ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 37

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ДИФФУЗИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ В АМБИПОЛЯРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ЛОВУШКАХ

Новосибирск

1978

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ДИФФУЗИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ В АМБИПОЛЯРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ЛОВУШКАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

Как было показано ранее авторами, в амбиполярных плазменных ловушках возникает новый канал потерь, связанный с усиленной диффузией плазмы поперек магнитного поля. При этом, в зависимости от угла прокручивания иона вокруг магнитной оси $\Delta\psi$ при движении от пробки до пробки, реализуются различные режимы потерь. В работе исследован случай, когда $\Delta\psi \gtrsim 1$. В этом режиме диффузия плазмы обусловлена резонансными частицами, для которых выполняется условие $k\Delta\psi = \ell\pi$ (k, ℓ – натуральные числа).

I. ВВЕДЕНИЕ

Предложенные недавно амбиполярные ловушки [I, 2] открывают возможность устранения главного недостатка классических открытых ловушак - малого времени жизни ионов по отношению к уходу через пробки. Вместе с тем, как было показано в работе [3], в таких ловушках возникает новый канал потерь, связанный с усиленной диффузией плазмы поперек магнитного поля. Причиной её является аксиальная несимметрия магнитного поля центрального пробкотрона, приводящая к радиальным блужданиям частиц в процессе их дрейфа вокруг магнитной оси системы.

Общая характеристика возможных режимов потерь была дана в работе [3]. Там было показано, что ситуация в существенной степени определяется величиной угла прокручивания $\Delta\psi$ частицы вокруг магнитной оси при движении частицы от пробки до пробки по длинному однородному участку центрального пробкотрона ($\Delta\psi$ зависит от r - расстояния частицы до оси на однородном участке, ε - полной энергии частицы и μ - магнитного момента: $\Delta\psi \equiv \Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$). При $\Delta\psi \ll I$ имеет место так называемый неоклассический режим диффузии, подробно рассмотренный в [4]. При очень больших углах прокручивания, таких, что

$$\left| \frac{\partial \Delta\psi}{\partial r} \Delta r \right| \gg 1 , \qquad (I)$$

где Δr - радиальное смещение частицы при её отражении от пробки, возникает "стохастическая" диффузия, и потери перестают зависеть от частоты столкновений. Если же угол $\Delta\psi$ уже велик по сравнению с единицей, $\Delta\psi \gtrsim I$, но не настолько, чтобы выполнялось условие (I), существенную роль играет столкновительная диффузия "резонансных"частиц, т.е. частиц, для которых $\Delta\psi$ удовлетворяет условию

$$k \Delta\psi = \ell \pi , \qquad (2)$$

где k и ℓ - натуральные числа (точнее см. ниже). Именно этот тип диффузии исследуется в настоящей работе. По-видимому, он будет реализоваться в большинстве проектируемых сейчас амбиполярных ловушек и поэтому представляет наибольший интерес.

Мы получим выражение для диффузионного потока ионов плазмы в предположении, что длина их свободного пробега много больше длины центрального пробкотрона (в противном случае справедливы обычные гидродинамические уравнения с классическими коэффициентами переноса).

2. ДВИЖЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ

Центральный пробкотрон амбиполярной ловушки характеризуется тем, что длина его однородной и аксиально-симметричной части L много больше длины магнитных пробок L_n (см.рис.1). При отражении от пробок центр ларморовской окружности частицы испытывает радиальное смещение Δr, величина которого зависит от параметров ε, μ и координат точки влета в пробку r, ψ ж) (мы пользуемся цилиндрической системой координат с осью z, направленной по оси ловушки). Вследствие симметрии ловушки функция $\Delta r(r,\psi,\varepsilon,\mu)$ периодична по ψ с периодом π и инвариантна относительно преобразований $\psi \to -\psi$, $\psi \to \pi-\psi$. Поэтому ее разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$\Delta r = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r,\varepsilon,\mu)\cos 2k\psi \qquad (3)$$

(угол ψ отсчитывается от плоскости симметрии ловушки). Нулевой член в сумме (3) в дрейфовом приближении оказывается равным нулю (см. [5]).

В случае, когда радиус плазмы R мал по сравнению с длиной пробки L_n (под L_n понимается расстояние, на котором магнитное поле в пробке меняется в два раза), в сумме (3) высшие гармоники оказываются малыми по параметру $(R/L_n)^2$, и можно ограничиться членом с $k = 1$:

$$\Delta r = a_1 \cos 2\psi . \qquad (4)$$

По порядку величины a_1 равно $\rho_{Hi} R/L_n$, где ρ_{Hi} - ларморовский радиус ионов (эта оценка получена в предположении, что азимутальная компонента магнитного поля в пробке H_ψ порядка

ж) Отлично от нуля также азимутальное смещение, но оно мало по сравнению с $\Delta\psi$ и для дальнейшего несущественно.

$H_r \sim HR/L_n$). Поскольку магнитные пробки центрального пробкотрона повернуты друг относительно друга на 90° (см.рис. 1), то выражение для смещения Δr в противоположной пробке получается из (4) преобразованием $\psi \to \psi - \pi/2$, т.е. просто изменением знака.

Найдем теперь изменение координат r и ψ иона, который в начальный момент находился в экваториальной плоскости ловушки, после того как он достигнет первой пробки, отразится от нее, пролетит ловушку, отразится от второй пробки и вернется в экваториальную плоскость (т.е. за время $2t_\parallel$, где $t_\parallel$ - время пролета иона от пробки до пробки). При влете в первую и вторую пробки ион имеет соответственно фазы $\psi + (1/2)\Delta\psi(r,\varepsilon,\mu)$ и $\psi + (3/2)\Delta\psi(r,\varepsilon,\mu)$, так что искомое изменение r и ψ задается следующими формулами:

$$r \to r + a_1(r)\cos 2\left(\psi + \tfrac{1}{2}\Delta\psi(r)\right) - a_1(r)\cos 2\left(\psi + \tfrac{3}{2}\Delta\psi(r)\right) + O(a_1^2) \qquad (5)$$

$$\psi \to \psi + 2\Delta\psi(r) + O(a_1) \qquad (6)$$

(аргументы ε и μ в a_1 и $\Delta\psi$ для краткости опускаем).

Соотношения (5), (6) можно рассматривать как преобразование, определяющее движение нелинейного осциллятора под действием импульсной силы. При этом r играет роль переменной действия, ψ - фазы осциллятора (см., например, [6]), а период толчков внешней силы равен $2t_\parallel$. Поскольку по углу ψ система периодична с периодом, равным π, то частота колебаний осциллятора есть $2\Delta\psi/t_\parallel$. Условие резонанса для системы (5), (6) состоит в том, что период вынуждающей силы кратен периоду движения осциллятора:

$$\Delta\psi(r,\varepsilon,\mu) = k\frac{\pi}{2} . \qquad (7)$$

В этой формуле k пробегает нечетные значения, k = 1, 3, 5, ... ; при четных k преобразование (5) с точностью до членов $O(a_1^2)$ сохраняет величину r. В общем же случае, когда смещение задается формулой (3), условие резонанса будет записываться в виде (2), где k принимает четные, а ℓ - нечетные значения.

Уравнение (7) для частицы с данными ε и μ определяет радиус $r_0(\varepsilon,\mu)$, на котором выполняется условие резонанса $\Delta\psi(r_0,\varepsilon,\mu) \equiv k\pi/2$. Введем разность $x = r - r_0(\varepsilon,\mu)$ и рассмотрим движение резонансных частиц, для которых величина x мала (и соответственно $|\Delta\psi - k\pi/2| \ll 1$). Соотношения (5) и (6) при этом можно упростить:

$$x \to x + (-1)^{\frac{k+1}{2}}\, 2a_1(r_0)\sin 2\psi\ ,$$
$$\psi \to \psi + k\pi + 2x\psi'(r_0)\ ; \quad \psi' \equiv \partial\Delta\psi/\partial r\,. \tag{8}$$

Двукратное применение преобразования (8) приводит к изменению x на величину $4(-1)^{\frac{k+1}{2}} a_1(r_0)\sin 2\psi$ и изменению фазы (с точностью до несущественного слагаемого $2k\pi$) на $4x\Delta\psi$. Если рассматривать последовательные положения иона в экваториальной плоскости ловушки через промежутки времени $4t_{\shortparallel}$, то соответствующие точки будут лежать на некоторой кривой - траектории частицы в плоскости (r, ψ). Уравнения, определяющие движение иона по этой кривой, получаются из (8):

$$\dot{x} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{a_1(r_0)}{t_{\shortparallel}} \sin 2\psi\ , \quad \dot{\psi} = \frac{1}{t_{\shortparallel}}\, x\psi'(r_0)\,. \tag{9}$$

Отсюда находим, что форма траектории задается уравнением

$$J \equiv (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\psi'(r_0)}{2a_1(r_0)}\, x^2 + \sin^2\psi = const\,. \tag{I0}$$

Для определенности будем считать, что множитель перед x^2 в формуле (I0) положителен (окончательное выражение для диффузионного потока частиц не зависит от этого предположения). Тогда значениям $0 < J < $ I соответствуют захваченные частицы, для которых область движения по углу ψ ограничена, а $J >$ I- пролетные частицы, обходящие магнитную ось системы (см.рис.2).

Величина радиальных блужданий резонансных частиц Δx_{res} оценивается из (I0) и по порядку величины равна $\Delta x_{res} \sim |a_1/\psi'|^{1/2}$. Для нерезонансных частиц (для которых $|\Delta\psi - k\pi/2| \sim 1$) Δx порядка a_1 и мало по сравнению с Δx_{res} (поскольку предполагается, что выполняется неравенство, обратное (I)).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. В процессе диффузии функция распределения ионов искажается относительно

максвелловской, что приводит к появлению возмущений плотности и давления, зависящих от азимутального угла ψ. Как следствие, возникают аксиально-несимметричные возмущения магнитного поля, приводящие к радиальному дрейфу частицы на длинной части ловушки. Таким образом, фактически, радиальное смещение иона за один пролет ловушки Δr складывается из двух слагаемых: смещения в пробке (3) и радиального смещения, обусловленного дрейфом на длинном участке центрального пробкотрона. Мы будем считать, что все это учтено в величине a_1, входящей в уравнения (9), (I0).

3. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Кулоновские столкновения ионов изменяют энергию ε и магнитный момент μ и приводят к тому, что резонансные частицы могут выходить из области резонанса. Ширина резонанса находится из того условия, что изменение магнитного момента частицы на величину $\delta\mu_{res}$ приводит к смещению резонансного радиуса r_0 на величину порядка Δx_{res}:

$$\frac{\delta\mu_{res}}{\mu} \sim \frac{1}{\mu}\left|\frac{\Delta x_{res}\ \psi'}{\partial\Delta\psi/\partial\mu}\right|.$$

Очевидно, такого же порядка и ширина резонанса по энергии $\delta\varepsilon_{res}/\varepsilon$. Соответственно, эффективная частота столкновений, равная обратному времени пребывания частицы в области резонанса, имеет вид:

$$\nu_{eff} \sim \nu_i \left(\frac{\mu}{\delta\mu_{res}}\right)^2$$

где ν_i - обратное время рассеяния ионов на угол порядка единицы.

Оценки коэффициента диффузии ионов зависят от соотношением между ν_{eff} и периодом движения резонансной частицы τ_{res}. По порядку величины

$$\tau_{res} \sim t_{\shortparallel}\left|\frac{\Delta x_{res}}{a_1}\right|$$

Случай, когда $\nu_{eff} \ll \tau_{res}^{-1}$ является аналогом "бананового" режима неоклассической теории [7]. Вклад в коэффициент диффузии от одного резонанса при этом равен

$$\Delta x_{res}^2 \, \nu_{eff} \, \frac{\delta\mu_{res}}{\mu}$$

(последний множитель учитывает малую долю резонансных частиц). Это выражение нужно умножить на число резонансов N, учитывающее возможность разных значений K в формуле (7). По порядку величины

$$N \sim \frac{\Delta\psi_o}{\pi/2}$$

где под $\Delta\psi_o$ следует понимать характерное значение угла прокручивания для ионов с $\varepsilon, \mu H \sim T_i$. Делая естественные оценки $|\partial\Delta\psi/\partial\mu| \sim \Delta\psi_o/\mu$, $|\psi'| \sim \Delta\psi_o/R$, получим

$$\mathcal{D}_{ban} \sim \nu_i R^2 |a_1 \Delta\psi_o/R|^{1/2}. \qquad \text{(11)}$$

Обратный предельный случай $\tau_{res}^{-1} \ll \nu_{eff}$ является аналогом режима "плато" неоклассической теории переноса. Диффузия в этом режиме определяется частицами с таким значением $\delta\mu$, для которых время обхода по траектории τ сравнивается с обратной эффективной частотой столкновений $\tilde{\nu}_{eff}^{-1} \sim \nu_i^{-1}(\delta\mu/\mu)^2$. Время τ и величина радиального блуждания Δx частиц с $\delta\mu \gg \delta\mu_{res}$ оцениваются с помощью (9), (10):

$$\tau \sim t_\parallel \frac{1}{\delta\mu \, \partial\Delta\psi/\partial\mu}, \qquad \Delta x \sim \frac{a_1}{\delta\mu \, \partial\Delta\psi/\partial\mu}$$

Из условия $\tau \sim \tilde{\nu}_{eff}^{-1}$ находим, что

$$\delta\mu \sim \left| t_\parallel \nu_i \frac{\mu^2}{\partial\Delta\psi/\partial\mu} \right|^{1/3}$$

Оценивая теперь коэффициент диффузии $\mathcal{D}_{pl} \sim N \Delta x^2 \tilde{\nu}_{eff} \, \delta\mu/\mu$, получаем

$$\mathcal{D}_{pl} \sim \frac{a_1^2}{t_\parallel} \qquad \text{(12)}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА

Вследствие того, что величина радиальных блужданий максимальна для резонансных частиц, максвелловская функция распределения при наличии радиальных градиентов плотности и температуры сильнее всего искажается вдоль определяемых условием резонанса (7) линий в плоскости (ε, μ). В настоящей работе мы ограничимся нахождением только локализованного возмущения функции распределения и обусловленного ею диффузионного потока. Представляя функцию распределения ионов в виде $f = f_M + \delta f$, где $f_M = n(r)[m_i/2\pi T_i(r)]^{3/2} \exp\left[-\frac{\varepsilon - e\varphi(r)}{T_i(r)}\right]$, будем считать, что функция δf в данной точке (r, ψ) отлична от нуля только в узких полосках в окрестности "резонансных" кривых, задаваемых уравнением (7).

Уравнение для нахождения δf получается путем интегрирования стационарного дрейфового кинетического уравнения вдоль отрезка фазовой траектории резонансной частицы, который она проходит за время $4t_\parallel$. Начальная и конечная точки этого отрезка лежат в экваториальной плоскости ловушки. Если учесть, что длина пробега ионов в ловушке много больше длины центрального пробкотрона, так что функцию распределения f можно считать постоянной на этом отрезке фазовой траектории, то в результате получим:

$$\dot{\psi}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \dot{x}\frac{\partial f}{\partial r} = \mathrm{St} f . \qquad \text{(13)}$$

Здесь аргументами функции распределения являются координаты r, ψ и параметры частицы ε, μ; $\mathrm{St} f$ – столкновительный член.

Общее выражение для $\mathrm{St} f$ существенно упрощается, если учесть, что функция $\delta f(r, \psi, \varepsilon, \mu)$ отлична от нуля только в узких окрестностях резонансных кривых. Уравнение, задающее резонансную кривую, имеет вид $x(\varepsilon, \mu) = 0$. Если от переменных ε, μ перейти к переменным x, μ, то функция δf будет сильно меняться при малых изменениях x и слабо зависеть от μ. Поэтому в общем выражении для $\mathrm{St} f$ можно сохранить только члены, содержащие два дифференцирования по x (ср. соответствующее приближение в работе [4]). При этом в коэффициенте перед второй производной по x можно положить $r = r_o$. Результат имеет вид:

$$\mathrm{St} f = \mathrm{St}\,\delta f = \nu_i(r_o, \mu)\, r_o^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x^2}, \qquad \text{(14)}$$

где

$$\nu_i(r,\mu) = \frac{4\pi\Lambda n e^4}{2^{1/2} m_i^{3/2} T_i^{3/2}} \frac{1}{r^2} \left[\mu^2 \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu}\right)^2 G_1(\xi,\zeta) + \mu\varepsilon \frac{\partial r_0}{\partial \mu}\frac{\partial r_0}{\partial \varepsilon} G_2(\zeta) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial r_0}{\partial \varepsilon}\right)^2 G_3(\zeta) \right],$$

$$G_1(\xi,\zeta) = \frac{1}{\xi\zeta^3}\left[\left(1-\frac{1}{2\zeta}\right)h + \frac{dh}{d\zeta}\right] + \frac{h}{\zeta^4}, \quad G_2 = \frac{2h}{\zeta^4}, \quad G_3 = \frac{h}{\zeta^4},$$

$$h(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-t} t^{1/2}\, dt, \quad \zeta^2 = \frac{\varepsilon - e\varphi}{T_i}, \quad \xi = \frac{\mu H}{\varepsilon - e\varphi - \mu H}.$$

Кинетическое уравнение (I3) со столкновительным членом в виде (I4) и уравнениями движения частицы (9) с точностью до обозначений совпадают с уравнением для δf , которое приходится решать в неоклассической теории процессов переноса в амбиполярных ловушках [4] (см.также [7]). Поэтому, опуская промежуточные вычисления, мы приведем здесь только результат.

Если обратная эффективная частота столкновений ν_{eff}^{-1} велика по сравнению с τ_{res} , то выражение для потока частиц, усредненного по азимуту ψ , имеет вид:

$$\langle q_r \rangle = -\frac{2^{1/2}\pi^2 \gamma H r^2}{m_i^2 L} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu\, \nu_i t_{\parallel} \frac{|a_1(\partial\Delta\psi/\partial r)|^{1/2}}{|\partial\Delta\psi/\partial\varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r}. \qquad (I5)$$

Здесь значение подинтегральной функции берется вдоль резонансной кривой $\varepsilon = \varepsilon_k(r,\mu)$, являющейся решением уравнения (7), а суммирование проводится по номерам резонансов K . Численный коэффициент γ равен:

$$\gamma = \frac{4}{\pi} - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2}\left[\frac{1}{E(t)} - \frac{2}{\pi}\right] = 0{,}88$$

где $E(t)$ – эллиптический интеграл второго рода.

В случае, когда $\tau_{res}^{-1} \ll \nu_{eff}$, радиальный поток $\langle q_r \rangle$ дается следующей формулой

$$\langle q_r \rangle = -\frac{\pi^2 H}{2 m_i^2 L} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu \frac{a_1^2}{|\partial\Delta\psi/\partial\varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r} \qquad (I6)$$

Здесь также интеграл берется вдоль резонансной кривой и проводится суммирование по номерам резонансов.

Формулы (I5) и (I6) представляют собой основной результат работы: они позволяют вычислить скорость резонансной диффузии плазмы в амбиполярных ловушках.

Л и т е р а т у р а

I. Г.И.Димов, В.В.Закайдаков, М.Е.Кишеневский, Физика плазмы, 2, 597, (1976).

2. T.K. Fowler, B.G. Logan. Comments on Plasma Phys. and Controlled Fusion, 2, 167 (1977).

3. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Письма в ЖЭТФ, 26, 186 (1977).

4. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. Физика плазмы, 4, вып.3 (1978).

5. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.177, М., Атомиздат, 1963 г.

6. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105, 3 (1971).

7. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.7, стр.205, М., Атомиздат, 1973 г.

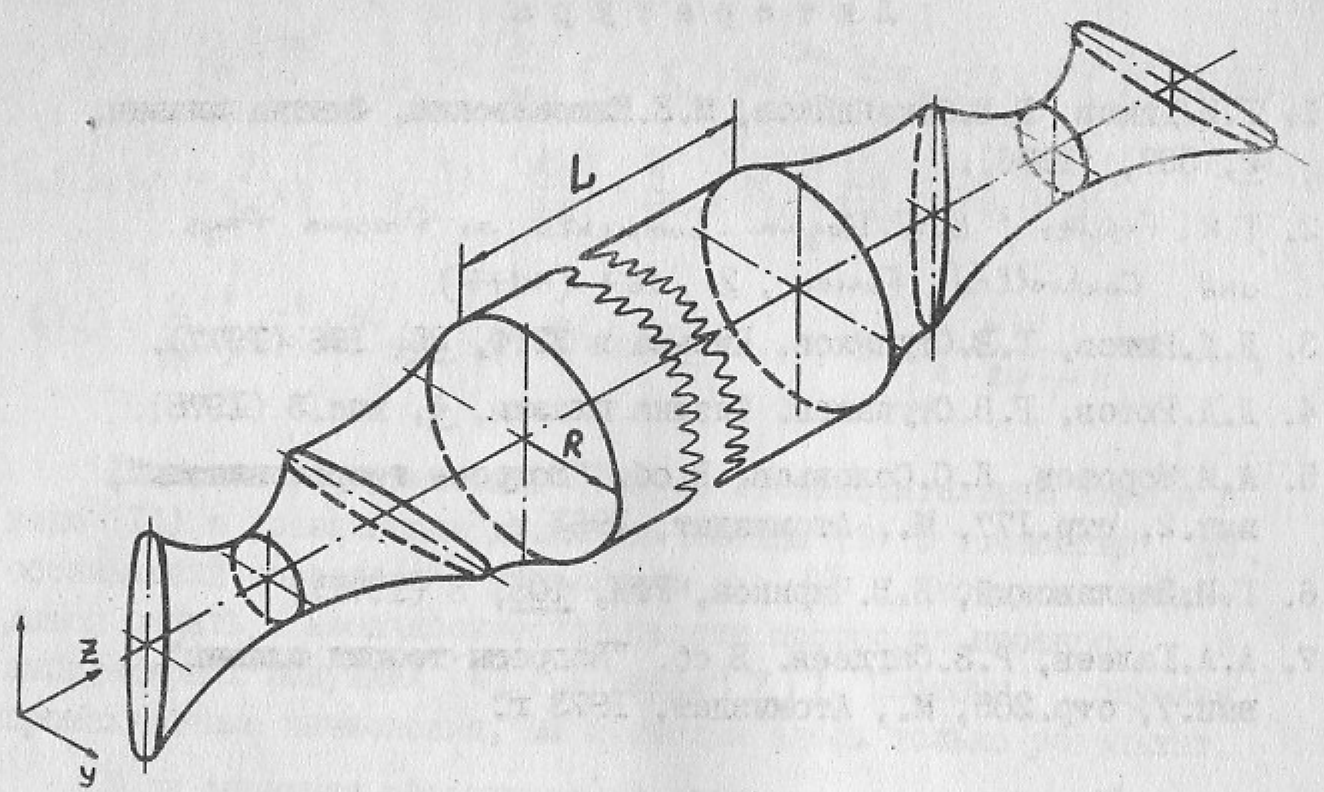

Рис.I. Геометрия магнитного поля амбиполярной ловушки; L –длина центрального пробкотрона. Ловушка обладает двумя плоскостями симметрии: $x = 0$ и $y = 0$.

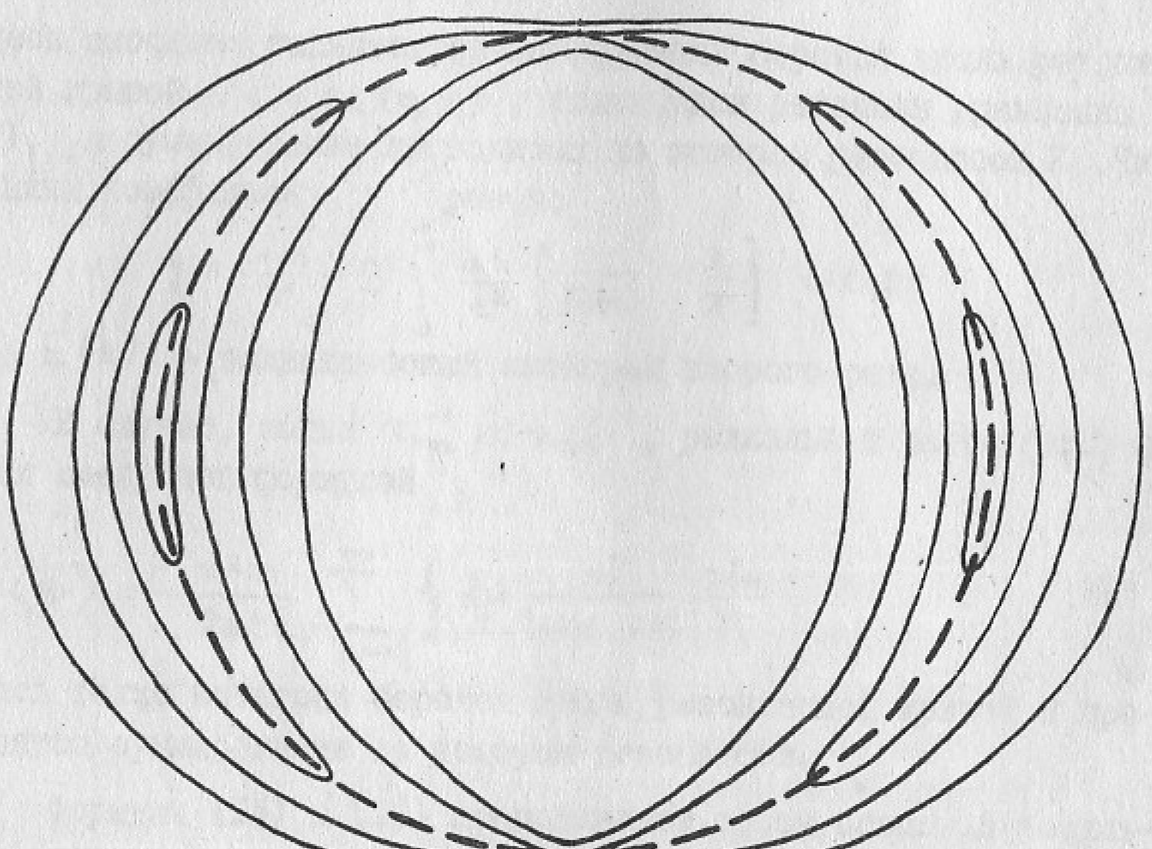

Рис.2. Траектории резонансных частиц в плоскости (r, ψ).

Работа поступила – 2 июня 1977 г.

Ответственный за выпуск – С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 20.IУ-1978 г. МН 02815
Усл. 0,7 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ № 37.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР