44

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 62

Б.Г.Конопельченко

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ТЕОРИИ КАК ТЕОРИИ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ

Новосибирск

1977

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ТЕОРИИ КАК ТЕОРИИ
СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что любая полевая теория, описываемая вполне интегрируемым уравнением, (в частности, теория любого свободного поля) есть теория спонтанного нарушения симметрии относительно бесконечной динамической группы, а соответствующее поле является голдстоуновским полем, которым это спонтанное нарушение сопровождается.

I. Концепция спонтанно нарушенных симметрий находит все более широкое применение в теории поля. И не только в сравнительно техническом отношении (эффект Хиггса), но и более принципиальном [I]: Ряд теорий может быть сформулирован как теории спонтанного нарушения. Наиболее интересным в этом направлении представляется результат работы [2], в которой показано, что любое калибровочное поле можно интерпретировать как голдстоуновское поле, связанное со спонтанным нарушением симметрии относительно определенной группы.

В настоящей работе мы покажем, что любая полевая теория, описываемая вполне интегрируемым уравнением, может рассматриваться как теория спонтанного нарушения определенной бесконечно-параметрической группы симметрии, а соответствующее поле – как голдстоуновское поле, которым это спонтанное нарушение сопровождается. В частности, любое свободное поле с произвольными массой и спином может интерпретироваться как голдстоуновское.

2. Вполне интегрируемые уравнения привлекают в настоящее время значительное внимание в связи с тем, что они допускают детальное исследование и обладают рядом интересных свойств (солитоны, бесконечные наборы интегралов движения и т.п.) (см.обзоры [3,4]). В работах [5,6], показано, что существование этих специфических свойств связано со специальными свойствами симметрии вполне интегрируемых уравнений. А именно, группа преобразований, переводящих решение некоторого вполне интегрируемого уравнения в решения того же уравнения, (динамическая группа $\mathcal{D}$) является бесконечной группой и содержит в качестве подгрупп группу симметрии типа $G_{n\infty}$ и бесконечную абелеву группу B Бэклунд-преобразований.

Здесь мы покажем, что теория, описываемая исходным вполне интегрируемым уравнением может быть получена в результате нелинейной (намбу-голдстоуновской) реализации симметрии относительно динамической группы $\mathcal{D}$, с подгруппой $G_{n\infty}$ в качестве подгруппы стабильности вакуума.

3. Рассмотрим сначала простейшие вполне интегрируемые уравнения – линейные по полю $\psi(x)$ уравнения

$$\mathcal{F}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=0, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\mathcal{F}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – произвольный дифференциальный оператор. Размерность N пространства-времени и число компонент (в частности, спин) поля произвольны.

Динамическая группа $\mathcal{D}$ уравнения (I) состоит [5,6] из бесконечной группы симметрии типа $G_{n\infty}$ и бесконечной абелевой группы B Бэклунд-преобразований $\psi(x)\xrightarrow{B}\psi'(x)=$ $=\psi(x)+\omega(x)$, где $\omega(x)$ – произвольное решение уравнения (I)*). Разлагая $\omega(x)$ по плоским волнам (ограничимся для простоты трансляционно-инвариантными уравнениями) $\omega(x)=\int d^N p\,\delta(\det\mathcal{F}(p))\,\omega_p e^{-ipx}$, где $\mathcal{F}(p)\,\omega_p=0$, произвольный элемент группы B можно представить в виде

$$g_B=\exp\left(i\int d^N p\,\delta(\det\mathcal{F}(p))\,\omega_p B_p\right), \qquad (2)$$

где $B_p=\int d^{N-1}x\, e^{-ipx}\,\pi(x)$ ($\pi(x)$ – канонические импульсы, сопряженные полю $\psi(x)$) – генераторы элементарных Бэклунд-преобразований, ω_p (при фиксированном p) – параметры, соответствующего элементарного Бэклунд-преобразования. Отметим, что для полей с полуцелым спином, B_p и ω_p являются спинорами по отношению к группе Лоренца. Перестановочные соотношения генераторов группы $\mathcal{D}$ нетрудно найти [6], исходя из явного вида генераторов. Выпишем те из них, которые потребуются в дальнейшем:

$$[B_p, B_{p'}]_{\pm}=0\ , \quad [P_\mu, B_q]_{-}=-q_\mu B_q \qquad (3)$$

Напомним, что импульсы p связаны соотношением $\det\mathcal{F}(p)=0$. Коммутатор в (3) (знак –) соответствует полям с целым спином, антикоммутатор (знак +) – полям с полуцелым спином. Введение в (3) антикоммутатора для спинорных полей связано с необходимостью сохранения правильной связи спина и статистики.

*) Локальная калибровочная группа, если уравнение (I) инвариантно относительно таковой, является подгруппой группы B.

Будем теперь рассматривать группу $\mathcal{D}$ с перестановочными соотношениями (3) как исходную, забыв о её происхождении. Покажем, что теория, описываемая уравнением (I), возникает в результате намбу-голдстоуновской реализации симметрии относительно группы $\mathcal{D}$, с подгруппой $G_{n\infty}$ в качестве подгруппы стабильности вакуума, а поле $\psi(x)$ оказывается голдстоуновским полем.

Согласно методу нелинейных реализаций [7,8] необходимо параметризовать фактор-пространство $\mathcal{D}/G'_{n\infty}$ полями $\psi_p(x)$ ($\det\mathcal{F}(p)$ =0/ с квантовыми числами генераторов B_p и рассмотреть действие группы $\mathcal{D}$ в фактор-пространстве как группы левых сдвигов:

$$G(x,\psi)=e^{ix_\mu P_\mu}\cdot e^{i\int d^N p\,\delta(\det\mathcal{F}(p))\,\psi_p(x)B_p}\xrightarrow{B} g_B G(x,\psi)=G(x,\psi'). \qquad (4)$$

По отношению к группе $G_{n\infty}$ закон преобразования полей $\psi_p(x)$ является однородным [5]. При действии же группы B, как следует из (3) и (4), поля преобразуются неоднородно:

$$B_p:\ \delta_p\psi_p(x)=\omega_p e^{-ipx};\quad \delta_p\psi_q(x)=0 \qquad (q\neq p) \qquad (5)$$

Следовательно, поля $\psi_p(x)$ являются голдстоуновскими. Голдстоуновским является и ковариантное относительно группы Лоренца поле $\Phi(x)=\int d^N p\,\delta(\det\mathcal{F}(p))\,\psi_p(x)$ и $\delta_p\Phi(x)=$ $=\omega_p e^{-ipx}$.

Инвариантные лагранжианы строятся стандартным образом из полей и их ковариантных производных. Используя общие предписания [7,8] для определения ковариантных производных

$$G^{-1}(x,\psi)\,\partial_\mu G(x,\psi)=iP_\mu+i\int d^N p\,\delta(\det\mathcal{F}(p))\,\nabla_\mu\psi_p(x)B_p,$$

находим $\nabla_\mu\psi_p(x)=\partial_\mu\psi_p(x)+ip_\mu\psi_p(x).$

Поскольку $\delta_q\nabla_\mu\psi_p(x)$ =0 и $\delta_q\pi_p(x)$ =0, где $\pi_p(x)$ – канонический импульс, сопряженный $\psi_p(x)$*), лагранжиан инвариантный относительно группы $\mathcal{D}$ содержит только

*) Для дираковского спинора $\pi_p(x)=\bar\psi_p(x)=\psi_p^+(x)\gamma^0.$

$\nabla_\mu \psi_p(x)$ и $\Pi_p(x)$:

$$\mathcal{L}^{inv}_{(\mathcal{D})} = \mathcal{L}^{inv}_{(G_{n\infty})} \left(\nabla_\mu \psi_p(x), \Pi_p(x) \right)$$

Отметим, что в случае, когда группа симметрии G_n содержит в качестве подгруппы группу Лоренца, $\mathcal{L}^{inv}$ является интегралом по импульсам p .

Ограничиваясь лагранжианом билинейным по полям, мы приходим к теории, в которой поле $\psi_p(x)$, а вместе с ним и поле $\Phi(x) = \int d^N p\, \delta(det\, \mathcal{F}(p))\, \psi_p(x)$ удовлетворяет уравнению (I), что и позволяет отождествить $\Phi(x)$ с полем $\psi(x)$.

4. Мы убедились, что любое поле, описываемое линейным уравнением, может интерпретироваться как голдстоуновское.

Аналогичные выводы справедливы и для любого поля, описываемого вполне интегрируемым уравнением. Действительно, нелинейное вполне интегрируемое уравнение некоторым каноническим преобразованием исходных переменных может быть отображено на линейное уравнение, к которому применимы рассуждения предыдущего пункта. Соответственно, новые канонические переменные (в которых уравнение линейно) являются голдстоуновскими и могут быть получены в результате нелинейной реализации симметрии относительно динамической группы $\mathcal{D}$, структура которой (в частности, и группы B) инвариантна относительно канонических преобразований. Нелинейная реализация динамической группы, соответствующая исходным полевым переменным, связана с ней каноническим преобразованием и, следовательно, эквивалентна ей в смысле [7,8].

Тот факт, что вполне интегрируемые теории являются теориями спонтанного нарушения, указывает на близость понятия динамической группы вполне интегрируемых уравнений [6], являющегося обобщением понятия динамических групп квантовомеханических задач [9,I0] на случай систем с бесконечными степенями свободы (поле), понятию динамических групп по Вайнбергу [I].

5. Как было показано в п.3, любое свободное поле может рассматриваться как голдстоуновское. Тем самым, голдстоуновские поля могут иметь любые значения спина и массы. Вопрос о значении массы голдстоуновского поля связан, как нетрудно видеть, со спектром импульсов, по которым ведётся интегрирование в выражении (2) для элемента группы B . Если $det\, \mathcal{F}(p) = p^2 - m^2$ и $m \neq 0$, то голдстоуновское поле имеет массу m *. При m =0 голдстоуновское поле является безмассовым. В этом случае среди голдстоуновских полей $\psi_p(x)$ имеется поле $\psi_0(x)$, соответствующее p =0, с законом преобразования

$$B_q : \quad \delta_{q=0}\, \psi_0(x) = \omega_0 \,; \quad \delta_q\, \psi_0(x) = 0 \quad (q \neq 0) \qquad (6)$$

Инвариантность уравнения относительно преобразований вида (6) является необходимым условием безмассовости голдстоуновского поля. В частном случае, векторного поля аналогичный результат получен в работах [I2,I3].

Таким образом, вопрос о массе голдстоуновского поля тесно связан со структурой преобразований группы B . Наиболее интересно исследовать эту взаимосвязь в случае неабелевых групп B , соответствующих нелинейным уравнениям, например, в случае неабелевой калибровочной группы (теории Янга-Миллса). Этот и связанные с ним вопросы будут рассмотрены в подробной статье.

---

*) Теория нейтрального массивного векторного поля [II] относится к этому случаю.

Литература

I. S.Weinberg, Proc. of 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics v.1, Ed.S.Deser 1970.
2. Е.А.Иванов, В.И.Огиевицкий, Письма в ЖЭТФ, 23, 66I(1976).
3. В.Е.Захаров, Метод обратной задачи рассеяния, гл.в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", "Наука", I975.
4. M.I.Ablowitz, D.I.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Stud.Appl. Math., 53, 249 (1974).
5. Б.Г.Конопельченко, ЯФ, 26, вып.3 (I977).
6. Б.Г.Конопельченко, препринт ИЯФ СО АН СССР, (I977).
7. S.Coleman, I.Wess, B.Zumino, Phys.Rev., 177, 2239 (1969); C.L.Callan, S.Coleman, I.Wess, B.Zumino, Phys.Rev., 177, 2247 (1969); V.I.Ogievetsky, Proc. of X Winter School of Theor. in Karpacz, 1, 117, Wroclaw, PNR, (1974).
8. Д.В.Волков, ЭЧАЯ, 4, 3 (I973).
9. H.Kleinert, Fort. Phys., 16, 1 (1968).
IO. Э.Б.Аронсон, И.А.Малкин, В.И.Манько, ЭЧАЯ, 5, I22 (I974).
II. В.И.Огиевицкий, И.В.Полубаринов, ЖЭТФ, 4I, 247 (I96I).
I2. R.Ferrari, L.E.Picasso, Nucl.Phys., B31, 316 (1971).
I3. R.A.Brandt, Ng Wing-Chin, Phys.Rev., D10, 4198 (1974).

Работа поступила - I7 июня I977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 5.7-I977 г. МН 07454
Усл. 0,5 печ.л., 0,4 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ №62.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР