И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 5

Б.Г.Конопельченко

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Новосибирск

1977

ГРУППЫ СИММЕТРИИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что группами симметрии вполне интегрируемых уравнений являются бесконечные группы типа $G_{n\infty}$, которые в подходящих переменных есть конечно-параметрические группы G_n с параметрами локально зависящими от инфинитезимальных операторов группы G_n . Указаны эти переменные. Бесконечные совокупности коммутирующих интегралов движения вполне интегрируемых уравнений соответствуют бесконечным абелевым подгруппам групп $G_{n\infty}$.

I. Введение

Уравнения, описывающие нелинейные классические поля, все более интенсивно исследуются в последнее время. Особый класс классических уравнений образуют вполне интегрируемые уравнения, т.е. уравнения допускающие введение переменных типа действие – угол [I]. Фактически это те нелинейные уравнения, которые подходящим каноническим преобразованием могут быть приведены к линейным уравнениям. Широкий класс вполне интегрируемых нелинейных уравнений исследован методом обратной задачи рассеяния (см.обзоры [2,3]), дающим конкретный рецепт построения упомянутого выше канонического преобразования. Вполне интегрируемые уравнения, могут быть детально исследованы и поэтому их, естественно использовать в качестве нулевого приближения при изучении других нелинейных уравнений. Кроме этого, уравнения, проинтегрированные методом обратной задачи рассеяния, обладают целым рядом интересных свойств (солитоны, бесконечные наборы интегралов движения и т.д.). Поэтому представляется важным исследование важным исследование различных свойств вполне интегрируемых уравнений.

В настоящей работе рассматриваются свойства симметрии вполне интегрируемых уравнений. Показано, что вполне интегрируемые уравнения обладают бесконечными группами симметрии вида $G_{n\infty}$, являющимися в подходящих переменных группами G_n с параметрами локально зависящими от инфинитезимальных операторов группы G_n. Структура группы $G_{n\infty}$ однозначно определяется структурой n -параметрической группы симметрии G_n . Бесконечные наборы коммутирующих интегралов движения образуют бесконечные абелевы подалгебры алгебры группы $G_{n\infty}$.

План работы следующий. В разделе 2 рассмотрены тривиальные вполне интегрируемые уравнения – линейные уравнения. В третьем разделе показано, что для любого вполне интегрируемого уравнения группа симметрии есть $G_{n\infty}$. В четвертом разделе рассмотрены уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния. Показано, что спектральные параметры соответствующих линейных задач должны обладать определёнными трансформационными свойствами по отношению к группам симметрии.

2. Линейные уравнения

Линейные уравнения являются простейшими вполне интегрируемыми уравнениями. Рассмотрим уравнение

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x)=0 \qquad (2.1)$$

где $x=\{x_\mu\}$ – координаты пространства-времени ($\mu = 0,1,\ldots,N$), $F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – произвольный дифференциальный оператор, $\Psi(x)$ – полевые переменные. Размерность $N+1$ пространства-времени и число компонент поля произвольны.

Пусть уравнение (2.1) инвариантно относительно n-параметрической группы G_n преобразований

$$\Psi(x)\rightarrow\Psi'(x)=S(\omega_1,\ldots,\omega_n)\Psi(x) \qquad (2.2)$$

Здесь $\omega_1,\ldots,\omega_n$ – параметры группы, $S(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ – представление группы G_n. Произвольный элемент группы представлен в виде

$$g=\exp\left\{i\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha L_\alpha\right\}$$

где L_α – генераторы группы G_n, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[L_\alpha, L_\beta]=i\sum_{\gamma=1}^{n}C_{\alpha\beta}^{\gamma}L_\gamma. \qquad (2.3)$$

Для инфинитезимальных преобразований имеем

$$\delta\Psi(x)=i\sum_{\alpha=1}^{n}[\omega_\alpha L_\alpha,\Psi(x)]=i\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(x)\Psi(x) \qquad (2.4)$$

где $\mathcal{D}_\alpha(x)$ – инфинитезимальные операторы группы G_n в реализации на полях $\Psi(x)$.*) Операторы $\mathcal{D}_\alpha(x)$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и генераторы L_α и условие инвариантности уравнения (2.1) относительно группы G_n имеет вид

$$\left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha\mathcal{D}_\alpha(x)\right]=0$$

или

$$\left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\mathcal{D}_\alpha(x)\right]=0 \qquad (2.5)$$

*) Из (2.4) вытекает, что для пространственно-временных групп преобразований $S(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ является дифференциальным оператором. Например, для сдвигов $S(\omega_\mu)= \exp\left\{i^2\omega_\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$, для вращений $S(\omega_{\mu\nu})= \exp\left\{i^2\omega_{\mu\nu}\left(x_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}-x_\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\Sigma_{\mu\nu}\right)\right\}$.

Параметры $\omega_1,\ldots,\omega_n$ группы G_n – постоянные числа. Однако из (2.5) следует, что

$$\left[F\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha\big(\mathcal{D}_1(x),\ldots,\mathcal{D}_n(x)\big)\mathcal{D}_\alpha(x)\right]=0 \qquad (2.6)$$

где $\omega_\alpha(\mathcal{D}_1(x),\ldots,\mathcal{D}_n(x))$ – произвольные функции инфинитезимальных операторов $\mathcal{D}_1(x),\ldots,\mathcal{D}_n(x)$.

Таким образом, уравнение (2.1) инвариантное относительно преобразований (2.4) с постоянными параметрами инвариантно также относительно преобразований

$$\delta\Psi(x)=i\sum_{\alpha=1}^{n}\omega_\alpha\big(\mathcal{D}_1(x),\ldots,\mathcal{D}_n(x)\big)\mathcal{D}_\alpha(x)\Psi(x) \qquad (2.7)$$

где параметры $\omega_1,\ldots,\omega_n$ являются локальными функциями инфинитезимальных операторов $\mathcal{D}_1(x),\ldots,\mathcal{D}_n(x)$.*)

Ограничиваясь функциями $\omega_\alpha(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n)$ разложимыми в ряд Тейлора в окрестности нуля, (2.7) можно записать в виде

$$\delta\Psi(x)=i\sum_{e=1}^{\infty}\sum_{\alpha_i=1}^{n}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_e}\mathcal{D}^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}(x)\Psi(x), \qquad (2.8)$$

где

$$\mathcal{D}^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}(x)=\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_e}{\mathrm{Sym}}\,\mathcal{D}_{\alpha_1}(x)\mathcal{D}_{\alpha_2}(x)\cdots\mathcal{D}_{\alpha_e}(x),$$

$$\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_e}=\frac{1}{e!}\underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_e}{\mathrm{Sym}}\left.\frac{\partial^e\omega_{\alpha_1}(y_1,\ldots,y_n)}{\partial y_{\alpha_2}\ldots\partial y_{\alpha_e}}\right|_{y_1=\ldots=y_n=0} \qquad (2.9)$$

Произвольный элемент группы равен**)

$$g=\exp\left\{i\sum_{e=1}^{\infty}\sum_{\alpha_i=1}^{n}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_e}L^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}\right\}.$$

Следовательно, группа преобразований (2.7) может рассматриваться как бесконечно-параметрическая группа $G_{n\infty}$ с параметрами $\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_e}$ и генераторами $L^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}$ и

*) Подчеркнем, что таким свойством обладают только линейные по полю уравнения.

**) В силу соотношений (2.3) в качестве независимых можно выбрать $\mathcal{D}^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}$ и $L^{(e)}_{\alpha_1\ldots\alpha_e}$ полностью симметричные по всем индексам

$$\delta\psi(x)=i\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{\alpha_i=1}^{n}\left[\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell},\psi(x)\right]=i\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{\alpha_i=1}^{n}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}\mathcal{D}^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}(x)\psi(x) \qquad (2.10)$$

Перестановочные соотношения генераторов группы $G_{n\infty}$ полностью определяются перестановочными соотношениями генераторов группы G_n. Учитывая (2.9) и (2.3) находим

$$\left[L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell},L^{(k-\ell)}_{\beta_{\ell+1}\ldots\beta_k}\right]=i\sum_{\gamma_i=1}^{n}C^{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell\beta_{\ell+1}\ldots\beta_k}L^{(k-1)}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}}, \qquad (2.11)$$

где

$$C^{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell\beta_{\ell+1}\ldots\beta_k}=\underset{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell,\\ \beta_{\ell+1},\ldots,\beta_k,\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_{k-1}}}{\mathrm{Sym}}C^{\gamma_m}_{\alpha_i\beta_k}\cdot\delta^{\gamma_1}_{\alpha_1}\cdot\ldots\delta^{\gamma_\ell}_{\alpha_\ell}\times \qquad (2.12)$$
$$\times\,\delta^{\gamma_{\ell+1}}_{\beta_{\ell+1}}\ldots\delta^{\gamma_{k-1}}_{\beta_k}.$$

Итак мы видим, что для линейного уравнения с группой симметрии G_n полной группой симметрии является бесконечная группа $G_{n\infty}$.

Генераторы $L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}$ $(\alpha_i=1,\ldots,n;\ \ell=1,2,\ldots)$ группы $G_{n\infty}$ являются сохраняющимися величинами для уравнения (2.1) и могут быть представлены в виде интегралов от соответствующих плотностей, которые являются билинейными формами полевых переменных [4].

Операторы $L^{(\ell)}_{\alpha\alpha\ldots}$ при фиксированном α и $\ell=1,2,\ldots,\infty$ образуют бесконечную абелеву подалгебру, и поэтому уравнение (2.1) имеет n бесконечных наборов коммутирующих интегралов движения. В общем случае интегралы движения из разных наборов (т.е. с разными α) не коммутируют между собой.

Если алгебра группы G_n имеет абелеву подалгебру с генераторами $L_1,\ldots,L_k$ ($k\le n$) то группа $G_{n\infty}$ имеет, как это следует из (2.11), бесконечную абелеву подгруппу $G_{k\infty}$ с генераторами $L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell$ принимают значения $1,\ldots,k$ ($\ell=1,2,\ldots,$).

В представлении поля $\psi(x)$, где операторы $L_1,\ldots,L_k$ диагональны, преобразования этой абелевой подгруппы являются преобразованиями подгруппы G_k, параметры которой суть локальные функции собственных значений операторов $L_1,\ldots,L_k$. Например, если группа G_n содержит пространственно-временные сдвиги, то для фурье-компонент $\psi(p)$ поля $\psi(x)$ преобразования бесконечной абелевой подгруппы $G_{n\infty}$ связанной с генераторами сдвигов имеют вид

$$\psi(p)\to\psi'(p)=e^{i\omega_\mu(p)\cdot p_\mu}\cdot\psi(p)$$
$$(\mu=0,1,\ldots,N)$$

Более подробно группы типа $G_{n\infty}$ будут рассмотрены в отдельной работе.

3. Нелинейные уравнения

Перейдем к нелинейным вполне интегрируемым уравнениям. Система, описываемая гамильтоновым нелинейным уравнением, может рассматриваться, как гамильтонова система с бесконечным числом степеней свободы. Полная интегрируемость такой системы означает возможность введения бесконечного набора канонических переменных типа "действия-угол", т.е. существование канонического преобразования от исходных полевых переменных к переменным $S(\lambda)$, $\Omega(\lambda,t)$, в которых рассматриваемое уравнение имеет вид [1]:

$$\frac{dS(\lambda)}{dt}=0,\quad \frac{d\Omega(\lambda,t)}{dt}=\frac{\delta H\{S(\lambda')\}}{\delta S(\lambda)}=Y_\lambda\{S(\lambda')\}. \qquad (3.1)$$

Индекс λ нумерует бесконечную совокупность переменных S и Ω и может принимать как непрерывные, так и дискретные значения. Переменные $S(\lambda)$, $\Omega(\lambda,t)$ являются каноническими, т.е.

$$\{S(\lambda),S(\lambda')\}=0,\quad \{\Omega(\lambda,t),\Omega(\lambda',t)\}=0 \qquad (3.2)$$
$$\{S(\lambda),\Omega(\lambda',t)\}=\delta(\lambda-\lambda')$$

где $\{\ ,\ \}$ – скобка Пуассона.

Подчеркнем, что информация содержащаяся в уравнениях (3.1) и в исходном нелинейном полевом уравнении совпадают, поскольку эти уравнения связаны каноническим преобразованием. В частности, совпадают и группы симметрии этих уравнений. Действительно, коммутатор двух генераторов и тем самым и перестановочные соотношения генераторов группы являются инвариантами канонических преобразований.

Отметим, что поскольку переменные $\mathcal{R}(\lambda,t)$ являются циклическими, то уравнения (3.I) инвариантны относительно преобразований

$$\mathcal{R}(\lambda,t) \to \mathcal{R}'(\lambda,t) = \mathcal{R}(\lambda,t) + c(\lambda) \qquad (3.3)$$

где $c(\lambda)$ – произвольные числа. Преобразования (3.3) образуют бесконечную абелеву группу. Таким образом, необходимым условием полной интегрируемости нелинейного уравнения является инвариантность его относительно бесконечной абелевой группы.

Перейдём от переменных $S(\lambda)$ и $\mathcal{R}(\lambda,t)$ к новым переменным $a(\lambda,t)$ и $a^*(\lambda,t)$

$$a(\lambda,t) = S^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, e^{i\mathcal{R}(\lambda,t)}, \quad a^*(\lambda,t) = S^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, e^{-i\mathcal{R}(\lambda,t)} \qquad (3.4)$$

Преобразование от переменных $S(\lambda), \mathcal{R}(\lambda,t)$ к переменным $a(\lambda,t)$ и $a^*(\lambda,t)$ является каноническим, т.к.

$$\{a(\lambda,t),\, a(\lambda',t)\} = 0\,, \quad \{a^*(\lambda,t),\, a^*(\lambda',t)\} = 0 \qquad (3.5)$$

$$\{a(\lambda,t),\, a^*(\lambda',t)\} = \delta(\lambda-\lambda')$$

Уравнения (3.I) в новых канонических переменных имеют вид

$$\frac{\partial a(\lambda,t)}{\partial t} = i\, \mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda')\}\cdot a(\lambda,t), \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial a^*(\lambda,t)}{\partial t} = -i\, \mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda')\}\cdot a^*(\lambda,t).$$

Важным свойством уравнений (3.6) является то, что $\mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda')\}$ суть функции только величин $S(\lambda) = a^*(\lambda,t)a(\lambda,t)$, не зависящих от времени, и следовательно, сами не зависят от времени.

Пусть уравнения (3.6) инвариантны относительно n-параметрической группы G_n преобразований

$$a(\lambda,t) \to a'(\lambda,t) = S(\omega_1,\dots,\omega_n)\, a(\lambda,t)\,,$$

$$\delta a(\lambda,t) = i\sum_{\alpha=1}^{n} \omega_\alpha \mathcal{D}_\alpha(\lambda,t)\, a(\lambda,t) \qquad (3.7)$$

(Величина $a^*(\lambda,t)$ преобразуется по спорязенному представлению группы G_n).

Поскольку уравнения (3.6) линейны по $a(\lambda,t)$ и на решениях этих уравнений $\mathcal{Y}_\lambda\{S(\lambda')\}$ являются константами, то повторяя рассуждения раздела 2 заключаем, что уравнения (3.6) инвариантны относительно преобразований

$$a(\lambda,t) \to a'(\lambda,t) = S(\omega_1(\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n),\dots,\omega_n(\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n))\, a(\lambda,t) \qquad (3.8)$$

где параметры $\omega_1,\dots,\omega_n$ являются произвольными функциями инфинитезимальных операторов $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$.

Следовательно, группой симметрии уравнений (3.6) является группа G_n с параметрами локально зависящими от инфинитезимальных операторов, т.е. группа $G_{n\infty}$. Генераторы $L^{(e)}_{\alpha_1\dots\alpha_e}$ ($\alpha_i = 1,\dots,n;\ e = 1,2,\dots,\infty$) группы $G_{n\infty}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left[L^{(e)}_{\alpha_1\dots\alpha_e},\, L^{(k-e)}_{\beta_{e+1}\dots\beta_k}\right] = i\sum_{\gamma_i=1}^{n} C^{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\dots\alpha_e\beta_{e+1}\dots\beta_k}\, L^{(k-1)}_{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}. \qquad (3.9)$$

где структурные константы $C^{\gamma_1\dots\gamma_{k-1}}_{\alpha_1\dots\alpha_e\beta_{e+1}\dots\beta_k}$ даются формулами (2.I3) и, следовательно, полностью определяются структурными константами группы G_n.

Поскольку преобразование от переменных $a(\lambda,t), a^*(\lambda,t)$ к полевым переменным $\Psi(x)$ является каноническим, то и исходное нелинейное вполне интегрируемое уравнение инвариантно относительно группы $G_{n\infty}$, генераторы которой удовлетворяют соотношениям (3.9).

Таким образом, полная интегрируемость нелинейного уравнения означает, что группа симметрии этого уравнения есть группа $G_{n\infty}$.

Преобразования этой группы линейны в переменных $a(\lambda,t)$, $a^*(\lambda,t)$, в исходных же переменных они являются сложными, нелинейными по полю $\Psi(x)$ преобразованиями [5].

Генераторы $L^{(e)}_{\alpha_1\dots\alpha_e}$ ($\alpha_i = 1,\dots,n;\ e = 1,2,\dots,\infty$) группы $G_{n\infty}$ являются интегралами движения вполне интегрируемого уравнения. Бесконечные наборы коммутирующих интегралов движения соответствуют бесконечным абелевым подгруппам группы $G_{n\infty}$.

4. Уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния

В качестве примеров вполне интегрируемых нелинейных уравнений рассмотрим четыре уравнения, к которым применим метод обратной задачи рассеяния, а именно:

I. Уравнение Кортевега-де-Вриза [6]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (4.I)$$

II. Нелинейное уравнение Шредингера [7,8]:

$$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \varkappa \psi^2(x,t)\psi^*(x,t) = 0 \qquad (4.2)$$

III. Уравнение Синус-Гордон [9,I0]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \sin u(x,t) = 0 \qquad (4.3)$$

IV. Уравнение массивной модели Тирринга [II,I2]:

$$i\gamma_\mu \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x^\mu} + m\psi(x,t) + g\gamma_\mu \psi(x,t)\cdot\bar{\psi}(x,t)\gamma_\mu \psi(x,t) = 0 \qquad (4.4)$$

где $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma^0$; $x^0 = t,\ x^1 = x$; $\gamma_\mu\ (\mu = 0,1)$ – матрицы Дирака в двумерном пространстве-времени.

Метод обратной задачи рассеяния состоит в отображении нелинейных задач (4.I) – (4.4) в некоторые линейные задачи. Для этих линейных задач существует набор переменных – так называемые данные рассеяния, используя которые можно построить переменные типа действие – угол для уравнений (4.I) – (4.4).

Как мы видели в предыдущем разделе для того, чтобы найти бесконечные группы симметрии уравнений (4.I) – (4.4) достаточно знать конечнопараметрические группы симметрии этих уравнений.

Выпишем эти группы.

I. Группа G_I симметрии уравнения (4.I) состоит из преобразований: (a, b, v, ρ – параметры преобразований)

I) пространственно-временных сдвигов $x \to x' = x + a$, $t \to t' = t + b$ с генераторами $L_1 = i\frac{\partial}{\partial x}$, $L_2 = -i\frac{\partial}{\partial t}$

2) преобразований Галилея [I3]:

$x \to x' = x + vt,\quad t \to t' = t$ с генератором $L_3 = it\frac{\partial}{\partial x}$

3) преобразований

$$x \to x' = \rho x, \quad t \to t' = \rho^3 t$$

$$u(x,t) \to u'(x',t') = \rho^{-2} u(x,t)$$

с генератором

$$L_4 = i\left(3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Перестановочные соотношения между генераторами группы имеют вид:

$$[L_1, L_2] = 0,\ [L_1, L_3] = 0,\ [L_1, L_4] = iL_1,$$

$$[L_2, L_3] = -iL_1, [L_2, L_4] = 0, [L_3, L_4] = -2iL_3 \qquad (4.5)$$

Соотношениями (4.5) полностью определяется структура бесконечной группы $G_{I(4)\infty}$ симметрии уравнения (4.I). Генераторы $L^{(e)}_{\alpha_1 \dots \alpha_e}$ $(\alpha_i = 1,2,3,4\ ;\ e = 1,2,\dots,\infty)$ группы $G_{I(4)\infty}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (3.I0) со структурными константами $C^\gamma_{\alpha\beta}$, заданными формулами (4.5).

Генераторы группы $G_{I(4)\infty}$ являются интегралами движения для уравнения (4.I). Тем самым, уравнение Кортевега-де-Вриза имеет четыре независимых бесконечных набора коммутирующих интегралов движения. Из (4.5) видно, что коммутируют между собой интегралы движения $L^{(e)}_{\alpha_1 \dots \alpha_e}$ ($\alpha_i = 1,2$) и также $L^{(e)}_{\alpha_1 \dots \alpha_e}$, где α_i=2,3.

Отметим, что в работе [6] получены интегралы движения $L^{(e)}_{\alpha_1 \dots \alpha_e}$ с $\alpha_i = 1,2$ $(e = 1,2,\dots,\infty)$.

II. Группа G_{II} симметрии нелинейного уравнения Шредингера (4.2) является 5-параметрической и содержит:

I) пространственно-временные сдвиги,

2) преобразования Галилея,

3) преобразования

$$x \to x' = \rho x, \quad t \to t' = \rho^2 t,$$

$$\psi(x,t) \to \psi'(x',t') = \rho^{-1}\psi(x,t)$$

с генератором $L_4 = i\left(2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\right).$

4) градиентные преобразования

$\psi(x,t) \to \psi'(x,t) = e^{i\alpha}\psi(x,t)$ с генератором L_5.

Перестановочные соотношения генераторов группы $G_{\text{II}(5)}$ следующие:

$$[L_1, L_2] = 0,\ [L_1, L_3] = 0,\ [L_1, L_4] = iL_1,\ [L_1, L_5] = 0,$$

$$[L_2, L_3] = -iL_1, [L_2, L_4] = 2iL_2, \quad [L_2, L_5] = 0, \tag{4.6}$$

$$[L_3, L_4] = -iL_3, [L_3, L_5] = 0, \quad [L_4, L_5] = 0.$$

Структура бесконечной группы $G_{\text{II}(5)\infty}$ симметрии уравнения (4.2) легко находится из соотношений (4.6).

Таким образом, нелинейное уравнение Шредингера имеет пять бесконечных совокупностей коммутирующих интегралов движения. Как видно из (4.6) максимальная абелева подгруппа $G_{\text{II}(5)\infty}$, состоит из преобразований, порождаемых $L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}$ где $\alpha_i = 1,2,5$ ($\ell = 1,2,\ldots, \infty$). Часть этих интегралов движения получена в работе [7].

III. Уравнение Синус-Гордон инвариантно относительно группы Пуанкаре двумерного пространства времени, генераторы $\mathcal{Y}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} L_1$ которой удовлетворяют известным перестановочным соотношениям

$$[L_1, P_\mu] = i\,\epsilon_{\mu\nu} P_\nu, \qquad [P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{4.7}$$

где $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ $(\epsilon_{01} = 1)$ $P_0 = L_2,\ P_1 = L_3.$

Соответствующая бесконечная группа $G_{\text{III}(3)\infty}$ имеет абелеву подгрупу с генераторами $L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}$, где $\alpha_i = 2,3$;

$\ell = 1,2,\ldots, \infty$).

Эти интегралы движения получены в [10].

IУ. Группа симметрии уравнения (4.4) включает кроме группы Пуанкаре с генераторами L_1, P_μ группу градиентных преобразований (генератор $L_4 = Q$). Перестановочные соотношения между генераторами L_1, P_μ даются формулами (4.7). Для генератора L_4 имеем

$$[L_1, L_4] = 0, \quad [P_\mu, L_4] = 0 \tag{4.8}$$

Структура бесконечной группы $G_{\text{IV}(4)\infty}$ определяется соотношениями (3.9) с учетом (4.7) и (4.8).

Максимальная абелева подгруппа группы $G_{\text{IV}(4)\infty}$ имеет в качестве своих генераторов интегралы движения $L^{(\ell)}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}$ где $\alpha_i = 2,3,4$ ($\ell = 1,2,\ldots,\infty$), часть которых найдена в работе [11].

Интегралы движения рассмотренных уравнений являются сложными нелинейными функционалами от полевых переменных и могут быть получены, подобно интегралам движения, соответствующим абелевым подгруппам [6-12].*)

Отметим, что члены в выражениях для этих интегралов движения билинейные по полям совпадают по форме с интегралами движения для соответствующих линейных уравнений.

Рассмотрим более подробно нелинейное уравнение Шредингера (4.2). Метод обратной задачи рассеяния позволяет отобразить нелинейное уравнение (4.2) на линейную задачу [7]:

$$\hat{L}\Phi = \sigma\Phi, \tag{4.9}$$

где $\hat{L} = i\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & \psi^*(x,t) \\ \psi(x,t) & 0 \end{pmatrix};\ \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ p^2 = 1 - \frac{2}{\varkappa},$

При этом полевые переменные $\psi(x,t), \psi^*(x,t)$ отображаются в переменные $\rho(\xi,t), \zeta_i, C_i$ – данные рассеяния для задачи (4.9). (ξ – вещественное число; $\xi = \mathrm{Re}\,\sigma$) ($i = 1,\ldots, m$) [7]. Полная интегрируемость уравнения (4.2) доказывается построением переменных типа действие-угол, которые являются простыми функ-

*) Соответствующие рекуррентные формулы будут приведены в другом месте.

циями данных рассеяния [8]:

$$S(\xi)=\frac{2}{\pi\varkappa}\ln(1+\rho(\xi,t)\rho^*(\xi,t)),\quad \Omega(\xi,t)=\arg\rho(\xi,t),$$

$$S_i=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\;\zeta_i,\quad \Omega_i(t)=2\ln C_i(t),$$

$$S_i^*=\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\;\zeta_i^*,\quad \Omega_i^*(t)=2\ln C_i^*(t).$$

Уравнения движения для переменных "действие-угол" имеют вид

$$\frac{dS(\xi)}{dt}=0,\qquad \frac{d\Omega(\xi,t)}{\partial t}=4\xi^2,$$

$$\frac{dS_i}{dt}=0,\qquad \frac{d\Omega_i(t)}{dt}=-2i\varkappa^2 S_i^2,\tag{4.10}$$

$$\frac{dS_i^*}{dt}=0,\qquad \frac{d\Omega_i^*(t)}{dt}=2i\varkappa^2 S_i^{*2}$$

Перейдем далее от переменных $S(\xi)$, $\Omega(\xi,t)$, S_i, $\Omega_i(t)$ к каноническим переменным типа a, a^* (см. раздел 2):

$$a(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\varkappa}}\ln^{\frac12}(1+\rho(\xi,t)\rho^*(\xi,t))\,e^{i\arg\rho(\xi,t)},$$

$$a^*(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi\varkappa}}\ln^{\frac12}(1+\rho(\xi,t)\rho^*(\xi,t))\,e^{-i\arg\rho(\xi,t)},$$

$$a_i(t)=(\mathrm{Re}\,S_i)^{\frac12}\,e^{i2\,\mathrm{Re}\,\Omega_i(t)},$$

$$a_i^*(t)=(\mathrm{Re}\,S_i)^{\frac12}\,e^{-i2\,\mathrm{Re}\,\Omega_i(t)},$$

$$b_i(t)=(\mathrm{Im}\,S_i)^{\frac12}\,e^{-i2\,\mathrm{Im}\,\Omega_i(t)},$$

$$b_i^*(t)=(\mathrm{Im}\,S_i)^{\frac12}\,e^{i2\,\mathrm{Im}\,\Omega_i(t)}.$$

Используя (4.10) находим уравнения движения для этих переменных

$$i\frac{\partial a(\xi,t)}{\partial t}+4\xi^2 a(\xi,t)=0,$$

$$i\frac{\partial a_i(t)}{\partial t}+32\,\mathrm{Re}\,\zeta_i\cdot\mathrm{Im}\,\zeta_i\cdot a_i(t)=0,\tag{4.11}$$

$$i\frac{\partial b_i(t)}{\partial t}+16\{(\mathrm{Re}\,\zeta_i)^2+(\mathrm{Im}\,\zeta_i)^2\}\,b_i(t)=0$$

Первое из уравнений (4.11) фактически совпадает с линейной частью уравнения (4.2). Действительно, если переопределить время $t\to 4t$ и ввести функцию $\tilde a(\xi,t)=a(\xi,\frac{t}{4})$, а затем сделать Фурье-преобразование по ξ от $\tilde a(\xi,t)$ к $\hat a(x,t)=\int d\xi\,\tilde a(\xi,t)e^{-i\xi x}$ то получим

$$i\frac{\partial\hat a(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2\hat a(x,t)}{\partial x^2}=0.$$

Иначе говоря, уравнение движения для "безсолитонных" решений даётся линейной частью уравнения (4.2).

Отметим, что уравнения движения для $a(\xi,t)$, $a_i(t)$ и $b_i(t)$ совпадают по виду с уравнениями для данных рассеяния $\rho(\xi,t)$, ζ_i и C_i (см.например [14]). Отличие состоит в том, что в то время как $a,a^*;a_i,a_i^*;\ b_i,b_i^*$ являются каноническими переменными, переменные $\rho(\xi,t)$, ζ_i, C_i не являются таковыми (например $\{\rho(\xi,t),\rho(\xi',t)\}=\frac{\varkappa}{2(\xi-\xi')}\rho(\xi)\rho(\xi')\neq 0$).

Рассмотрим свойства симметрии уравнений (4.II). Поскольку они получены каноническим преобразованием из уравнений (4.2), то уравнения (4.II) должны быть инвариантны относительно группы $G_{\bar{II}(5)}$. Для этого, как видно из (4.II) величины ξ и ζ_i должны изменяться при преобразованиях группы $G_{\bar{II}(5)}$. Из вида уравнений (4.II) и (4.9) вытекает, что ξ и ζ_i : (и спектральный параметр σ) должны трансформироваться как $\frac{\partial}{\partial x}$. Следовательно, при пространственно-временных сдвигах и градиентных преобразованиях: $\xi \to \xi' = \xi,\ \zeta_i \to \zeta_i' = \zeta_i \quad (\sigma \to \sigma' = \sigma)$;
при преобразованиях Галилея:

$$\xi \to \xi' = \xi + \tfrac{1}{2}v,\ \zeta_i \to \zeta_i' = \zeta_i + \tfrac{1}{2}v \qquad (\sigma \to \sigma' = \sigma + \tfrac{1}{2}v);$$

при преобразованиях $x \to x' = \rho x,\ t \to t' = \rho^2 t$

$$\xi \to \xi' = \rho^{-1}\xi,\ \zeta_i \to \zeta_i' = \rho^{-1}\zeta_i \qquad (\sigma \to \sigma' = \rho^{-1}\sigma).$$

Учитывая трансформационные свойства величин ξ, ζ_i в инвариантности уравнений (4.II) относительно группы $G_{\bar{II}(5)}$ и, следовательно, бесконечной группы $G_{\bar{II}(5)\infty}$ легко убедиться непосредственно.

Выражения для интегралов движения $P_{\mu\nu_1\ldots\nu_\ell} \equiv L^{(\ell)}_{1\alpha_1\ldots\alpha_\ell}\ (\alpha_i = 1,2)$, $Q_{\nu_1\ldots\nu_\ell} \equiv L^{(\ell)}_{5\alpha_1\ldots\alpha_\ell}\ (\alpha_i = 1,2)(\ell = 1,2,\ldots,)$ через переменные $S(\xi)$ и S_i полученные в [7,8] могут быть легко переписаны в переменных $a(\xi,t),\ a_i(t),\ b_i(t)$.

Выпишем в явном виде вклад несолитонной части:

$$P_{\mu\nu_1\ldots\nu_{2\ell}} = \int dk_1 \cdot k_\mu k_{\nu_1} \cdots k_{\nu_{2\ell}}\ a^*(\xi,t)\,a(\xi,t) + \ldots$$

$$Q_{\nu_1\ldots\nu_{2\ell}} = \int dk_1 \cdot k_{\nu_1} \cdots k_{\nu_{2\ell}}\ a^*(\xi,t)\,a(\xi,t) + \ldots$$

где $\quad K_\mu = (K_0, K_1) = (\xi^2, \xi) \quad , (\ell = 0,1,2,\ldots,).$

Отметим, что в силу трансформационных свойств спектрального параметра σ , все уравнения метода обратной задачи рассеяния явно инвариантны относительно преобразований группы $G_{\bar{II}(5)}$ за исключением преобразования Галилея.

Аналогичным образом можно рассмотреть и остальные три уравнения. При этом соответствующие спектральные параметры обладают определёнными трансформационными свойствами по отношению к конечнопараметрическим группам симметрии этих уравнений. В частности, для уравнений (4.3) и (4.4) спектральные параметры при преобразованиях Лоренца ведут себя как компоненты соответственно вектора и спинора.

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что свойство полной интегрируемости накладывает определенные ограничения на возможную группу симметрии уравнения. Действительно, в силу канонической эквивалентности вполне интегрируемого уравнения некоторому линейному уравнению, группа симметрии должна допускать реализацию на линейных уравнениях.

Литература

I. В.И.Арнольд, Математические методы классической механики, "Наука" I974.
2. В.Е.Захаров, Метод обратной задачи рассеяния, гл. в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", "Наука" I975.
3. H.Flaschka, A. Newell, Lecture Notes in Physics, 38, 355 (1975).
4. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, 76-I2(I976).
6. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев, Функциональный анализ, 5, вып.4, I8 (I97I).
5. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, 76-50(I976).
7. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, ЖЭТФ, 6I, II8 (I97I).
8. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, ТМФ, I9, 332(I974).
9. В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ДАН СССР, 2I9, I334(I974).
I0. Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ТМФ, 2I, I60 (I974).
II. А.В.Михайлов, Письма ЖЭТФ, 23, 356 (I976).
I2. Е.В.Кузнецов, А.В.Михайлов, препринт ИАЭ СО АН СССР (I976) ТМФ (в печати).
I3. R.M.Miura, J.Math. Phys., 9, 1202 (1968).
I4. D.J.Kaup, J.Math. Phys., 16, 2036 (1975).

Работа поступила - I4 декабря I976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 7.I-I977 г. МН 02607
Усл. I,I печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 5.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР