\parallel L^A(v_\perp) \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dt}\langle (\Delta p_\perp)^2 \rangle \simeq \left(8\sqrt{2\pi}\, n z^2 e^4/\Delta_{e\parallel} \right) \ln\left(\frac{\Delta_{e\parallel}}{v_\perp} \right) L^A(\Delta_{e\parallel}) \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt}\langle (\Delta p_\parallel)^2 \rangle \simeq \left(4\sqrt{2\pi}\, n z^2 e^4/\Delta_{e\parallel} \right) L^A(v_\perp) \tag{3.10}$$

С точностью до численных и логарифмических множителей, эти выражения подобны обычным трению и диффузии в незамагниченном электронном потоке с изотропным распределением скоростей электронов при температуре $T_e = m\Delta_{e\parallel}^2$.

4. Относительная роль быстрых и адиабатических столкновений зависит от скорости иона и соотношения поперечной $T_{e\perp} = m\Delta_{e\perp}^2$ и продольной $T_{e\parallel} = m\Delta_{e\parallel}^2$ температур электронов. Рассмотрим практически интересную ситуацию

$$T_{e\parallel} \ll T_{e\perp}.$$

Для сравнения с $\vec{F}^A$ и $d^A_{\alpha\beta}$ приведем выражения $\vec{F}^0$ и $d^0_{\alpha\beta}$, которые получаются после подстановки (3.6) в (2.2) и (2.3):

I) $v > \Delta_{e\perp}$; при этом

$$\vec{F}^0 \simeq -\frac{4\pi n z^2 e^4}{m} L^0(v)\frac{\vec{v}}{v^3} \tag{4.I}$$

2) $v < \Delta_{e\perp}$; в этой области

$$\vec{F}^0_\perp \simeq -\pi\sqrt{2\pi}\,\frac{n z^2 e^4}{m} L^0(\Delta_{e\perp})\frac{\vec{v}_\perp}{\Delta^3_{e\perp}} \tag{4.2}$$

$$F^0_\parallel \simeq -\frac{4\pi n z^2 e^4}{m\Delta^2_{e\perp}}\begin{cases}\dfrac{v_\parallel}{|v_\parallel|}L^0(v_\parallel)-\dfrac{v_\parallel}{\Delta_{e\perp}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,L^0(\Delta_{e\perp}), & v_\parallel > \Delta_{e\parallel}\\[2mm] \dfrac{v_\parallel}{\Delta_{e\parallel}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,L^0(\Delta_{e\parallel}), & v_\parallel < \Delta_{e\parallel}\end{cases} \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\vec{p}_\perp)^2\rangle = \frac{d}{dt}\langle(\Delta p_\parallel)^2\rangle = \frac{(2\pi)^{3/2} n z^2 e^4}{\Delta_{e\perp}} L^0(\Delta_{e\perp}) \tag{4.4}$$

Рассмотрим затухание пучка ионов с начальным разбросом скоростей $\Delta_i > \Delta_{e\perp}$, пренебрегая особенностями, связанными с цикличностью движения ионов в накопителе, и возможным непостоянством направления магнитного поля, "замораживающего" электронный поток. На начальном этапе, пока $\Delta_i > \Delta_{e\perp}$, вклады быстрых и адиабатических столкновений относятся как соответствующие логарифмы, так что декремент затухания по порядку величины равен

$$\lambda \simeq \frac{4\pi}{3}\frac{n z^2 e^4 L}{m M \Delta_i^3}, \quad L = L^0(\Delta_i) + L^A(\Delta_i) \quad (\text{при } \Delta_i > \Delta_{e\perp})$$

Затем, после того как Δ_i становится меньше поперечного разброса электронов $\Delta_{e\perp}$, трение от быстрых столкновений начинает уменьшаться, в то время как трение от адиабатических продолжает быстро расти:

$$\lambda \simeq \frac{4\pi n z^2 e^4}{m M}\left(\frac{L^0(\Delta_{e\perp})}{\Delta^3_{e\perp}} + \frac{L^A(\Delta_i)}{\Delta_i^3}\right), \quad \Delta_{e\parallel} < \Delta_i < \Delta_{e\perp}$$

Довольно быстро наступает момент, когда первым членом можно пренебречь.

Наконец, когда Δ_i уменьшается до продольного разброса электронных скоростей $\Delta_{e\parallel}$, декремент затухания достигает максимального значения

$$\lambda_{max} \simeq \frac{4\pi n z^2 e^4 L^A}{m M \Delta^3_{e\parallel}}, \quad \Delta_i \lesssim \Delta_{e\parallel} \tag{4.5}$$

после чего затухание продолжается с постоянным декрементом, до тех пор, пока температура ионов по всем степеням свободы не сравняется с продольной температурой электронов:

$$T_i|_{st} \simeq T_{e\parallel} \tag{4.6}$$

(для распределения электронов (3.6), ($T_i|_{st} = T_{e\parallel}$).

Для сравнения отметим, что в отсутствии продольного магнитного поля, при $\Delta_{e\parallel} \ll \Delta_{e\perp}$, равновесная поперечная температура ионов по порядку величины равна $T_{e\perp}$ (обычное соотношение), а продольная – среднему геометрическому из $T_{e\perp}$ и $T_{e\parallel}$ /6/. Например, для распределения электронов (3.6)

$$T_{i\perp}\Big|^0_{st} = \frac{1}{2}T_{e\perp}, \quad T_{i\parallel}\Big|^0_{st} = \frac{\pi}{4}\sqrt{T_{e\parallel}T_{e\perp}}\left(L^0(\Delta_{e\perp})/L^0(\Delta_{e\parallel})\right).$$

Напомним, что применимость выражений (3.7)-(3.I0), а вместе с ними и (4.5), (4.6), ограничена областью (см.2.I2)

$$\Delta_{e\parallel} > (u_A)_{min}\,.$$

5. При движении в накопителе скорость частицы на участке охлаждения от оборота к обороту не остаётся постоянной, а осциллирует с периодом порядка или меньше периода обращения возле среднего направления, отвечающего замкнутой орбите. Трение в электронном потоке, в виду его малости, практически не возмущает замкнутую орбиту, и лишь приводит к медленному изменению амплитуд колебаний и продольной ско-

рости. В отсутствии ВЧ – напряжения продольные скорости затухают к значению, при котором продольное трение обращается в нуль $F_{\parallel}(v_{\parallel})=0$ =0. Разница же средней скорости электронов и равновесной скорости ионов в поперечном направлении не затухает и является независимым параметром в кинетике электронного охлаждения.

Ранее в работе /2/ был рассмотрен эффект так называемой монохроматической неустойчивости – раскачки колебаний ионов, возникающей, когда разность средних скоростей превышает разброс. Причиной неустойчивости является изменение знака характеристики трения (убывание силы трения со скоростью) для скоростей $|\langle\vec{u}\rangle|>\Delta_{e\perp}$. Заранее очевидно, что этот эффект может проявляться и в кинетике столкновений с "замороженными" электронами, причем не только в области $v_{\perp}>\Delta_{e\perp}$, но и при существенно меньших "расстройках" $\Delta_{e\perp}>v_{\perp}>\Delta_{e\parallel}$.

Обозначим через $\vec{\alpha}(s)=(\alpha_x,\alpha_z)$ угол между направлением замкнутой орбиты иона и магнитным полем, вдоль силовых линий которого движутся ларморовские кружки электронов. Тогда

$$\vec{v}_{\perp}=\gamma\beta c(\vec{\theta}-\vec{\alpha}(s)), \qquad \vec{\theta}=(\theta_x,\theta_z)$$

где s – длина вдоль замкнутой орбиты, $\vec{\theta}$ – угловое отклонение скорости иона от замкнутой орбиты, осциллирующее от оборота к обороту с частотами, несоизмеримыми с частотой обращения:

$$\theta_{x,z}=\theta^{0}_{x,z}\cos\psi_{x,z}, \qquad \dot{\psi}_{x,z}=\omega_{x,z}.$$

Оценим среднюю мощность трения для малых амплитуд вертикальных и радиальных колебаний ионов θ^0_z и θ^0_x в зависимости от $\vec{\alpha}$, полагая электронный поток радиально однородным, а продольные скорости ионов – затухшими "внутрь разброса продольных скоростей электронов. Средние скорости изменения энергии соответствующих осцилляторов равны

$$\dot{\mathcal{E}}_z=\gamma\beta c\,\overline{\theta_z F_z}, \qquad \dot{\mathcal{E}}_x=\gamma\beta c\,\overline{\theta_x F_x}$$

где усреднение проводится по фазам ψ_x, ψ_z и периоду обращения иона в накопителе.

Очевидно, малые $\alpha(s)\equiv|\vec{\alpha}|\ll\Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$ (для всех s) не приводят к существенному изменению мощности трения и декрементов, и затухание происходит в общем, как описано в разделе 4.

Эффект трения качественно изменяется в ситуации, когда вдоль всей длины охлаждения $\alpha(s)\gg\Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$. Используя выражения (3.2), (3.3), силу трения можно записать в виде

$$\vec{F}^A_{\perp}\approx-\frac{2\pi n z^2 e^4 L^A}{m(\gamma\beta c)^2}\cdot\frac{\vec{\theta}-\vec{\alpha}}{|\vec{\theta}-\vec{\alpha}|^3}\approx\frac{2\pi n z^2 e^4 L^A}{m(\gamma\beta c)^2\alpha^3}\left[\vec{\alpha}-\vec{\theta}+3\vec{n}(\vec{n}\vec{\theta})\right] \quad (5.I)$$

$$F^A_{\parallel}\approx-\frac{6\pi n z^2 e^4 L^A}{m(\gamma\beta c)^2\alpha^2}\cdot\frac{v_{\parallel}}{\gamma\beta c\alpha} \quad (5.2)$$

где $\vec{n}=\vec{\alpha}/\alpha$. Заметим, что характеристики трения, пропорциональные $\partial\vec{F}^A/\partial\theta_{x,z}$, не меняются при изменении знака $\vec{\alpha}$.

Предположим, что $\vec{\alpha}$ направлено вдоль нормальной степени свободы, например $\alpha_x=0$. Тогда

$$\dot{\mathcal{E}}_z\sim 2\theta_z^2, \quad \dot{\mathcal{E}}_x\sim-\theta_x^2$$

то есть колебания в направлении $\vec{\alpha}$ раскачиваются, а в поперечном к $\vec{\alpha}$ – затухают, причём сумма декрементов отрицательна. Можно показать (см.Приложение 2), что при условии однородности электронного потока в x и z направлениях вблизи равновесной орбиты ионов, сумма декрементов поперечных колебаний при произвольных связях x и z – движения не зависит от ориентации $\vec{\alpha}(s)$ и равна

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{1}{2M}\,\partial\vec{F}^A_{\perp}/\partial\vec{v}_{\perp}=-\frac{\pi z^2 e^4 L^A}{mM}\,\overline{(\gamma\beta c\alpha)^{-3}n} \quad (5.3)$$

где усреднение проводится вдоль замкнутой орбиты иона. Таким образом, поперечные колебания в рассматриваемых условиях оказываются неустойчивыми, когда по всей длине охлаждения $\alpha(s)>\Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$. При этом среднее значение вектора $\langle\vec{\alpha}(s)\rangle$ не играет существенной роли. В качестве иллюстраций можно привести простые примеры поведения $\vec{\alpha}$ при $|\vec{\alpha}| = Const$:

1) $\vec{\alpha} = Const$;
2) на длине охлаждения $\vec{\alpha}$ несколько раз скачком меняет знак;
3) $\vec{\alpha}\,(S)$ равномерно вращается вокруг направления замкнутой орбиты.

Полная сумма декрементов, однако, при $v_\parallel \ll \gamma\beta c\alpha$ положительна, так как $\lambda_\parallel$ по величине в три раза превосходит сумму поперечных декрементов (5.3):

$$(\lambda_x + \lambda_z + \lambda_\parallel)^A = -\frac{1}{2M}\frac{\partial \vec{F}^A}{\partial \vec{v}} = \frac{2\pi n z^2 e^4 L^A}{mM}\overline{(\gamma\beta c\alpha)^{-3} n} \qquad (5.4)$$

Согласно общей теореме о полной сумме декрементов, эта сумма не зависит от связей степеней свободы иона и в общем случае определяется дивергенцией силы трения как функции скорости частицы (Приложение 2). Это свойство можно использовать для подавления рассмотренной неустойчивости бетатронных колебаний, перераспределяя декременты между продольным и поперечным движениями частиц за счёт введения $z-x$ связи и поперечного градиента продольного трения (например, градиента продольной скорости электронов $dv_{e\parallel}/dx$.

При положительности декрементов, величина $\gamma\beta c\alpha$ играет роль эффективного разброса скоростей электронов, и пучок ионов будет охлаждаться до температуры $\simeq m(\gamma\beta c\alpha)^2$; при этом

$$\theta_{st} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}}\,\alpha\,.$$

Если декременты отрицательны, угловые колебания ионов раскачиваются до амплитуд

$$\theta_0 \simeq \alpha$$

то есть происходит выравнивание не эффективных температур, а величин скоростей ионов и электронов относительно замкнутой орбиты. Это заключение может быть сделано на основе исследования монохроматической неустойчивости, проведённого в 2 . Более подробно динамика больших амплитуд будет рас-

смотрена в дальнейшем.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда величина $\alpha\,(S)$ осциллирует по длине участка охлаждения, проходя малые значения $\alpha \lesssim \Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$. Удобно ввести распределение значений $\vec{\alpha}$, $w(\vec{\alpha})$ ($\int w(\vec{\alpha})\,d^2\alpha = 1$). В общем случае

$$\langle \vec{F}^A \rangle = \int \vec{F}^A(\vec{\alpha})\, w(\vec{\alpha})\, d^2\alpha\ , \quad \langle d^A_{\alpha\beta} \rangle = \int d^A_{\alpha\beta}(\vec{\alpha})\, w(\vec{\alpha})\, d^2\alpha\ , \qquad (5.5)$$

где $\vec{F}^A(\vec{\alpha})$ и $d^A_{\alpha\beta}$ определяются выражениями (2.7), (2.8) и (2.5) с $\vec{v}_\perp = \gamma\beta c(\vec{\theta} - \vec{\alpha})$. Нас интересует ситуация

$$\theta^2 + v_\parallel^2/(\gamma\beta c)^2 < \langle \alpha^2 \rangle ;$$

в противоположном случае $\vec{F}^A$ и $d^A_{\alpha\beta}$ не зависят от $\vec{\alpha}$ и имеют вид (3.2)-(3.4). Нетрудно оценить, что для двухмерного распределения $w(\vec{\alpha})$ максвелловского типа с шириной

$$\alpha_0 = \sqrt{\langle \alpha^2 \rangle / 2} \gg \Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c\ ,$$

одинаковой по обоим поперечным направлениям, поперечная и продольная силы трения соответственно равны ($\theta < \alpha_0$):

$$\langle \vec{F}_\perp^A \rangle \simeq -\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{n z^2 e^4 L^A(v_0)}{m v_0^2}\,\frac{\vec{\theta}}{\alpha_0} \qquad (5.6)$$

$$\langle F_\parallel^A \rangle \simeq -\frac{4\pi n z^2 e^4}{m v_0^2}\begin{cases} \dfrac{v_\parallel}{|v_\parallel|} L^A(v_\parallel) - \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{v_\parallel}{v_0} L^A(v_0)\,, & v_0 > v_\parallel > \Delta_{e\parallel} \\ 2\dfrac{v_\parallel}{\Delta_{e\parallel}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, L^A(\Delta_{e\parallel}) & \end{cases} \qquad (5.7)$$

где $v_0 \equiv \gamma\beta c\alpha_0$.

С точностью до численных факторов, эти выражения аналогичны силе трения (4.2) и (4.3) от быстрых столкновений, где теперь роль разброса $\Delta_{e\perp}$ играет параметр v_0 .

Таким образом, при "нормальном" распределении $w(\vec{\alpha})$, как и следовало ожидать, осцилляции $\vec{\alpha}$ не приводят к неустойчивости, а лишь создают эффективную температуру поперечного движения ларморовских кружков, которая входит в выражения декрементов. При этом, если выполняется условие

$$\alpha_0 \ll \theta_e \equiv \Delta_{e\perp}/\gamma\beta c\ ,$$

вклад адиабатических столкновений в трение и диффузию в области

$$\theta^2 + (v_\parallel/\gamma\beta c)^2 < \theta_e$$

остается определяющим. Отметим, что ситуация, когда $\alpha_0 \ll \theta_e$, характерна для экспериментальных условий. Так, в экспериментах по охлаждению пучка протонов на НАП-М /II/ угол между направлением сопровождающего магнитного поля и замкнутой орбитой протонов контролировался с точностью порядка нескольких единиц на 10^{-4}, при угловом разбросе $\theta_e \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. Возможно, что наблюдавшееся быстрое затухание поперечных размеров протонного пучка /II/ связано с адиабатическими столкновениями в условиях

$$\Delta_{e\parallel} \ll \alpha_0 \gamma\beta c \ll \Delta_{e\perp} .$$

Приведем еще выражения для силы трения в случае одномерных осцилляций $\vec{\alpha}$. Сила трения в направлении осцилляций отличается от (5.6) лишь на логарифмический множитель:

$$\langle F_\ell^A \rangle \simeq -2\sqrt{2\pi}\, \frac{n Z^2 e^4 L^A(v_0)}{m v_0^2}\, \frac{\theta_\ell}{\alpha_0} \ln\left(v_0/\sqrt{v_{tz}^2 + \Delta_{e\parallel}^2}\right); \quad (5.8)$$

в поперечных к $\vec{\alpha}$ направлениях (итерполяционная формула):

$$\langle \vec{F}_{tz}^A \rangle \simeq -2\sqrt{2\pi}\, \frac{n Z^2 e^4 L^A\left(\sqrt{v_{tz}^2 + \Delta_{e\parallel}^2}\right)}{m\left(\Delta_{e\parallel}^2 + v_{tz}^2\right)} \cdot \frac{\vec{v}_{tz}}{v_0}, \quad \theta < \alpha_0, \; v_{tz} < v_0 \quad (5.9)$$

где $\vec{v}_{tz} = (\gamma\beta c\,\theta_{tz},\, v_\parallel)$.

Из сопоставления (5.6), (5.8) и (5.9) с предыдущей ситуацией (формулы (5.I) и (5.3)), когда были представлены лишь большие значения $|\vec{\alpha}(s)| \gg \Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$, можно вывести качественный критерий: декременты поперечных колебаний ионов становятся отрицательными лишь в ситуациях, когда величины углов отклонения магнитного поля от направления замкнутой орбиты локализованы вблизи некоторого значения $|\vec{\alpha}| > \Delta_{e\parallel}/\gamma\beta c$ с относительно малым разбросом:

$$\langle |\vec{\alpha}|^2 \rangle - \langle |\vec{\alpha}| \rangle^2 < \langle |\vec{\alpha}| \rangle^2$$

(например, при распределении $w \sim \delta(\alpha^2 - \alpha_0^2)$).

При появлении рассмотренной монохроматической неустойчивости в условиях эксперимента, она может быть устранена введением плавно осциллирующего изгиба силовых линий магнитного поля с угловой амплитудой α_0, превышающей нескомпенсированное отклонение α_{res}. Можно использовать и другой прием – модуляцию потенциала, ускоряющего электроны, с относительной амплитудой $\Delta U/U \gg \gamma\alpha_{res}$; при этом частота модуляции должна превышать инкремент неустойчивости.

6. Резюмируя проведенное рассмотрение влияния замагниченности электронов на процесс охлаждения, подчеркнем отличия в зависимости вкладов адиабатических и быстрых столкновений от поперечного и продольного разбросов скоростей электронов. В условиях, когда $\Delta_{e\parallel} \ll \Delta_{e\perp}$, декремент от обычных, быстрых столкновений практически не зависит от $\Delta_{e\parallel}$, но обладает сильной чувствительностью к поперечному тепловому разбросу скоростей электронов. Напротив, декремент от адиабатических столкновений ионов с ларморовскими кружками не чувствителен к поперечной температуре электронов и сильно зависит от разброса продольных скоростей электронов (включая разброс вследствие нестабильности ускоряющей разности электрических потенциалов). Другой отличительной особенностью является сильная зависимость адиабатических декрементов от девиации силовых линий сопровождающего магнитного поля относительно замкнутой орбиты ионов в области $\Delta_{e\parallel} < \gamma\beta c\alpha$, в то время как декременты быстрых столкновений становятся чувствительными к этому фактору, лишь начиная с углов $\alpha \gtrsim \Delta_{e\perp}/\gamma\beta c$.

7. Здесь подробно рассмотрен лишь один фактор, ограничивающий положительное влияние замагниченности на процессе охлаждения – отклонение силовых линий магнитного поля от направления замкнутых орбит ионов. Можно указать также другие факторы, влияющие на кинетику:

I) дрейф ларморовских кружков в поле пространственного заряда электронного пучка со скоростью, возрастающей при удалении от "оси" пучка;

2) продольный и поперечный градиенты электрического потенциала на участке охлаждения;

3) непостоянство среднего радиуса ларморовских кружков по сечению электронного пучка, возникающее, например, из-за несовершенства оптики электронной пушки;

4) электрон-электронное взаимодействие, приводящее к эффектам типа нестационарного экранирования кулоновского взаимодействия, а также к увеличению продольной температуры электронов;

5) ион-ионное взаимодействие, когерентное и некогерентное (стохастическое), как прямое, так и через электронный пучок.

6) кратные столкновения ионов с замагниченными электронами в области прицельных параметров, меньших ларморовского радиуса электронов.

В дальнейшем предполагается рассмотреть взаимодействие пучка тяжелых частиц с замагниченным электронным потоком более детально, не ограничиваясь "приближением кулоновского логарифма" и явно принимая во внимание упомянутые выше факторы.

Отметим, кроме того, что можно надеяться с помощью определенного приема использовать большую величину трения в области $\vartheta_\perp \lesssim \Delta_{e\parallel}$ для ускоренного охлаждения пучков с большим угловым разбросом $\theta > \Delta_{e\perp}/\gamma\beta c$.

Данная работа выполнялась в непосредственном контакте с ведущимися в Институте экспериментальными исследованиями электронного охлаждения. Параллельный теоретический и экспериментальный анализ и поиск оптимальных условий охлаждения особенно необходимы в виду большого числа факторов, определяющих свойства электронного пучка и эффективность метода.

Авторы пользуются случаем поблагодарить Г.И.Будкера за интерес к работе, В.В.Пархомчука, Н.С.Диканского, Д.В.Пестрикова, И.Н.Мешкова – за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Для доказательства (2.4) приведём вывод общего соотношения для кинетических моментов, содержащийся в /I0/. Пусть C_ν – набор канонических интегралов движения действий и фаз двух частиц во внешнем поле, $V(C,t)$ – взаимодействие между частицами. Изменение C_ν со временем при столкновении можно записать в виде скобки Пуассона

$$\dot{C}_\nu(t) = \{V; C_\nu\}_t$$

Найдём $\dot{C}_\nu(t)$ как функцию начальных условий при $t=0$ во 2-ом порядке по V:

$$\dot{C}_\nu^{(2)} = \Delta C_{\nu'} \frac{\partial}{\partial C_{\nu'}} \{V; C_\nu\} = \{\tilde{V}; C_{\nu'}\} \frac{\partial}{\partial C_{\nu'}} \{V; C_\nu\} = \{\tilde{V}; \{V; C_\nu\}\} \quad (\text{П.I.1})$$

где $$\tilde{V} = \int_0^t V(C,t')\,dt', \qquad \Delta C_\nu = \{\tilde{V}, C_\nu\}.$$

Разбивая (П.I.1) на симметричную и антисимметричную по V и $\tilde{V}$ части и используя тождество Якоби, получим:

$$\dot{C}_\nu^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial C_{\nu'}} \frac{d}{dt} \{\tilde{V}; C_\nu\}\{\tilde{V}; C_{\nu'}\} + \frac{1}{2} \{\{\tilde{V}, V\}; C_\nu\}$$

Нас интересует средняя по начальным фазам ψ_ν скорость изменения переменных действия I_ν. При усреднении второй член, имеющий вид скобки Пуассона I_ν с "потенциалом" $\frac{1}{2}\{\tilde{V}; V\}$, исчезает, и приходим к соотношению:

$$\frac{d}{dt} \overline{\Delta I_\nu^{(2)}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_{\nu'}} \frac{d}{dt} \overline{\Delta I_\nu \Delta I_{\nu'}}.$$

Выбирая в качестве переменных действий и фаз импульсы и координаты иона и электрона, получим после усреднения по начальным координатам:

$$\frac{d}{dt} \overline{\Delta \vec{p}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \frac{d}{dt} \overline{\Delta \vec{p}\, \Delta p_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{e\alpha}} \frac{d}{dt} \overline{\Delta \vec{p}\, \Delta p_{e\alpha}} \quad (\text{П.I.2})$$

Силе трения отвечает второй член, возникающий из-за возмущения движения электрона. В случае свободных электронов, тензор $\Delta\vec{p}\,\Delta p_{e\alpha}$ зависит от разности скорости $\vec{v} - \vec{v}_e$, причём $\Delta\vec{p}_e = -\Delta\vec{p}$; после интегрирования по распределению электронов получим

$$\vec F^{o} = \frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial v_\beta}\frac{d}{dt}\langle \Delta\vec p\,\Delta p_\beta\rangle . \qquad (\text{П.I.3})$$

В случае адиабатических столкновений в магнитном поле электроны эффективно имеют лишь одну степень свободы – продольную; учитывая, что $\Delta P_{e\parallel} = -\Delta P_\parallel$, из (П.I.2) получаем аналог соотношения (П.I.3):

$$\vec F^{A} = \frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\frac{d}{dt}\langle\Delta\vec p\,\Delta p_\parallel\rangle .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пусть I_ν и ψ_ν (ν =1,2,3) – переменные действия – фазы частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле: $I_\nu = Const$, $\dot\psi_\nu = \omega_\nu(I) = Const$; они связаны с обобщённым импульсом $\vec{\mathcal P} = \vec p + \frac{e}{c}\vec A(\vec r,t)$ и координатой $\vec r$ некоторым каноническим преобразованием. Под действием трения $\vec F(\vec p,\vec r)$ переменные I_ν медленно изменяются:

$$\dot I_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial\vec p}\vec F = \frac{\partial I_\nu}{\partial\vec{\mathcal P}}\vec F$$

Определим сумму декрементов в виде

$$\Lambda = -\frac12\frac{\partial}{\partial I_\nu}\langle\dot I_\nu\rangle ,$$

где скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по фазам. С учётом усреднения, величину Λ можно записать в виде

$$\Lambda = -\frac12\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial I_\nu}\frac{\partial I_\nu}{\partial\vec{\mathcal P}} + \frac{\partial}{\partial\psi_\nu}\frac{\partial\psi_\nu}{\partial\vec{\mathcal P}}\right)\vec F\right\rangle . \qquad (\text{П.2.I})$$

Используя канонические соотношения

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial\vec{\mathcal P}} = \frac{\partial\vec r}{\partial\psi_\nu}, \qquad \frac{\partial\psi_\nu}{\partial\vec{\mathcal P}} = -\frac{\partial\vec r}{\partial I_\nu},$$

преобразуем (П.2.I):

$$\Lambda = -\frac12\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial I_\nu}\frac{\partial\vec r}{\partial\psi_\nu} - \frac{\partial}{\partial\psi_\nu}\frac{\partial\vec r}{\partial I_\nu}\right)\vec F\right\rangle = -\frac12\left\langle\frac{\partial\vec r}{\partial\psi_\nu}\frac{\partial\vec F}{\partial I_\nu} - \frac{\partial\vec r}{\partial I_\nu}\frac{\partial\vec F}{\partial\psi_\nu}\right\rangle = -\frac12\langle\{\vec F;\vec r\}\rangle;$$

таким образом, сумма декрементов может быть выражена через скобку Пуассона силы трения с радиус-вектором частицы; записывая её явно в переменных $\vec{\mathcal P}, \vec r$, получим

$$\Lambda = -\frac12\langle\partial\vec F(\vec p,\vec r)/\partial\vec p\rangle , \qquad (\text{П.2.2})$$

что и требовалось доказать.

В ситуациях, когда продольная (по отношению к замкнутой орбите ионов) сила трения не зависит от поперечных координат x, z продольный декремент, очевидно, равен $-\frac12\langle\partial F_\parallel/\partial p_\parallel\rangle$; при этом из (П.2.2) следует, что при произвольных остальных условиях сумма декрементов бетатронных колебаний равна

$$\lambda_1+\lambda_2 = -\frac12\langle\partial\vec F_\perp/\partial\vec p_\perp\rangle .$$

Л и т е р а т у р а

I. Г.И.Будкер. "Эффективный метод демпфирования колебаний тяжелых частиц в накопителях", АЭ, т.22, в.5(I967).
2. Я.С.Дербенёв, А.Н.Скринский, "Кинетика электронного охлаждения пучков в накопителях тяжелых частиц". Препринт ИЯФ № 255, Новосибирск, I968; "Particle accelerators" I977
3. Г.И.Будкер, Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский. "Кинетика электронного охлаждения". Труды IУ Всесоюзного совещания по ускорителям, т.П, 300, "Наука" (I975).
4. Г.И.Будкер, Н.С.Диканский, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина "Первые эксперименты по электронному охлаждению", там же, т.П, 309.
5. Г.И.Будкер, Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина, "Эксперименты по электронному охлаждению", IEEE Trans. on Nucl.Sci. NS-22, N5, 2093(I975)
6. Г.И.Будкер, Н.С.Диканский, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина "Experimental study of electron cooling", "Particle accelerators", V.7, N4 (I976)
7. С.Т.Беляев. В сб."Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.3, 66 (I958).
8. Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. "Демпфирование коллективных колебаний бунчированного пучка протонов", Доклад на У Всесоюзном совещании по ускорителям", Дубна, I976 г. Препринт ИЯФ 76-40, Новосибирск I976.
9. Б.Л.Трубников. В сб."Вопросы теории плазмы", в.I, 98 (I963г.)
IO.С.Т.Беляев. В сб."Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.3, стр.50 (I958г.)
II.Г.И.Будкер, А.Ф.Булушев, Н.С.Диканский, В.И.Кононов, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина. "Новые результаты исследований по электронному охлаждению. Препринт ИЯФ 76-92, Новосибирск, I976. Доклад на У Всесоюзном совещании по ускорителям, Дубна, I976 г.

Работа поступила - II апреля I977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г. ПОПОВ
Подписано к печати II.УI-I977г. МН 02783
Усл. I,4 печ.л., I,I учетно-изд.л. Тираж 200 экз.
Заказ № 40.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР