

10

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 23

Б.В.Чириков

**ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОЙ
ЛОВУШКЕ**

Новосибирск

1978

Б.В.Чириков

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

А Н Н О Т А Ц И Я

Дается обзор последних работ, посвященных проблеме устойчивости движения отдельной заряженной частицы в ловушке с "магнитными пробками". Для аксиально-симметричной ловушки, а также в случае сильной аксиальной асимметрии магнитного поля удается достаточно аккуратно оценить границу стохастической неустойчивости движения и скорость диффузионного изменения магнитного момента частицы в неустойчивой области. Описана весьма своеобразная универсальная неустойчивость движения — диффузия Арнольда, возникающая при любой, сколь угодно малой асимметрии магнитного поля. Приведены грубые оценки скорости такой диффузии и проведено сравнение этих оценок с результатами экспериментов по удержанию электронов в магнитных ловушках.

Одно из основных направлений в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу связано с использованием для удержания горячей плазмы так называемых "открытых" магнитных систем. В нашей стране начало этому направлению было положено работами Андрея Михайловича Будкера, предложившего удерживать плазму в ловушке с "магнитными пробками" /1/ (см. также /2/). Необходимым, но, увы, далеко недостаточным условием пригодности магнитной ловушки для удержания плазмы, является устойчивость движения отдельной заряженной частицы.

Продольное движение частицы определяется, как известно, эффективной потенциальной энергией:

$$U_{||} = \mu B(s) \quad (1)$$

где B - напряженность магнитного поля; s - координата вдоль силовой линии;

$$\mu = \frac{v_{\perp}^2}{2B} = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega} = \frac{v^2 \sin^2 \beta}{2\omega} \quad (2)$$

орбитальный магнитный момент частицы; β - угол между векторами скорости \vec{v} и поля \vec{B} ; ω - ларморовская частота. Мы пользуемся системой единиц, в которой: $\gamma m = e = c = 1$, где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор. В таком виде все формулы этой статьи справедливы для любых скоростей заряженной частицы.

Если напряженность магнитного поля имеет минимум вдоль силовой линии и $\mu = const$, то частица совершает устойчивые продольные колебания. Однако магнитный момент частицы, пропорциональный переменной действия для ларморовского вращения, не является точным интегралом движения, а есть так называемый адиабатический инвариант, который сохраняется приближенно при некоторых специальных условиях. До развития работ по магнитным ловушкам вопрос о точности сохранения адиабатических инвариантов фактически не рассматривался и даже качественные условия сохранения таких инвариантов формулировались весьма туманно. Основным условием считалась "медленность" изменения параметров системы по сравнению с ее частотами. В рассматриваемой задаче это означает медленность изменения ларморовской частоты $\omega(s)$ в результате продольных колебаний частицы. Как мы теперь знаем, это

условие, вообще говоря, неправильно, даже качественно. Надо отдать должное проницательности и физической интуиции Андрея Михайловича Будкера, который сразу понял, что в теоретическом плане задача о сохранении магнитного момента частицы является весьма тонкой. Поэтому он мудро обратился к эксперименту, предложив красивый опыт с тритием в магнитной ловушке, который и был осуществлен Родионовым /3/. Этот опыт, а также эксперименты в Ливерморе /3/ показали, что магнитный момент сохраняется достаточно хорошо, чтобы удовлетворить некоторые минимальные требования к магнитной ловушке. Обнаруженные затем в большом количестве плазменные неустойчивости отодвинули проблему устойчивости движения отдельной заряженной частицы на задний план. В последнее время, однако, интерес к этой проблеме вновь оживился (см., например, /5/). Это связано, во-первых, со значительными успехами в подавлении плазменных неустойчивостей, и, во-вторых, с желанием более аккуратно оценить минимально необходимые магнитные поля и размеры ловушек, поскольку последние выливаются сейчас в весьма сложные и дорогие инженерные сооружения. Кроме того, за это время появилась новая область приложения теории движения частиц в магнитной ловушке — так называемые радиационные пояса Земли. Для очень энергичных протонов в этих поясах точность сохранения магнитного момента является, по-видимому, определяющим фактором их движения (см., например, /6/).

В принципе проблема устойчивости движения заряженной частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке была решена Арнольдом /4/. Используя новую теорию возмущений, предложенную Колмогоровым и развитую Арнольдом и Мозером (теория КАМ), Арнольд строго доказал, что при достаточно большой напряженности магнитного поля заряженная частица остается запертой в магнитной ловушке неограниченно долго. Аналогичное доказательство такой вечной устойчивости движения частиц в магнитной ловушке было получено еще раз в работе /18/. Доказательство Арнольда имеет принципиальное значение для рассматриваемой проблемы. Однако для практических приложений важно получить достаточно аккуратную оценку границы устойчивости. В рамках строгой теории КАМ этого сделать не удастся из-за технических трудностей. В настоящей статье дается обзор последних работ, в которых используется иной подход к проблеме, основанный на полуэмпирическом кри-

терии устойчивости движения по так называемому перекрытию нелинейных резонансов /8-10/.

Подход этот возник именно из попыток решения задачи о сохранении магнитного момента, поставленной Андреем Михайловичем Будкером. В течение многих лет автор имел возможность пользоваться его неоценимыми советами по этим и многим другим вопросам современной физики.

I. РЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

По-видимому, впервые на роль резонансов в изменении адиабатического инварианта было указано в работе Андронова, Леонтовича и Мандельштама /7/. В этой работе рассмотрен простой пример линейного осциллятора с частотой, модулированной по гармоническому закону. В такой системе, как известно, при любом целом

$$n = \frac{2\bar{\omega}}{\Omega_m} \quad (I.1)$$

где $\bar{\omega}$ — средняя частота осциллятора, а Ω_m — частота модуляции, имеет место параметрический резонанс и действие осциллятора изменяется неограниченно. Так как при $n \rightarrow \infty$ частота $\Omega \rightarrow 0$, то этот элементарный пример показывает, что медленность возмущения еще не гарантирует сама по себе сохранение адиабатического инварианта. Все дело в резонансах. Роль резонансных процессов становится особенно наглядной в квантовой механике, согласно которой изменение адиабатического инварианта означает переходы между невозмущенными уровнями системы.

Резонансные процессы в магнитной ловушке были рассмотрены в работе /8/. Ниже мы начнем со случая аксиально-симметричного магнитного поля. Более того, пусть для простоты напряженность магнитного поля изменяется вдоль силовой линии по квадратичному закону:

$$B(s) = B_0 \left(1 + \frac{s^2}{l^2} \right) \quad (I.2)$$

где l — некоторая постоянная, характеризующая пространственный масштаб неоднородности магнитного поля (длина удвоения по-

ля). В приближении $\mu = const$ продольное движение частицы описывается гамильтонианом:

$$H(p_{||}, s) = \frac{p_{||}^2}{2} + \mu B(s); p_{||} = v_{||} = \dot{s} \quad (I.3)$$

С учетом (I.2) отсюда следует, что продольные колебания являются гармоническими с частотой:*)

$$\Omega = \frac{\sqrt{2\mu B_0}}{l} = \frac{v}{l} \sin \beta_0 \quad (I.4)$$

Изменение μ происходит за счет резонансов этих колебаний с ларморовским вращением. Условие резонанса имеет вид:

$$n = \frac{\bar{\omega}}{2\Omega} = \frac{l}{4\rho_0} \cdot \frac{1 + \sin^2 \beta_0}{\sin^3 \beta_0} \quad (I.5)$$

где n - любое целое число > 0 ; $\rho = v/\omega$ - так называемый "полный" ларморовский радиус, а среднее значение ларморовской частоты по периоду продольных колебаний дается выражением:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \beta_0} \right) \quad (I.6)$$

Поскольку магнитное поле симметрично относительно медианной плоскости, то частота возмущения, связанного с продольными колебаниями, равна 2Ω (I.5). Схема расположения резонансов в аксиально симметричной магнитной ловушке дана на рис. I (прямые линии).

Хотя для магнитного поля вида (I.2) как продольные, так и радиальные колебания (ларморовское вращение) являются гармоническими, их частоты ($\Omega, \bar{\omega}$) зависят от магнитного момента (I.4, I.6). В таком случае говорят о неизохронных или нелинейных колебаниях. Существенно, что отношение частот ($\bar{\omega}/2\Omega$)

*) Индексом ноль будем обозначать значение соответствующей величины в медианной плоскости ($s = 0$) - плоскости симметрии магнитной ловушки.

также изменяется при изменении μ , или угла наклона скорости β_0 (I.5). Поэтому отдельный нелинейный резонанс приводит лишь к ограниченным колебаниям μ и, соответственно, частот $\Omega, \bar{\omega}$. Колебания эти схематически показаны на рис. I стрелками и называются обычно фазовыми колебаниями.

Качественно механизм фазовых колебаний можно пояснить и по другому. При движении частицы в постоянном (во времени) аксиально-симметричном магнитном поле имеется два точных интеграла движения - кинетическая энергия, или модуль скорости:

$$v = const \quad (I.7)$$

и угловой момент, который может быть приближенно записан в виде:

$$M \approx \frac{\omega r_c^2}{2} - \mu = \frac{\omega}{2} (r_c^2 - \rho_{\perp}^2) \approx const \quad (I.8)$$

где r_c - расстояние ларморовского центра от оси симметрии поля; $\rho_{\perp} = v_{\perp}/\omega$ - ларморовский радиус. Эти интегралы определяют в 6-мерном фазовом пространстве системы некоторую 4-мерную гиперповерхность, по которой и происходит движение частицы. Поскольку частоты $\Omega, \bar{\omega}$ не зависят от (трех) координат частицы, то проекция этой интегральной гиперповерхности на плоскость частот есть некоторая кривая, схематически изображенная на рис. I пунктиром. При $\rho \ll r_c$ из (I.8) вытекает: $r_c \approx const$, и следовательно, $\omega_0 \approx const$. Тогда из (I.4) и (I.8) получаем, исключая β_0 , приближенное выражение для интегральной кривой на рис. I:

$$\bar{\omega} \approx \frac{\omega_0(r_c)}{2} \left(1 + \frac{v^2}{l^2 \Omega^2} \right) \quad (I.9)$$

которая зависит от двух параметров движения частицы v и r_c .

Вообще говоря, и, в частности, для рассматриваемой задачи интегральная кривая пересекает линии резонансов. Следовательно, действие каждого отдельного резонанса может приводить лишь к ограниченным фазовым колебаниям. Однако при достаточно большой величине резонансного возмущения области фазовых колебаний соседних резонансов будут перекрываться (рис. I), что

приведет к возможности некоторого "блуждания" частицы по резонансам. В частности, при смещении влево по инвариантной кривой на рис. I магнитный момент уменьшается и частица выходит в конце концов из ловушки через магнитные пробки. Граница возникающей таким образом неустойчивости определяется критерием перекрытия нелинейных резонансов, который был сформулирован применительно к рассматриваемой задаче в работе /8/ и затем обобщен на ряд других случаев нелинейных колебаний /9, 10/.

2. ИЗМЕНЕНИЕ МАГНИТНОГО МОМЕНТА ЧАСТИЦЫ В ЛОВУШКЕ

Типичная зависимость μ от времени в течение одного полупериода продольных колебаний частицы в магнитной ловушке (от одного отражения до следующего) изображена схематически на рис. 2. Ясно видно два типа качественно различных изменений μ : колебания ($\Delta\tilde{\mu}$) с частотой ларморовского вращения и более или менее резкое изменение ("скачок") $\Delta\mu_1$ при прохождении медианной плоскости ($z=0$ на рис. 2). Такой характер изменения μ был выяснен уже в первых численных экспериментах по движению частицы в магнитной ловушке /11/ (см. также /12/).

Скорость изменения магнитного момента дается выражением /12/:

$$\dot{\mu} = \frac{v_{\perp}}{BR_c} (v^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2}) \sin \phi - \frac{v_{\parallel} v_{\perp}^2}{2B^2} \frac{\partial B}{\partial s} \sin 2\phi \quad (2.1)$$

где R_c - радиус кривизны магнитной силовой линии, а ϕ - фаза возмущения, связанная с ларморовской фазой θ приближенным соотношением /10/:

$$r \sin \phi \approx r_c \sin \theta \quad (2.2)$$

Выражение (2.1) является точным и справедливо, в частности, и для траекторий, охватывающих ось симметрии поля ($r_c < \rho_{\perp}$).

Поскольку фаза возмущения ϕ является быстрой (изменяется с ларморовской частотой ω), колебания μ имеют порядок:

$$\frac{\Delta\tilde{\mu}}{\mu} \sim \frac{\rho}{l} \sim \frac{\Omega}{\omega} \sim \epsilon \ll 1 \quad (2.3)$$

где мы считаем для простоты $R_c \sim l$. Малая безразмерная величина ϵ называется обычно параметром адиабатичности. Более аккуратно этот параметр будет определен ниже.

Существенно, что колебания μ (2.3), которые, в общем, не так уж и малы, не накапливаются с течением времени. Аккуратное доказательство этого утверждения представляет известные трудности. Такое доказательство было дано впервые Крускалом /13/, который сумел рассмотреть все порядки асимптотической теории возмущения по малому параметру ϵ (2.3).

Можно, однако, просто избавиться от колебательной части изменения μ , перейдя от дифференциальных уравнений движения частицы к так называемому отображению Пуанкаре, или разностным уравнениям, описывающим состояния частицы через определенные конечные интервалы времени (см. п. 4). Для рассматриваемой задачи в качестве такого характерного интервала удобно выбрать полупериод продольных колебаний частицы (π/Ω). Такой подход означает, в частности, переход от непрерывного уравнения (2.1) для $\dot{\mu}$ к конечному изменению $\Delta\mu_1$ за время π/Ω .

Для нахождения $\Delta\mu_1$ нужно просто проинтегрировать уравнение (2.1) на полупериоде продольных колебаний. Подинтегральная функция (правая часть (2.1)) соответствует высокочастотным колебаниям (ω) с низкочастотной (Ω) амплитудной и фазовой модуляцией. Если правая часть (2.1) является аналитической функцией t , что, разумеется, всегда имеет место для реальных полей, то интеграл $\Delta\mu_1$ будет зависеть от параметра адиабатичности экспоненциально:

$$\frac{\Delta\mu_1}{\mu_1} \sim e^{-\frac{1}{\epsilon_a}} \quad (2.4)$$

Величину ϵ_a , определяющую показатель экспоненты, естественно принять за параметр адиабатичности.

Вид зависимости (2.4) легко получить из следующих соображений. Рассмотрим правую часть (2.1) как функцию t и продолжим ее в плоскость комплексного переменного $\tau = t + it_i$, т.е. по-просту произведем замену $t \rightarrow \tau$. Если полученная таким образом функция комплексного переменного будет аналитической в

некоторой полосе вдоль действительной оси, то путь интегрирования ($t_1 = 0$) можно сдвинуть вдоль мнимой оси. Переходя в (2.1) к ларморовской фазе $\theta \sim \omega t \rightarrow \omega \tau$, мы видим, что такой сдвиг приводит к появлению экспоненциального множителя:

$$\sin \theta \rightarrow \mathcal{Y}_m(e^{i\theta}) \sim e^{-\omega t_1} \quad (2.5)$$

Величина сдвига t_1 определяется ближайшей к действительной оси особенностью подинтегрального выражения. Например, для "квадратичного" поля (I.2) это будет нуль магнитного поля в некоторой точке τ_p , такой, что $B(\tau_p) = 0$ (см. (2.1)). Так как "скачок" $\Delta \mu_1$ происходит фактически вблизи медианной плоскости (при минимальном B , см. рис.2), то можно положить: $S \approx v_{||} t \rightarrow v_{||} \tau = v \tau \cos \beta_0$ и $\theta \approx \theta_0 + \omega_0 t \rightarrow \theta_0 + \omega_0 \tau$, откуда: $\tau_p \approx i l / (v \cos \beta_0)$; $\Delta \mu_1 \sim \mathcal{Y}_m(e^{i\theta_p}) \sim e^{-\frac{1}{\epsilon_a} \sin \theta_0}$ и параметр адиабатичности:

$$\frac{1}{\epsilon_a} \sim \frac{l \omega_0}{v \cos \beta_0} = \frac{l}{\rho_0 \cos \beta_0} \quad (2.6)$$

Окончательно можем написать:

$$\frac{\Delta \mu_1}{\mu} = \xi \sin \theta_0; \quad \xi = A e^{-\frac{1}{\epsilon_a}} \quad (2.7)$$

где A - некоторый предэкспоненциальный множитель, зависящий от параметров системы (см. ниже). Отметим, что именно величина ξ (а не ϵ) является истинным параметром малости рассматриваемой задачи об изменении адиабатического инварианта.

В оценке для ϵ_a мы использовали только первый член выражения (2.1), связанный с кривизной магнитной линии. Второй более высокочастотный член (2ω) приводит лишь к экспоненциально малой поправке ($\sim e^{-2/\epsilon_a}$). Поэтому в дальнейшем мы его рассматривать не будем. По этой же причине зависимость правой части (2.1) от t достаточно найти лишь в нулевом приближении, т.е. для $\mu = \text{const}$.

Зависимость вида (2.7) была получена эмпирически (из численных экспериментов) еще в работе /II/. Аккуратное вычисление $\Delta \mu_1$ было впервые произведено в работе /I4/. Любопытно отме-

тить, что выражение для $\Delta \mu_1$ в последней работе было найдено с помощью решения квантово-механической задачи о движении электрона в магнитной ловушке в квазиклассическом приближении.

Простое приближенное выражение для $\Delta \mu_1$ было получено в работе /I2/ прямым интегрированием (2.1). Согласно /I2/

$$\frac{1}{\epsilon_a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{\rho_0 \cos \beta_0} \quad (2.8)$$

Однако выражение для предэкспоненциального множителя в этой работе неоправданно усложнено. Кроме того, как было выяснено позднее /I5/, результат работы /I2/ справедлив лишь для малых β_0 и для магнитного поля, близкого к "квадратичному" (I.2). В последнем случае результат /I2/ был обобщен на произвольные углы β_0 Крушкаль /I5/. Согласно /I5/ параметр адиабатичности в этом случае равен:

$$\frac{1}{\epsilon_a} = \frac{l}{2\rho_0} \Psi(\beta_0); \quad \Psi = \frac{1}{\sin^2 \beta_0} \left[\frac{1 + \sin^2 \beta_0}{2 \sin \beta_0} \ln \frac{1 + \sin \beta_0}{1 - \sin \beta_0} - 1 \right] \quad (2.9)$$

Для более широкого класса магнитных полей расчет $\Delta \mu_1$ был произведен недавно в работе /I9/. Следует отметить, что отношение выражений (2.9) и (2.8)

$$\mathcal{X}(\beta_0) = \frac{3}{4} \Psi(\beta_0) \cos \beta_0 \quad (2.10)$$

остается близким к единице вплоть до углов $\beta_0 \approx 60^\circ$ ($\mathcal{X}(50^\circ) = 0.9$; $\mathcal{X}(60^\circ) = 0.83$).

При $\beta_0 \rightarrow \pi/2$ имеют место приближенные соотношения:

$$\frac{1}{\epsilon_a} \approx \frac{l}{\rho_0} \ln \frac{2}{\delta_0}; \quad \xi = A \left(\frac{\delta_0}{2} \right)^{l/\rho_0} \quad (2.11)$$

где $\delta_0 = \pi/2 - \beta_0$.

Для поля (I.2), или гармонических продольных колебаний, окончательное выражение для $\Delta \mu_1$ имеет согласно /I5/ вид (см. также /I0/):

$$\xi = -\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{r_c}{\rho_0 \sin \beta_0} e^{-\frac{1}{\epsilon_a}} \quad (2.12)$$

Отметим, что хотя в /19/ получено несколько отличное выражение для предэкспоненциального множителя, более простое выражение (2.12) также хорошо согласуется с результатами численного счета, приведенными в /19/.

3. АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В работе /15/ вычислены также поправки к параметру адиабатичности за счет ангармоничности продольных колебаний вследствие отклонения функции $B(s)$ от квадратичной (1.2). Выражение для ϵ_a становится при этом весьма сложным, однако, в практически интересных случаях ангармоническая поправка оказывается малой. Наибольшая поправка соответствует $\beta_0 = 0$, так как при этом ангармоничность колебаний становится максимальной. Для поля вида ($\eta \ll 1$):

$$B(s) = B_0 \left(1 + \frac{s^2}{l^2} + \eta \frac{s^4}{l^4} \right) \quad (3.1)$$

эта максимальная поправка согласно /15/ равна ($\beta_0 = 0$):

$$\frac{1}{\epsilon_a} = \frac{2}{3} \frac{l}{\rho_0} (1 + 0.3\eta) \quad (3.2)$$

Если например, конфигурация поля имеет вид:

$$B(s) = B_0 \frac{1 - a \cos(2\pi s/L)}{1 - a}$$

с "пробочным отношением" $k = (1+a)/(1-a)$, то поправка к $1/\epsilon_a$ составляет $0.3\eta = -1/10(k-1)$.

В качестве другого примера рассмотрим поле магнитного диполя. В этом случае в приближении "квадратичного" поля:

$$l = \sqrt{\frac{(2B)''}{(B)''}} = \frac{\sqrt{2}}{3} r_c = \sqrt{2} R_c \quad (3.3)$$

и

$$\frac{1}{\epsilon_a} = \frac{r_c}{3\sqrt{2}\rho_0} \psi(\beta_0) \quad (3.4)$$

где r_c - расстояние от центра диполя до ларморовского центра в медианной (экваториальной) плоскости диполя. В частности, для $\beta_0 = 0$ отношение $\rho_0/r_c \epsilon_a = 0.314$. С учетом поправки (3.2) эта величина повышается до 0.338, т.е. примерно на 8%. Точное значение, найденное в /15/, равно 0.325, что отличается от приближения (3.4) всего на 3.5%.

Согласно /15/ изменение M в поле диполя можно представить в виде (если исправить арифметическую ошибку в /15/):*

$$\xi = \frac{4\pi}{3^{19/16} \Gamma(9/8)} \left(\frac{r_c}{\rho_0} \right)^{1/8} \frac{e^{-1/\epsilon_a}}{\sin \beta_0} \approx 3.62 \left(\frac{r_c}{\rho_0} \right)^{1/8} \frac{e^{-1/\epsilon_a}}{\sin \beta_0} \quad (3.5)$$

где ϵ_a можно взять, как показано выше, в "квадратичном" приближении (3.4).

Ангармоничность продольных колебаний приводит также к изменению частот Ω , $\bar{\omega}$. Для конфигурации магнитного поля (3.1) имеем приближенно (см., например, /16/):

$$\Omega \approx \frac{v \sin \beta_0}{l} \left(1 + \frac{3}{4} \eta \operatorname{ctg}^2 \beta_0 \right) \quad (3.6)$$

$$\bar{\omega} \approx \frac{\omega_0}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \beta_0} + \frac{3}{4} \eta \operatorname{ctg}^4 \beta_0 \right)$$

Эти выражения справедливы при условии $\eta \operatorname{ctg}^2 \beta_0 \lesssim 1$; для дипольного поля $\eta = 39/162 \approx 1/4$ и $\beta_0 \lesssim 25^\circ$.

4. ОТОБРАЖЕНИЕ

Согласно (2.7) изменение магнитного момента за полупериод продольных колебаний ΔM_1 зависит от значения ларморовской фазы θ_0 в момент пересечения медианной плоскости. Для полного описания движения необходимо найти еще изменение фазы от одного пересечения медианной плоскости до следующего. Это изменение может быть приближенно записано в виде:

* Аналогичный результат был получен несколько раньше в работе (*Cosmic Electrodynamics* 2 (1971) 211).

$$\Delta\theta_0 \equiv d(\mu) \approx \frac{\pi\bar{\omega}}{\Omega} = \frac{\pi}{2} l\omega_0 \frac{1 + \frac{v^2}{2\mu\omega_0}}{\sqrt{2\mu\omega_0}} \quad (4.1)$$

причем последнее выражение справедливо для поля (I.2). Таким образом мы приходим к отображению $\mu, \theta_0 \rightarrow \bar{\mu}, \bar{\theta}_0$, где:

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \mu + \xi \mu \sin \theta_0 \\ \bar{\theta}_0 &= \theta_0 + d(\bar{\mu}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

"Набег" фазы $d(\bar{\mu})$ берется здесь для нового значения магнитного момента ($\bar{\mu}$) после прохождения медианной плоскости с фазой θ_0 . Это и есть отображение Пуанкаре, описывающее изменение состояния частицы (в переменных μ, θ_0) через полупериод продольных колебаний.

Резонансы $\bar{\omega} = 2n\Omega$ (см. (I.5) и рис. I) соответствуют некоторым значениям $\mu = \mu_n$, которые могут быть найдены из условия (см. (4.1)):

$$d(\mu_n) = 2\pi n \quad (4.3)$$

Разложим функцию $d(\mu)$ вблизи резонансного значения и введем новую переменную (импульс) I согласно соотношению:

$$d(\mu) \approx d(\mu_n) + d'_\mu(\mu_n)(\mu - \mu_n) \equiv d(\mu_n) + I \quad (4.4)$$

Такое разложение справедливо при $|\mu - \mu_n|/\mu < |\mu_{n+1} - \mu_n|/\mu \sim 1/n \ll 1$, т.е. в случае резонансов достаточно высокой гармоники продольных колебаний. Поясним, что такие гармоники присутствуют даже при движении частицы в "квадратичном" поле (I.2) за счет модуляции ω с частотой продольных колебаний.

С учетом (4.4) отображение (4.2) можно заменить приближенно следующим линеаризованным по μ отображением:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I + K \cdot \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{I} \end{aligned} \quad (4.5)$$

где мы отпустили индекс нуль у θ . Единственный параметр этого отображения равен:

$$K = \mu_n \xi(\mu_n) d'_\mu(\mu_n) \quad (4.6)$$

Для "квадратичного" поля (I.2) получаем из (2.I2) и (4.1):

$$K = \frac{3\pi^2}{8} \cdot \frac{l r_c}{\rho_0^2} \cdot \frac{3 + \sin^2 \beta_0}{\sin^4 \beta_0} e^{-\frac{1}{\epsilon_a}} \quad (4.7)$$

где ϵ_a дается выражением (2.9).

Для поля магнитного диполя находим аналогично с учетом (3.5) и поправки к частотам (3.6):

$$K = 2.57 \left(\frac{r_c}{\rho_0}\right)^{\frac{9}{8}} \frac{1 + 0.71 \sin^2 \beta_0}{\sin^4 \beta_0} e^{-\frac{1}{\epsilon_a}} \quad (4.8)$$

5. ГРАНИЦА УСТОЙЧИВОСТИ

Свойства отображения (4.5) детально изучены в /10/, где оно названо "стандартным", так как многие задачи теории нелинейных колебаний приводятся именно к такому отображению /10/. Численные эксперименты с отображением (4.5) показывают /10/, что граница устойчивости соответствует значению параметра отображения

$$K = K_1 \approx 1 \quad (5.1)$$

Критерий перекрытия резонансов первого приближения приводит к $K_1 \approx \pi^2/4 \approx 2.5$ /10/. С учетом резонансов второго приближения и стохастического слоя резонансов первого приближения согласно с эмпирическим значением (5.1) существенно улучшается: $K_1 \approx 1.05$ /10/. Ниже мы примем значение (5.1). Последнее может как-то зависеть, в принципе, от числа N итераций отображения (4.5). В численных экспериментах /10/ N достигало 10^7 , причем K_1 изменялось в этой области очень незначительно. Грубая оценка точности критического значения (5.1) дает величину

порядка нескольких процентов /10/.

Структура фазовой плоскости стандартного отображения (4.5) периодична не только по θ (с периодом 2π), но и по I (с тем же периодом). Поэтому достаточно исследовать движение системы (4.5) в пределах фазового квадрата $2\pi \times 2\pi$. Период по I соответствует как раз расстоянию между соседними резонансами μ_n (4.4). Примеры фазовой картины движения системы (4.5) приведены на рис.3; 4. По горизонтальной оси отложен период ларморовской фазы (в медианной плоскости ловушки), а по вертикальной — два периода импульса I , который пропорционален разности $(\mu - \mu_n)$ (4.4). Отмечено одно из резонансных значений $\mu = \mu_n$. Соседнее резонансное значение совпадает с верхним и нижним краем рисунка в силу периодичности по I .

На рис.3 изображена область, заполненная одной траекторией (заштриховано). Эта траектория переходит от одного резонанса к соседнему и, в силу периодичности по I , также и к любому другому резонансу. Следовательно, движение по I неограничено, т.е. мы имеем пример неустойчивого движения ($K = 1.16$). Численные эксперименты показывают /10/, что движение по I носит нерегулярный характер. Частица движения так, как будто бы на нее действуют какие-то случайные силы, хотя в действительности движение описывается чисто динамическими уравнениями (4.5). Такое движение получило название стохастического /9, 10/.

В рассматриваемом случае оно может быть описано диффузионным уравнением с эмпирическим коэффициентом диффузии /10/

$$D_I \equiv \overline{(\Delta I)_1^2} \approx \frac{1}{2} (K-1)^2 \quad (5.2)$$

отнесенным к одной итерации отображения (4.5), или для магнитного момента (см.(4.2)):

$$D_\mu \equiv \frac{(\Delta \mu)^2}{t} \approx \frac{\Omega^2 \mu^2}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{K}\right)^2 \quad (5.3)$$

При $K \gg 1$ коэффициент диффузии соответствует случайным и независимым фазам θ . Происходит, как говорят, перемешивание по фазе θ /9/.

Обратим внимание, что если параметр K лишь незначительно превышает критическое $K_c = 1$, область неустойчивого движения занимает только часть фазовой плоскости весьма причудливой формы (рис.3). Остальная, незаштрихованная часть фазовой плоскости соответствует ограниченным колебаниям μ .

На рис.4 показан пример устойчивого движения, когда колебания μ ограничены для любых начальных условий. В этом случае траектория не переходит (по крайней мере за 10^6 итераций) в область соседнего резонанса (в центре рисунка, ср.рис.3). Тем не менее траектория заполняет некоторую область конечной ширины в форме более или менее узкого слоя, идущего вдоль сепаратрисы нелинейного резонанса. Численные и аналитические исследования движения в этой области показывают /17, 9, 10/, что оно является стохастическим, отсюда и возникло название — стохастический слой. Принципиальное отличие от случая на рис.3 заключается, однако, в том, что стохастическое движение в слое ограничено и вызывает лишь незначительные, хотя и нерегулярные, изменения μ . Тем не менее в аксиально несимметричной магнитной ловушке именно стохастические слои приводят к неустойчивости движения (п.8).

6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сравним полученные выше оценки для границы устойчивости движения заряженной частицы в магнитной ловушке с результатами численного счета траекторий. Для поля магнитного диполя результаты такого счета приведены на рис.5 по данным работы Драгта /20/. Кружками отмечены параметры "устойчивых" траекторий, треугольниками — "неустойчивых". Фактически счет охватывал всего ~ 20 пересечений медианной (экваториальной) плоскости поля, а критерием неустойчивости служил разброс точек на фазовой плоскости, аналогичной показанной на рис.3; 4. В силу сложной структуры фазовой плоскости такой "локальный" критерий еще не гарантирует правильного разделения траекторий на устойчивые и неустойчивые. Тем не менее граница устойчивости движения достаточно четко прослеживается на рис.5. Ее эмпирическое положение показано пунктирной прямой:

$$\frac{\rho_0}{r_c} = 0.11 \sin \beta_0 \quad (6.1)$$

Сплошная кривая дает оценку границы устойчивости по критерию перекрытия резонансов ($K = 1$). Параметр устойчивости K вычислялся по формуле (4.8) с параметром адиабатичности ϵ_a из (2.9). Согласие с численными результатами можно считать удовлетворительным, учитывая, в частности, грубость эмпирического критерия устойчивости, отмеченную выше. В интервале $0.4 < \sin \beta_0 < 0.8$ граница устойчивости $K = 1$ может быть аппроксимирована выражением:

$$\frac{\rho_0}{r_c} = 0.13 \sin \beta_0 - 0.016 \quad (6.2)$$

Более аккуратное сравнение может быть произведено, используя численные данные Сердюка /2I/ по движению частиц в магнитной ловушке с "квадратичным" полем (I.2). В таблице I, взятой из /10/, приведены параметры 6 неустойчивых траекторий, лежащих вблизи границы устойчивости, которые прослеживались до выхода их из ловушки (после N пересечений медианной плоскости). Значения K , приведенные в таблице, вычислялись по формуле (4.7). Все $K > 1$, и может показаться, что (4.7) завышает значение параметра устойчивости K . В действительности, однако, граница $K = 1$ соответствует очень большому времени жизни частицы в ловушке, тогда как для рассматриваемых траекторий $N \sim 300$. Согласно /10/ значение K при этом увеличивается приблизительно по следующему эмпирическому закону:

$$K_N \approx 1 + (100/N)^{0.4} \quad (6.3)$$

Значения K_N также приведены в таблице. Теперь видно, что выражение (4.7) занижает параметр K в среднем на 30% со среднеквадратичным разбросом отдельных значений $\pm 10\%$. В последнем столбце приведены значения точности вычисления критического ларморовского радиуса ρ_0 по формуле (4.7) с поправкой (6.3):

$$\frac{\delta \rho_0}{\rho_0} = \frac{(K_N - K)/K_N}{\frac{1}{\epsilon_a} - 2} \quad (6.4)$$

Основная ошибка связана, повидимому, с погрешностью выражения (2.12) для $\Delta \mu_1$, когда ларморовский радиус ρ_1 становится порядка пространственного масштаба поля $l \approx 130$ см в рассматриваемом случае /2I/.

Обратим внимание, что первые три траектории в таблице охватывают ось ловушки ($\rho_1 > r_c$), так что развитая выше теория применима и в этом случае. Разумеется такие частицы могут выйти из ловушки только при дополнительном условии $r_c > R_s$ (см. таблицу). Так называемый радиус Штермера R_s может быть записан приближенно в виде /2I/:

$$R_s^2 \approx \rho_0^2 \left(\sin^2 \beta_0 - \frac{1}{k} \right) \quad (6.5)$$

где k — пробочное отношение. В противном случае ($r_c < R_s$) частицы удерживаются в ловушке вечно, независимо от перекрытия нелинейных резонансов. Это гарантируется точными интегралами энергии (I.7) и углового момента (I.8). Механизм, вследствие которого стохастическая неустойчивость, возникающая при перекрытии резонансов, все же не выводит частицу из магнитной ловушки, состоит в следующем. Коэффициент диффузии (5.3) пропорционален величине $\xi^2 \sim r_c^2$ (2.12). Величина r_c , однако, не остается постоянной при изменении μ из-за сохранения углового момента. Из (I.8) имеем:

$$r_c^2 \approx \frac{2}{\omega_0} (\mu + M) \quad (6.6)$$

Для траекторий, охватывающих ось ловушки $M < 0$ (I.8) и, следовательно, при уменьшении μ величина r_c также уменьшается и обращается в нуль при некотором конечном значении $\mu = \mu_1 = -M$ (орбита "центрируется" и диффузия по μ , или, точнее, в сторону дальнейшего уменьшения μ прекращается). Если соответствующий μ_1 минимальный угол β_1 оказывается вне адиабатического конуса, т.е. если $\sin^2 \beta_1 = 2\omega_0 \mu_1 / v^2 > \frac{1}{k}$, то частица не может выйти из ловушки, несмотря на стохастическую неустойчивость движения. Последнее условие, как легко проверить, в точности совпадает с условием абсолютного удержания $r_c < R_s$.

7. СИЛЬНАЯ АЗИМУТАЛЬНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ, ПЕРЕКРЫТИЕ РЕЗОНАНСОВ

Переходя к более интересной и важной для приложений задаче о движении заряженной частицы в аксиально несимметричной магнитной ловушке, мы рассмотрим вначале случай сильной азимутальной неоднородности магнитного поля, точное определение которой дано ниже (7.3).

Вследствие азимутальной неоднородности поля все величины, характеризующие движение частицы, в том числе и частоты $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$, будут промодулированы с частотой азимутального дрейфа $\Omega_g \ll \Omega$. В результате этого каждый из резонансов $\bar{\omega} = 2n\Omega$ (п.1) расщепляется в некоторый мультиплет, схематически изображенный на рис.1. Расстояние между линиями мультиплета равно Ω_g , а полное число линий определяется глубиной модуляции частот $\bar{\omega}$ и $\bar{\Omega}$.

Иначе можно сказать, что система основных резонансов определяется теперь тремя частотами (ср. (1,5)):

$$\bar{\omega} - 2n\bar{\Omega} + m\Omega_g = 0 \quad (7.1)$$

где $\bar{\Omega}$ — частота продольных колебаний, усредненная по дрейфовому движению, а $\bar{\omega}$ — ларморовская частота, усредненная как по продольным колебаниям, так и по дрейфовому движению. Максимальный номер гармоники дрейфовой частоты при частотной модуляции (см., например, /22/):

$$|m| \approx \frac{|\Delta\bar{\omega}| + 2n|\Delta\bar{\Omega}|}{\Omega_g} \approx \left(\frac{|\Delta\bar{\omega}|}{\bar{\omega}} + \frac{|\Delta\bar{\Omega}|}{\bar{\Omega}} \right) \frac{\bar{\omega}}{\Omega_g} \equiv \nu \frac{\bar{\omega}}{\Omega_g} \quad (7.2)$$

где $|\Delta\bar{\omega}|$; $|\Delta\bar{\Omega}|$ — амплитуды модуляции частот $\bar{\omega}$; $\bar{\Omega}$ на дрейфовой поверхности.

При условии

$$2\bar{\Omega} \lesssim |m| \Omega_g \approx \nu \bar{\omega} \quad (7.3)$$

соседние мультиплеты перекрываются (см.рис.1). Это и есть случай сильной азимутальной неоднородности магнитного поля ловушки.

Перекрытие соседних (по m) резонансов (7.1) теперь значительно облегчается, так как расстояние между ними существенно меньше: $2\Omega \rightarrow \Omega_g \ll \Omega$. Это значит, что критическое значение параметра K (4.6) будет теперь значительно ниже по сравнению с $K = 1$ (5.1) для аксиально симметричной ловушки. Новое критическое значение $K = K_2$ можно оценить следующим образом. Величина K в (4.5) пропорциональна квадрату отношения ширины нелинейного резонанса к расстоянию между соседними резонансами (см. например, /8,9/). Вследствии модуляции частот дрейфовым движением расстояние между резонансами уменьшается в $2\bar{\Omega}/\Omega_g$ раз, а квадрат ширины резонанса, пропорциональный амплитуде соответствующей гармоники возмущения /8, 9/, уменьшается приблизительно в $\sqrt{2|m|}$ раз /22/. В результате граница устойчивости по перекрытию нелинейных резонансов (7.1) будет определяться теперь условием:

$$K = K_2 \approx \sqrt{2|m|} \left(\frac{\Omega_g}{2\bar{\Omega}} \right)^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\nu \frac{\bar{\omega}}{\Omega_g}} \left(\frac{\Omega_g}{\bar{\Omega}} \right)^2 \sim \varepsilon_a \sqrt{\nu} \quad (7.4)$$

Здесь K находится по формуле (4.7) или (4.8), а последняя, весьма грубая оценка получена из условия: $\bar{\Omega}/\bar{\omega} \sim \Omega_g/\bar{\Omega} \sim \varepsilon_a$.

Скорость диффузии по μ в предельном случае сильного перекрытия резонансов ($K \gg K_2$) дается прежним выражением (5.3), так как последовательные значения фазы θ можно считать при этом случайными и независимыми (п.5). Вблизи новой границы устойчивости (7.4) можно записать приближенно:

$$D_\mu \approx \frac{\bar{\Omega}^2 \xi^2 \mu^2}{2\pi} \left(1 - \frac{K_2}{K} \right)^2 \quad (7.5)$$

8. СЛАБАЯ АЗИМУТАЛЬНАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ, ДИФфуЗИЯ АРНОЛЬДА

Самым интересным является случай слабой азимутальной неоднородности, определяемой условием (ср. (7.3)):

$$\nu \ll \frac{2\Omega}{\bar{\omega}} \sim \epsilon_a \quad (8.1)$$

В этом случае перекрытие соседних резонансов не понижает критическое K по сравнению с аксиально-симметричной ловушкой, т.е. $K_2 \sim 1$. Однако любая (сколь угодно малая) азимутальная неоднородность поля делает возможным качественно иной тип поведения частицы — движение вдоль резонанса $\bar{\omega} = 2n\Omega$ (см. рис. 1). Действительно, в азимутально неоднородном поле из двух точных интегралов движения (I.7, 8) остается только один — интеграл энергии (I.7). Поэтому положение центра ларморовской окружности (r_c) может теперь изменяться произвольно и, в частности, таким образом, чтобы совместно с изменением m , или угла β_0 , сохранять постоянным отношение $\bar{\omega}/2\Omega = \text{const}$. Для "квадратичного" поля (I.2) $\omega_0(r) \approx \omega_{00}(1 - r^2/2l^2)$. Отсюда и из (I.5) можно приближенно записать условие движения вдоль резонанса в виде:

$$\left(1 - \frac{r_c^2}{2l^2}\right) \frac{1 + \sin^2 \beta_0}{\sin^3 \beta_0} \approx \text{const} \quad (8.2)$$

Это выражение показывает, что уменьшение угла β_0 сопровождается ростом r_c . При этом частица в конце концов либо выходит в пробку, либо гибнет на боковой стенке камеры.

Возможность движения рассмотренного типа делает неприменимым теорему Арнольда о вечном удержании заряженной частицы в магнитной ловушке /4/, коль скоро последняя не является строго аксиально-симметричной. Это обстоятельство всегда подчеркивалось Арнольдом /4/. Более того, Арнольд обнаружил конкретный механизм движения вдоль резонанса /23/, который получил впоследствии название диффузии Арнольда /24/. Строгая оценка скорости этой диффузии сверху была дана Нехорошевым /25/. Нестрогая, но, как надеется автор, более близкая к действительности (см. п. 10) оценка, опирающаяся в конечном счете на критерий перекрытия нелинейных резонансов, была получена в /24/ и, более аккуратно, в /10/.

Механизм диффузии Арнольда связан с существованием так называемого стохастического слоя в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса /9, 10/. Этот слой хорошо виден, например, на

рис. 4. Оказывается, что стохастический слой существует при любом, сколь угодно малом, возмущении, например, при любом $K \rightarrow 0$ для отображения (4.5). По этой причине диффузию Арнольда можно назвать универсальной неустойчивостью многомерных нелинейных колебаний /10/. Слово многомерный означает в данном случае число степеней свободы > 2 . Для двух степеней свободы, например, для движения частицы в аксиально-симметричной ловушке, в силу специфической топологии фазового пространства движение локализовано внутри стохастического слоя и не приводит к реальной неустойчивости как это было объяснено выше (п. 5). В случае же многомерной системы, например, частицы в аксиально несимметричной ловушке (три степени свободы), появляется возможность движения вдоль стохастического слоя, т.е. перпендикулярно плоскости рис. 4, или приблизительно вдоль линии резонанса на рис. 1.

При $K \ll 1$ ширина стохастического слоя и скорость диффузии экспоненциально малы (см. (10.10)). По этой причине диффузию Арнольда в реальной системе, например, в магнитной ловушке, не удастся исследовать с помощью численного счета траекторий при современном состоянии вычислительной техники. В работах /26/ использовалась специальная, очень простая модельная система, доступная для численных экспериментов по диффузии Арнольда. Результаты этих работ показывают, что относительно простая полуэмпирическая теория диффузии Арнольда /24, 10/, основанная в конечном счете на критерии перекрытия резонансов, весьма неплохо описывает это своеобразное явление.

9. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ДВИЖЕНИЮ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

После первых экспериментов /3/ по длительному удержанию электронов в магнитной ловушке эта проблема исследовалась во многих работах. Однако, из-за отсутствия теории полученные результаты носили эмпирический характер. В /24/ была высказана гипотеза, что весьма своеобразные особенности неадиабатического поведения электронов в магнитной ловушке объясняются механизмом диффузии Арнольда. Ниже мы проанализируем эту гипотезу более подробно, используя наиболее полные экспериментальные данные, полученные в работах /27, 6/.

На рис.6, взятом из работы /27/, показана типичная зависимость времени жизни электронов в магнитной ловушке (измеренного разными способами и при различных давлениях остаточного газа) от напряженности магнитного поля. Характерной особенностью этой зависимости является наличие двух "плато". Верхнее плато естественно объясняется тем, что в достаточно сильном магнитном поле неадиабатические эффекты пренебрежимо малы, и время жизни полностью определяется рассеянием электронов на остаточном газе. При некоторой критической напряженности магнитного поля время жизни электрона резко уменьшается более чем на порядок (очевидно вследствие неадиабатических эффектов), а затем, при дальнейшем уменьшении напряженности поля, остается почти постоянным (нижнее плато). Время жизни на нижнем плато изменяется приблизительно обратно пропорционально давлению, как и на верхнем плато. Похожие зависимости получены также в работе /6/, где экспериментально исследовалось движение электронов в поле намагниченного шара, имитирующего геомагнитное поле.

Чтобы понять причину возникновения нижнего плато, посмотрим на спектры электронов по m , измеренные в /27/. Типичный пример такого спектра, пересчитанного по данным работы /27/, приведен на рис.7. Спектр снят через 3.4 сек после инъекции электронов в ловушку. Напряженность магнитного поля несколько меньше критической (см.рис.6). Характерной особенностью спектра является наличие двух "провалов", т.е. областей m , в которых электроны практически отсутствуют. С другой стороны, вследствие рассеяния на газе в эти области все время поступает поток электронов из соседних по m участков спектра. Очевидно, что в области "провалов" образуются какие-то "дырки" или "щели" в фазовом пространстве, через которые электроны "утекают" из ловушки. Как видно из рис.7, эти "щели" приблизительно совпадают с резонансами $\bar{\omega} = 2\Omega n$. По поводу точности этого совпадения следует заметить, что гистограмма на рис.7 строилась с помощью дифференцирования непосредственно измерявшегося интегрального спектра /27/, что сопряжено с большими ошибками. Последние проявляются, в частности, в том, что плотность электронов на рис.7 становится в некоторых местах отрицательной. Тем не менее, "провалы" в спектре электронов по m , совпадающие с резонансными значениями m_n , определенно указывают на "утечку" элект-

ронов из ловушки вдоль резонансов. Это естественно объясняется механизмом диффузии Арнольда (п.8). Становится понятным также и образование нижнего плато на рис.6, т.е. весьма удивительное на первый взгляд прекращение резкого уменьшения времени жизни электронов в ловушке при понижении магнитного поля. Действительно, диффузия Арнольда охватывает лишь относительно узкие стохастические слои, в которых находится незначительная часть электронов. Основная масса электронов попадает в один из стохастических слоев только в результате рассеяния на газе. Однако теперь, чтобы выйти из ловушки, электрону достаточно попасть в ближайший стохастический слой, т.е. достаточно рассеяться на угол значительно меньший, чем для попадания в конус потерь ($m/m_{max} = \sin^2 \beta_0 \approx 0.4$ на рис.7). Так, например, для электронов, находящихся посередине между четвертым и пятым резонансами на рис.7 ($\beta_0 \approx 60^\circ$), для попадания в ближайший стохастический слой достаточно рассеяться приблизительно на 5° , тогда как конус потерь находится на расстоянии около 20° . Это приводит к уменьшению времени жизни в $\sim (20^\circ/5^\circ)^2 = 16$ раз в согласии с данными на рис.6.

Таким образом время жизни, определяемое диффузией Арнольда, всегда пропорционально (для подавляющего большинства частиц) времени рассеяния на остаточном газе, но существенно меньше последнего. В отличие от этого диффузия при перекрытии резонансов (п.5), в том числе и при перекрытии мультиплетов в аксиально несимметричной ловушке (п.7), не зависит от рассеяния на газе. Время жизни частицы в этих условиях остается конечным (и относительно малым) при сколь угодно низком давлении газа.

10. ОЦЕНКА СКОРОСТИ ДИФФУЗИИ АРНОЛЬДА В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Полная система резонансов при движении частицы в аксиально несимметричной ловушке имеет вид:

$$\bar{\omega} p - 2\bar{\Omega} n + \Omega_y m = 0 \quad (10.1)$$

где p, n, m - любые целые числа. В принципе диффузия Арнольда может идти вдоль любого из этих резонансов, который называется в этом случае ведущим резонансом. Ниже мы увидим, однако, что

максимальная скорость диффузии соответствует наиболее "сильным", или основным резонансам системы (см. (10.5)), которыми в рассматриваемом случае являются резонансы $\bar{\omega} = \Omega \bar{n}$ (рис. 1). Диффузия вдоль ведущего резонанса происходит под действием членов возмущения с частотами:

$$\omega_m = \bar{\omega} \rho - \Omega \bar{n} + \Omega_g m \quad (10.2)$$

вследствие резонанса этого возмущения с фазовыми колебаниями на ведущем резонансе. Заметим, что в (10.2) обязательно $m \neq 0$ (ρ, n - произвольны), так как только такое возмущение (зависящее от азимутального угла) изменяет значение углового момента (1.8), что необходимо для движения вдоль ведущего резонанса $\bar{\omega} = \Omega \bar{n}$ (п. 8).

Частота фазовых колебаний на ведущем резонансе (см. (4.5, 7.8))

$$\Omega_\phi \sim \Omega \sqrt{k} \sim \omega e^{-\frac{1}{2\epsilon_a}} \quad (10.3)$$

считая, что $\Omega/\omega \sim \epsilon_a$. Для низких гармоник возмущения (по m, ρ , см. (10.2)) и при достаточно малом ϵ_a (10.3)

$\Omega_\phi \ll |\omega_m|$. Эффект возмущения в этих условиях оказывается экспоненциально малым (ср. п. 2):

$$\frac{\Delta \mu_A}{\mu} \sim \nu e^{-\frac{c|\omega_m|}{\Omega_\phi}} \quad (10.4)$$

Здесь $\Delta \mu_A$ характеризует смещение частицы вдоль ведущего резонанса, $\nu \sim \Delta B/B$ - азимутальная неоднородность магнитного поля (7.2), а $c \sim 1$ - некоторая постоянная.

Коэффициент диффузии по μ пропорционален $(\Delta \mu_A)^2$ и может быть очень грубо оценен посредством:

$$D_\mu \sim (\Delta \mu_A)^2 \omega \sim \omega m^2 \nu^2 e^{-\frac{2c|\omega_m|}{\Omega_\phi}} \quad (10.5)$$

Точное значение предэкспоненциального множителя несущественно ввиду очень сильной зависимости D_μ от ϵ_a (см. (10.3, 4)).

Отметим, что скорость диффузии вдоль резонанса с $m \neq 0$ (10.2) является пренебрежимо малой, так как частота фазовых колебаний на таком резонансе содержит дополнительный малый множитель $\sim \sqrt{\nu} \ll 1$.

Для высоких гармоник возмущения частота ω_m быстро падает примерно по закону (см., например, /10/):

$$\omega_m \approx \frac{\omega_r}{|m|^{N-1}} \quad (10.6)$$

Здесь ω_r - некоторая постоянная, зависящая от основных частот $\bar{\omega}, \bar{n}, \Omega_g$ системы резонансов (10.2); $N = 3$ - число основных частот, а

$$|m|^2 = \rho^2 + n^2 + m^2 \quad (10.7)$$

Однако амплитуды высоких гармоник возмущения убывают с ростом $|m|$ еще быстрее - по экспоненциальному закону (см. п. 2). Пусть, например, эти амплитуды пропорциональны $e^{-\sigma|m|}$, где σ - некоторая постоянная. Тогда в показателе экспоненты, определяющей скорость диффузии Арнольда (10.5), появится дополнительное слагаемое:

$$2c \frac{|\omega_m|}{\Omega_\phi} \rightarrow 2c \cdot \frac{\omega_r}{\Omega_\phi} \cdot \frac{1}{|m|^{N-1}} + 2\sigma|m| \equiv -E(|m|)$$

где мы использовали выражение (10.6) для частот возмущения ω_m . Новый показатель $E(|m|)$ имеет максимум при

$$|m| = m_0 = \left[(N-1) \frac{c}{\sigma} \cdot \frac{\omega_r}{\Omega_\phi} \right]^{1/N} \quad (10.8)$$

равный

$$-E(m_0) = \frac{5N}{N-1} \left[(N-1) \frac{c}{\sigma} \cdot \frac{\omega_r}{\Omega_\phi} \right]^{1/N} \quad (10.9)$$

Из (10.5) получаем оценку для коэффициента диффузии Арнольда в виде:

$$D_\mu \sim \omega m^2 \nu^2 e^{-a \left(\frac{\omega_r}{\Omega_\phi} \right)^2} \quad (10.10)$$

где

$$a = \sigma^{\frac{N-1}{N}} \frac{N}{N-1} [c(N-1)]^{1/N}; \quad q(N) = \frac{1}{N} \quad (10.11)$$

Приведенный вывод оценки D_{μ} является, конечно, очень упрощенным, более подробный анализ этой задачи содержится в /10/ (см. также /26/).

Строгая оценка скорости диффузии Арнольда сверху, полученная Нехорошевым /25/, имеет структуру, сходную с (10.10). Наиболее существенное отличие связано с величиной показателя q . Согласно /25/ $q(3) = \frac{4}{59} \approx \frac{1}{15}$. Результаты численных экспериментов, приведенные во второй из работ /26/, показывают что это значение q , вероятно, сильно занижено.*)

Для рассматриваемой задачи об удержании заряженной частицы в магнитной ловушке $N = 3$, а частота фазовых колебаний Ω_{ϕ} на ведущем резонансе $\bar{\omega} = 2\bar{\omega}_n$ определяется оценкой (10.3). Учитывая также, что $D_{\mu} \sim \mu^2 / \tau$, где τ — время жизни частицы в ловушке, получаем, из (10.10) следующую оценку для скорости диффузии Арнольда в магнитной ловушке:

$$\tau \omega v^2 \sim \exp\left(\frac{1}{\sigma \epsilon_a}\right) \quad (10.12)$$

где величина $v \sim a(\omega_r / \omega)^{1/3}$ слабо (как корень кубический) зависит от всех параметров кроме σ ($v \sim \sigma^{2/3}$ (10.11)). Характерной особенностью этой оценки является очень сильная зависимость времени жизни частицы в ловушке от параметра адиабатичности (двойная экспонента!). Это свидетельствует о высокой точности сохранения адиабатического инварианта частицы — магнитного момента в смысле его накапливающихся изменений (см. п.2).

Подчеркнем еще раз, что в отличие от более или менее аккуратной теории устойчивости движения частицы в аксиально-симметричной магнитной ловушке (п. 5) оценка (10.12) получена на основе очень упрощенных представлений о весьма сложном процессе, каким является диффузия Арнольда (подробнее см. в /26, 10/). Поэтому эта оценка оказывается довольно грубой, хотя очень сла-

* В последней работе Нехорошева (УМН 32:6 (1977) 5) приведена улучшенная оценка, которая в рассматриваемом случае дает: $q(3) = 1/8$.

бая зависимость $\epsilon_a(\tau)$ (двойной логарифм) до некоторой степени снижает влияние этой грубости при определении критических значений параметров системы.

Попробуем теперь провести количественное сравнение аналитической оценки (10.12) с экспериментальными данными, полученными в работах /27, 6/. Основная неопределенность связана здесь с отсутствием данных по азимутальной асимметрии магнитного поля, которая специально не измерялась. Тем не менее, исходя из точности контрольных измерений магнитного поля, проведенных авторами работ /27, 6/, можно принять с некоторой долей правдоподобия, что величина $v \sim 10^{-2}$ для поля безжелезных соленоидов /27/ и $v \sim 10^{-1}$ вблизи поверхности намагниченного шара /6/. Опять таки в силу очень слабой зависимости $\epsilon_a(v)$ (10.12) неизбежные ошибки принятых значений v не могут существенно повлиять на критическое значение ϵ_a .

Сравнение с экспериментальными данными проведем следующим образом. Значения параметров системы возьмем для критической напряженности магнитного поля (см. рис.6), при которой предполагаемая диффузия Арнольда существенно уменьшает время жизни частицы в ловушке. Для τ возьмем его значение на верхнем плато, исходя из того, что критическое поле как раз и соответствует такому случаю, когда скорость диффузии Арнольда вдоль ведущего резонанса сравнивается со скоростью диффузии из-за рассеяния на остаточном газе. В качестве ведущего резонанса выберем ближайший к частицам с максимальным углом β_0 . Например, для случая на рис. 7 примем $n = 5$ (соответствующий этому резонансу угол $\beta_0 = \beta_n \approx 55^\circ$). Наконец, параметр адиабатичности ϵ_a подсчитаем по формуле (2.9). После этого из оценки (10.12) найдем единственную неизвестную величину v .

Результаты такого сравнения приведены в Таблице II (по данным работы /27/) и в Таблице III (по данным /6/). В последнем случае энергия электронов ~ 100 эВ, а напряженность магнитного поля ~ 30 Гс. В таблице II второй случай соответствует спектру на рис.7.

Значения v в Таблице II хорошо согласуются между собой. В Таблице III последний случай явно выпадает, что связано, повидимому, со слишком большим углом ($\beta_0 \approx 70^\circ$) захваченных электронов. При этом параметр адиабатичности ϵ_a и скорость диффузии очень

малы. В таком случае частица выйдет из ловушки быстрее, если сначала рассеется на остаточном газе до меньших углов β_0 , "пропустив" несколько резонансов с малым ε_a . Средние значения β заметно различаются между собой, что отражает, повидимому, зависимость (10.11): спектр движения частицы в поле магнитного диполя богаче высокими гармониками, что соответствует меньшему значению β , а, следовательно и ε_a .

Ввиду грубости оценки (10.12) вряд ли имеет смысл при её использовании обращаться к довольно громоздкому выражению (2.9) для вычисления ε_a . Вместо этого возьмем более простое выражение (2.8) и положим $\beta_0 \approx 45^\circ$. Тогда оценка (10.12) может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon_a} \approx \frac{l}{\rho_0} \approx 6 \ln \ln (\tau \omega v^2) - d \quad (10.13)$$

где величина $d = 6 \ln \beta$ зависит от конфигурации магнитного поля ловушки (см. Таблицы II, III). Оценки (10.12, 13) имеет конечно, смысл только при достаточно малых ε_a , вдали от перекрытия резонансов (п. 5). Они годятся, повидимому, для грубой прикидки эффекта диффузии Арнольда в магнитной ловушке. Ясно, однако, что здесь требуется дальнейшие исследования, как теоретические, в частности, оценка параметра d , так и специальные эксперименты по проверке и уточнению теории диффузии Арнольда.

Л и т е р а т у р а

- I. Г.И.Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую, сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций" (Издательство АН СССР, Москва, 1958) т. III, с. 3.
2. R.Post, Summary of UCRL Pyrotron (Mirror Machine) Program, Proc. 2d Intern. Conf on Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneve, 1958), Report No 377.
3. С.Н.Родионов, Атомная энергия 6 (1959) 623; G.Gibson, W.Jordan, E.Lauer, Phys.Rev.Lett. 5 (1960) 141.
4. В.И.Арнольд, УМН 18:6 (1963) 91.
5. В.М.Самарин et al., Theory of Mirror Machines at High Beta, Proc. 6th Intern. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1977) v.III, p. 161.
6. В.Д.Ильин. Геомагнетизм и аэронавигация 8:3 (1968) 564; В.Д.Ильин, А.Н.Ильина, С.Н.Кузнецов, Космические исследования II:4 (1973) 559; В.Д.Ильин, А.Н.Ильина, ЖЭТФ 70:4 (1976) 1269; 72 (1977) 983.
7. А.А.Андронов, М.А.Леонтович, Л.И.Мандельштам, ЖРФХО, 60 (1928) 413.
8. Б.В.Чириков, Атомная энергия 6 (1959) 630.
9. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН 105 (1971) 3.
10. B.V.Chirikov, A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems, Physics Reports (to appear).
- II. A.Garren et al., Individual Particle Motion and the Effect of Scattering in an Axially Symmetric Magnetic Field, Proc., 2d Intern.Conf.on Peaceful Uses of Atomic Energy, 31(1958)65.
12. R.J.Hastie, G.D.Hobbs, J.B.Taylor, Non-Adiabatic Behaviour of Particles in Inhomogeneous Magnetic Fields, Proc. 3d In-

tern. Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (IAEA, Vienna, 1969) v. 1, p. 389.

13. M.Kruskal, J.Math. Phys. 3 (1962) 806.
14. А.М.Дыхне, А.В.Чаплик, ЖЭТФ 40 (1961) 666.
15. Е.М.Крушкаль, ЖТФ 42 (1972) 2288.
16. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (Физматгиз, Москва, 1958).
17. N.N.Filonenko, R.Z.Sagdeev, G.M.Zaslavsky, Nuclear Fusion 7 (1967) 253.
18. M.Braun, Journ. Diff. Equations 8 (1970) 294.
19. R.N.Cohen, G.Rowlands, J.H.Foote, Nonadiabaticity in Mirror Machines, Preprint UCRL-78889 (1977); Physics of Fluids (to appear).
20. A.J.Dragt, Reviews of Geophysics 3:2 (1965) 255.
21. О.В.Сердюк, ЖТФ 46 (1976) 2136.
22. А.А.Харкевич, Спектры и анализ, Гостехиздат, 1957, § 7.
23. В.И.Арнольд, ДАН 156 (1964) 9.
24. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, Институт ядерной физики, Новосибирск, 1969.
25. Н.Н.Нехорошев, Функциональный анализ и его приложения 5:4 (1971) 82; Метод последовательных канонических замен переменных, Добавление в книге: Ю.Мозер, Лекции о гамильтоновых системах (Мир, Москва, 1973).
26. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда), Труды 7-й Международной конференции по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975), т. 2, с. 315; Диффузия Арнольда в системе трех резонансов (в печати).
27. В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, В.И.Юрченко, А.Н.Яснецкий, ЖЭТФ 55 (1968) 3; В.Г.Пономаренко, Л.Я.Трайнин, Исследования по несохранению магнитного момента электронов в ловушке с магнитными пробками, Препринт 74-III (Институт ядерной физики, Новосибирск, 1974).

Таблица I

ρ_{\perp} см	r_c см	R_s см	β_0 град	ϵ_a	N	K_N	K	$\frac{K}{K_N}$	$\frac{\delta\rho_0}{\rho_0}$	
40.7	19.3	16	63	.314	370	1.60	1.20	.75	.21	
36.6	23.4	15	64	.271	340	1.62	1.05	.65	.21	
32.5	27.5	14	64	.239	310	1.64	1.01	.62	.18	
28.1	31.9	11	62	.219	270	1.68	1.14	.68	.13	
24.1	35.9	7	59	.208	220	1.73	1.40	.81	.07	
20.2	39.8	4	56	.192	180	1.79	1.50	.84	.05	
Средние							1.22	.72		
Разброс отдельных значений							$\pm .18$	$\pm .10$		

Таблица II

W КэВ	B_0 гс	ρ тор	τ сек	$\frac{l}{\rho_0}$	β_n град	$\frac{1}{\epsilon_a}$	b	d
9	118	10^{-8}	~ 4	8.96	46	7.89	3.66	7.79
"	87	5×10^{-9}	"	6.61	55	6.68	4.38	8.86
"	"	10^{-8}	"	"	66	8.25	3.37	7.29

Средние 3.80 7.98

Таблица III

ρ тор	τ сек	$\frac{l}{\rho_0}$	β_n град	$\frac{1}{\epsilon_a}$	b	d
5×10^{-10}	~ 4	17.6	35	13.6	1.75	3.36
"	"	15.5	50	14.5	1.51	2.47
"	"	14.6	70	20.5	.55	-3.59

Средние 1.63 2.92

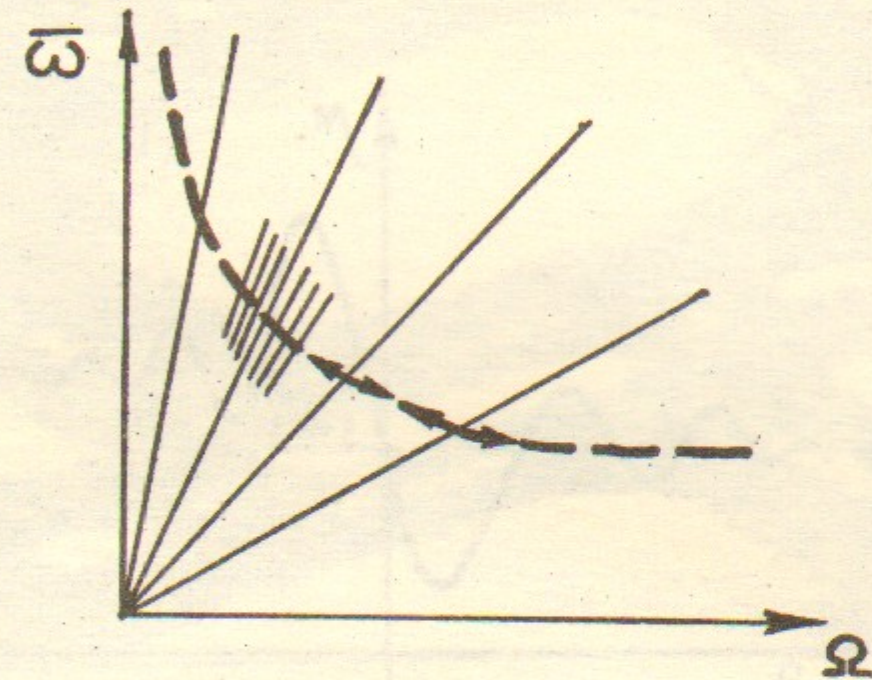


Рис. I. Схема перекрытия нелинейных резонансов на плоскости частот $\bar{\omega}$, Ω . Сплошные прямые — линии резонансов $\bar{\omega}/2\Omega = n$. Пунктирная кривая — проекция поверхности интегралов движения ($V = \text{const}$; $M = \text{const}$) на плоскость частот. Стрелками показаны фазовые колебания на нелинейных резонансах. Для одного из резонансов показано его расщепление в мультиплет вследствие азимутальной неоднородности магнитного поля (п. 7).

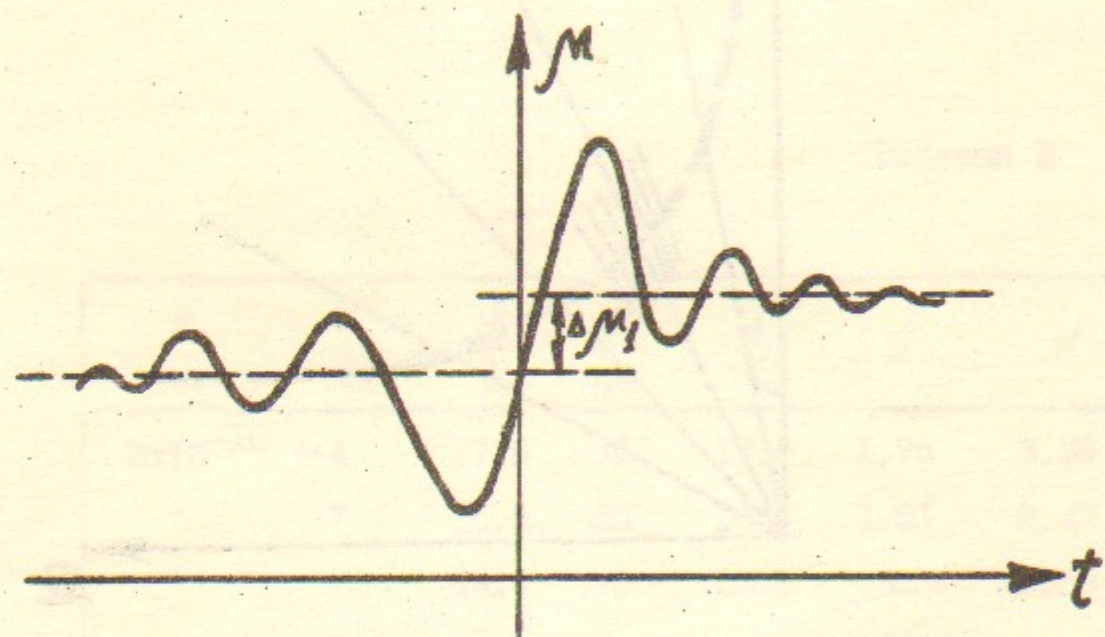


Рис.2. Схематическая зависимость магнитного момента частицы от времени; $t = 0$ соответствует прохождению медианной плоскости ловушки.

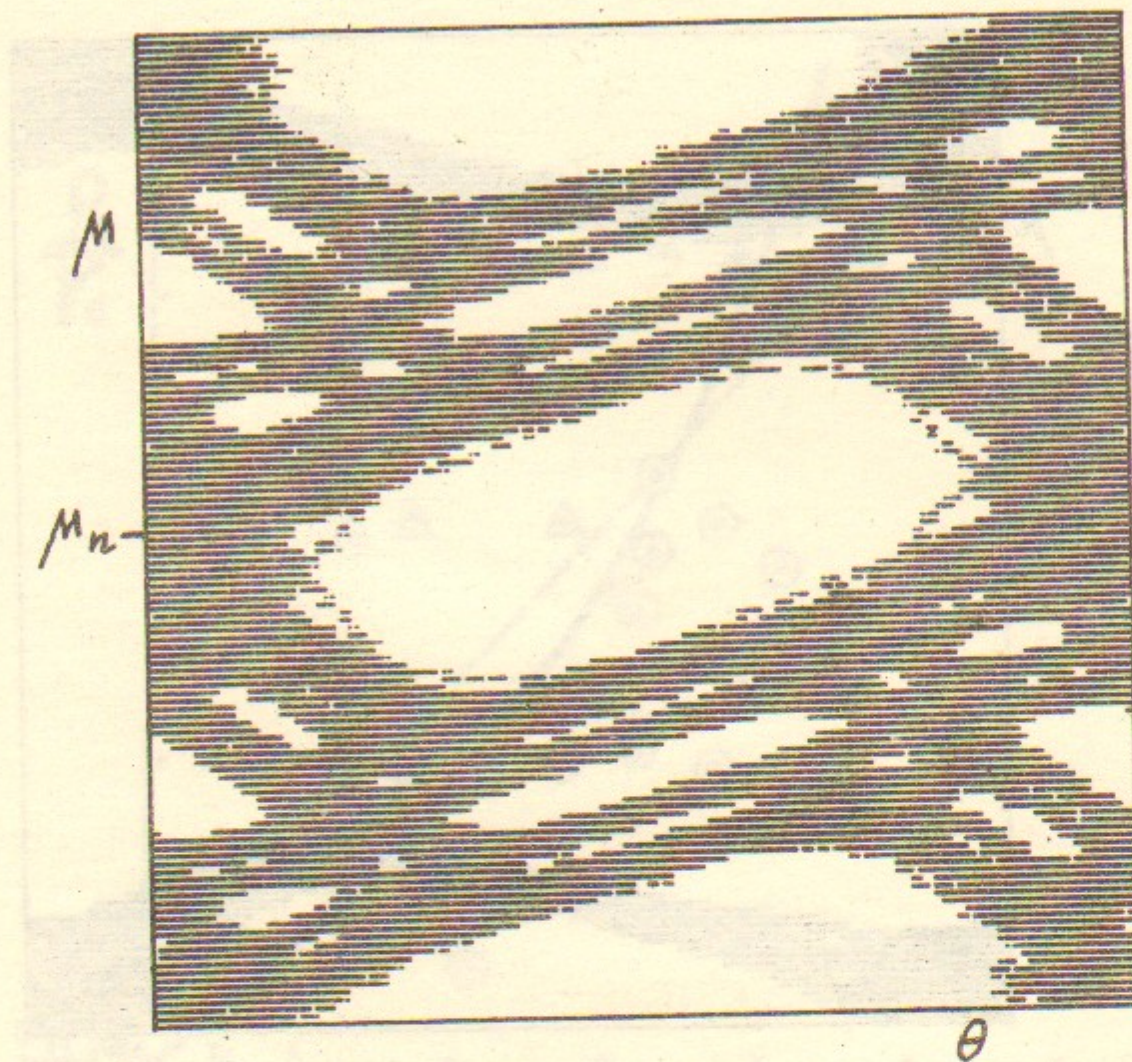


Рис.3. Фазовая плоскость отображения (4.5) для одной траектории за 10^5 итераций; $K = 1.16$. Отмечено одно из резонансных значений $m = m_n$. Заштрихованная область соответствует неустойчивому (стохастическому) изменению магнитного момента частицы.

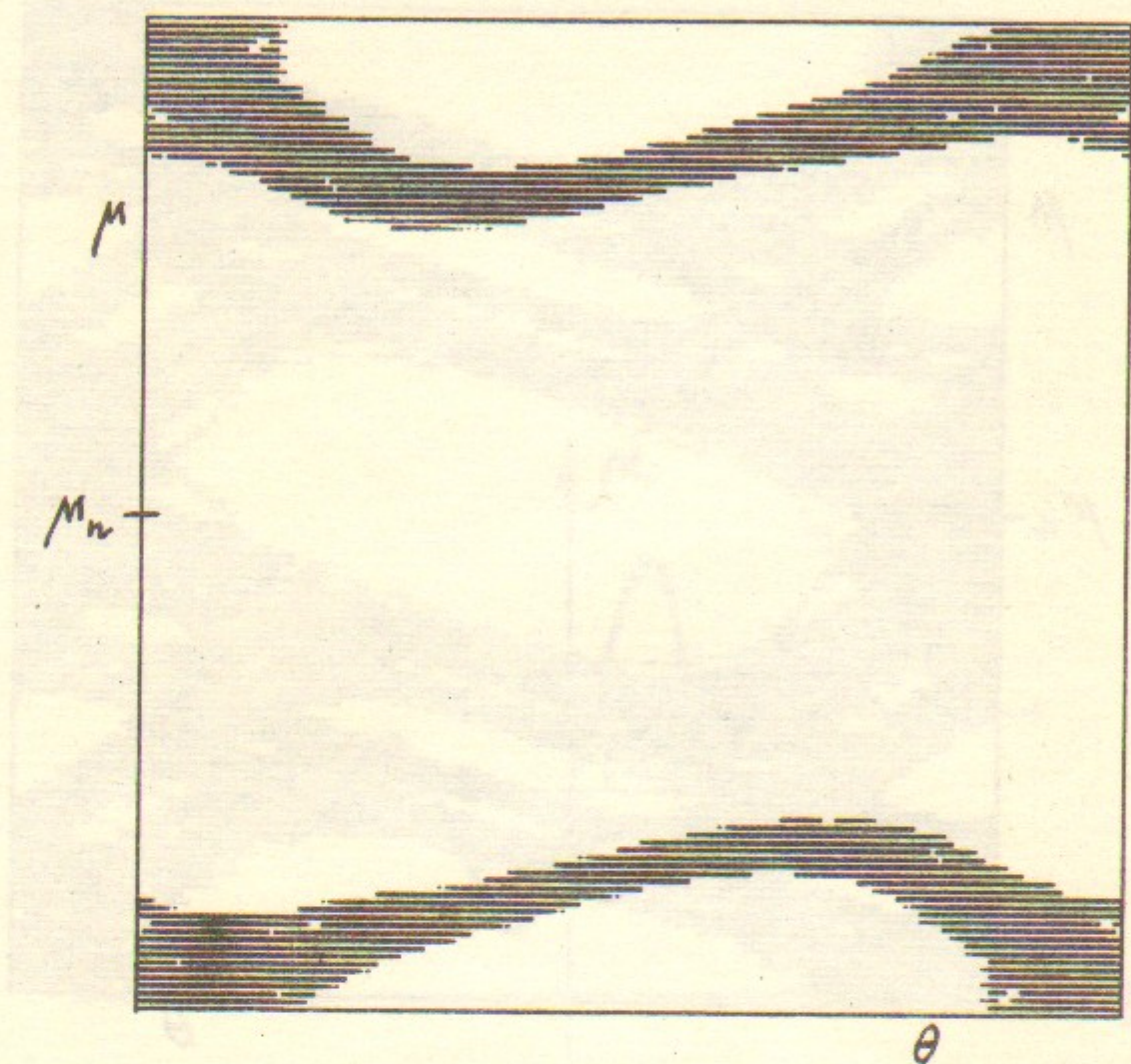


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но $K = .96$ (10^6 итераций). Стохастическое движение локализовано в пределах узкого слоя вдоль сепаратрисы нелинейного резонанса, изменение M строго ограничено.

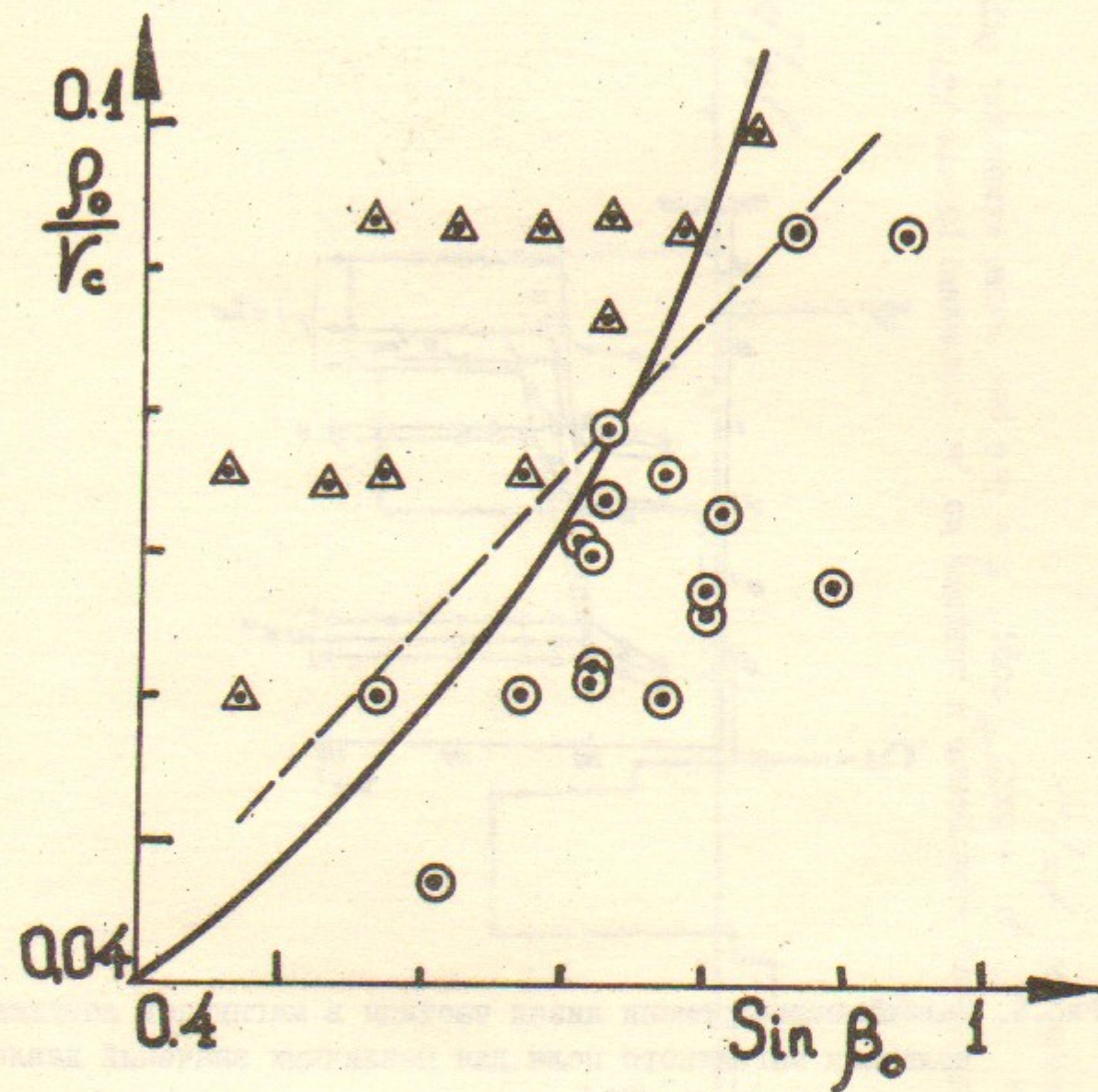


Рис. 5. Граница устойчивости движения частицы в поле магнитного диполя по данным Драйта [20]: кружками отмечены устойчивые траектории, треугольниками - неустойчивые; пунктирная прямая - эмпирическая граница устойчивости ($\rho_0/r_c = 0.11 \sin \beta_0$), сплошная кривая - граница по критерию перекрытия резонансов ($K = 1$).

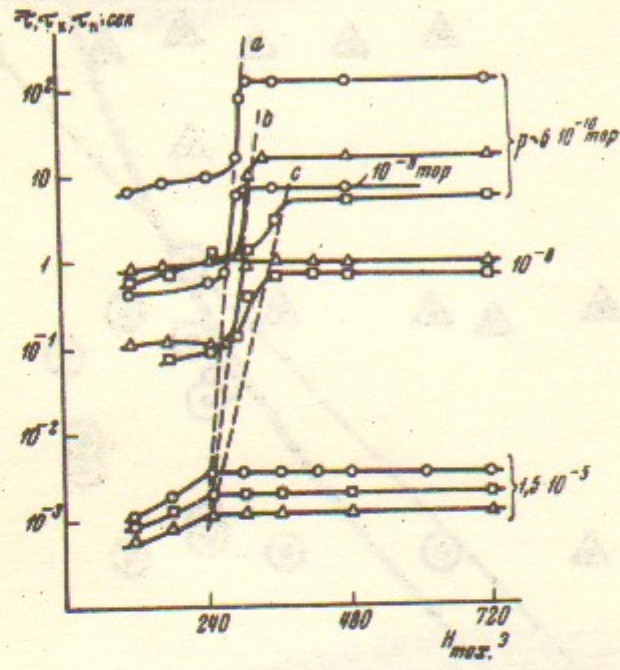


Рис. 6. Зависимость времени жизни частицы в магнитной ловушке от величины магнитного поля для различных значений давления остаточного газа /27/.

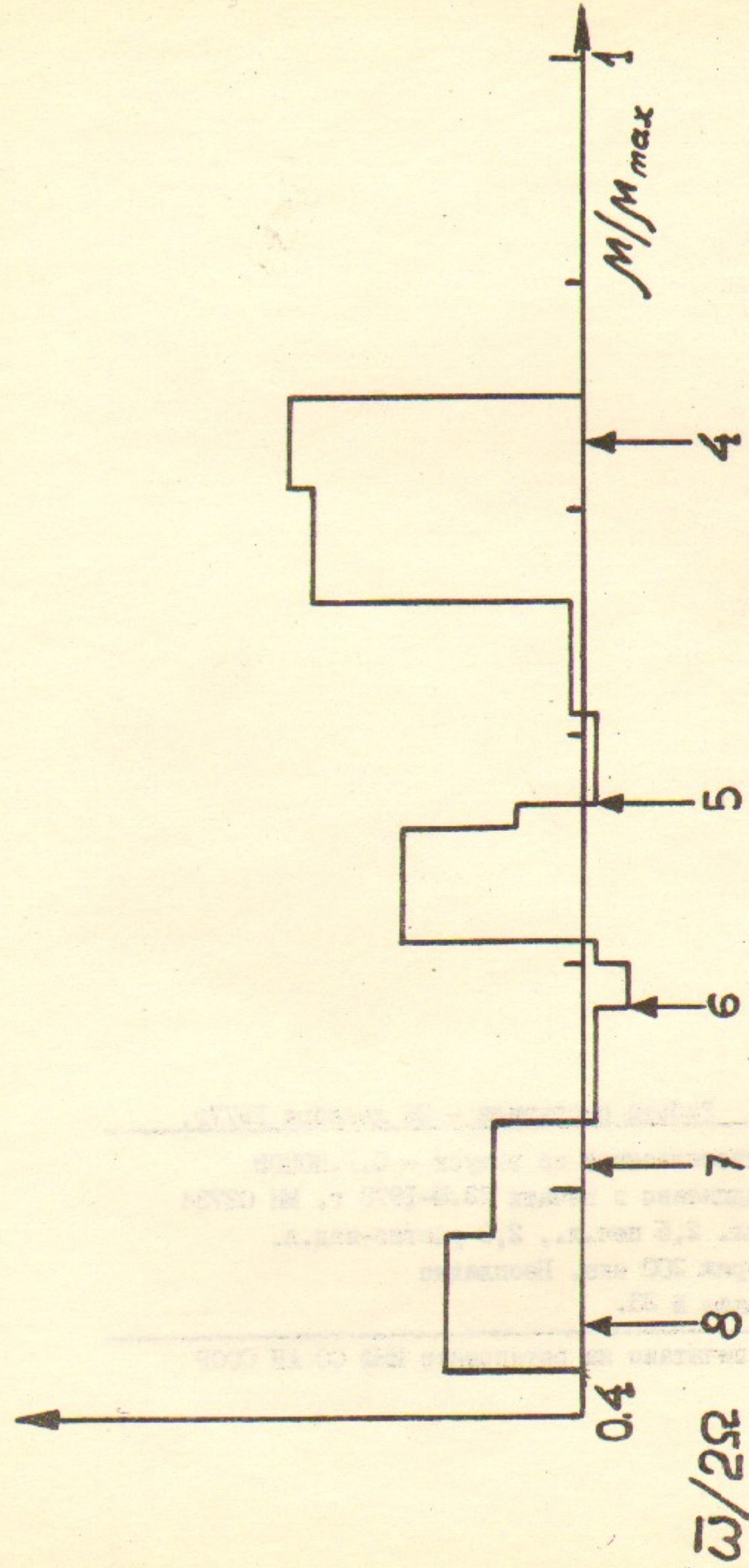


Рис. 7. Дифференциальный спектр электронов в ловушке по m согласно работе /27/:
 $m_{max} = v^2/2V_0$; $P = 5 \cdot 10^{-9}$ тор; $t = 3.4$ сек после инжекции. Стрелками показаны резонансные значения m/m_n .