

P.97

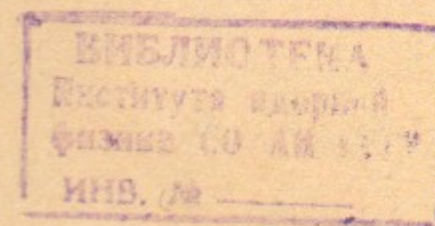
13

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 78 - 30

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ
ПЕРЕНОСА В АМБИПОЛЯРНЫХ ЛОВУШКАХ



Новосибирск

1978

Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков

НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

В АМБИПОЛЯРНЫХ ЛОВУШКАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

Отсутствие аксиальной симметрии магнитного поля в амби-
лярной ловушке может приводить к значительному росту попереч-
ных потерь по сравнению с классическими. В работе построена
теория процессов переноса в амбилярной ловушке для случая,
который характеризуется тем, что за время пролета ловушки ио-
ном он дрейфует по азимуту на угол, малый по сравнению с
единицей.

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследования по открытым магнитным ловушкам в СССР были инициированы известной работой Г.И.Будкера^{ж)} [1], в которой автор предложил идею пробкотрона. Будучи очень простым, пробкотрон позволяет вместе с тем обеспечить достаточно хорошую изоляцию плазмы от стенок установки. Поэтому пробкотроны получили широкое распространение в работах по физике плазмы. Однако в чисто термоядерном аспекте их применение наталкивается на определенные трудности, возникающие из-за того, что время жизни плазмы в них не превышает, грубо говоря, времени рассеяния ионов вследствие кулоновских столкновений. Поэтому в разное время был предложен ряд модификаций исходной идеи: переход к более плотной плазме с использованием "многопробочного" магнитного поля [2, 3], использование вращения плазмы (см., например, [4]) и т.д.

В 1974 году в Институте ядерной физики СО АН СССР был предложен еще один вариант открытой ловушки (публикация относится к 1976 году [5]), который отличается от исходного [1] тем, что к каждому концу обычного пробкотрона присоединяется еще по одному пробкотрону (рис.1) с плазмой относительно высокой плотности (примерно на порядок большей чем в центральном пробкотроне). При таком распределении плотности плазмы амбиполярный потенциал, поддерживающий плотность электронов равной плотности ионов, будет распределен так, что для ионов центрального пробкотрона возникнет глубокая потенциальная яма (рис.2), препятствующая их вылету вдоль магнитного поля, и время жизни этих ионов станет много больше τ_i .

Разумеется, для поддержания высокой плотности плазмы в концевых пробкотронах требуются определенные энергетические затраты, но увеличивая длину центральной ловушки при неизменной длине концевых, можно добиться того, чтобы энерговыделение в центральном пробкотроне превысило потери в концевых. Позже аналогичная идея была рассмотрена в США [6].

Существенно, что для обеспечения гидродинамической устойчивости плазмы предполагается использовать аксиально-несимметричное магнитное поле с магнитными поверхностями, схема-

^{ж)} Выполнена в 1954 году, опубликована в 1958 году.

тически изображенными на рис. I. Как было показано в работе [7], отсутствие аксиальной симметрии магнитной системы приводит к появлению ряда существенных особенностей в характере поперечных потерь плазмы в амбиполярных ловушках.

Чтобы качественно понять существо эффекта, рассмотрим движение частиц (для определенности ионов) в центральном пробкотроне. Поскольку электрическое и магнитное поля статические, а ларморовский радиус ионов ρ_i мал по сравнению со всеми характерными масштабами задачи, то при движении иона сохраняются его полная энергия \mathcal{E} и магнитный момент $\mu = m_i v^2 \sin^2 \theta / 2H$ (где m_i и v — масса и скорость, θ — угол между вектором скорости частицы и магнитным полем, H — напряженность магнитного поля), а для описания движения ведущего центра частицы можно воспользоваться дрейфовым приближением. При движении вдоль длинного аксиально-симметричного участка центрального пробкотрона дрейф возникает, во-первых, за счет радиального электрического поля, связанного с изменением плотности по радиусу, и, во-вторых, за счет радиальной неоднородности продольного магнитного поля, обусловленной конечным давлением плазмы, и приводит к вращению ведущего центра вокруг магнитной оси.

Обозначим через $\Delta\psi$ изменение полярного угла ведущего центра частицы за один пролет ловушки (пользуемся цилиндрической системой координат с полярной осью, совпадающей с магнитной осью системы, см. рис. I). В работе [7] было отмечено, что характер движения ионов и скорость радиальных потерь существенно зависят от того, велик или мал угол $\Delta\psi$ по сравнению с единицей. При $\Delta\psi \gg 1$, вообще говоря, существенную роль играют стохастические эффекты, и время жизни плазмы перестает зависеть от частоты столкновений (см. [7]). Этот случай будет подробно исследован в отдельной работе, но уже и предварительные оценки, приведенные в [7], показывают, что численно время жизни плазмы в таких условиях слишком мало (обычно меньше τ_i). При $\Delta\psi \sim 1$ потери плазмы определяются столкновительной диффузией "резонансных" частиц, т.е. частиц, для которых выполняется условие $\ell \Delta\psi = k\pi$ (ℓ, k — натуральные числа), и время жизни плазмы обычно также оказывается малым [8]. Поэтому реальные установки должны, по-видимому, конструироваться так, чтобы для большей части ионов выполнялось ус-

ловие $\Delta\psi \ll 1$ (точнее см. ниже). Именно эта ситуация исследуется в настоящей статье.

При $\Delta\psi \ll 1$, кроме величин \mathcal{E} и μ сохраняется также так называемый продольный адиабатический инвариант (см., например, [9])

$$I = \int \sqrt{\frac{2}{m_i} (\mathcal{E} - e\varphi - \mu H)} ds \quad (1)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль силовой линии между точками отражения частицы (часть ионов отражается магнитными пробками центрального пробкотрона, а ионы с малыми значениями μ отражаются от потенциальных барьеров в концевых пробкотронах). Наличие этого дополнительного интеграла означает, что задание в начальный момент положения частицы и значений \mathcal{E} и μ однозначно определяет дрейфовую поверхность. Существенно, что дрейфовые поверхности, проходящие через некоторую силовую линию, разные для разных \mathcal{E} и μ , см. рис. 3 (для аксиально-симметричной ловушки этот эффект, очевидно, отсутствует*). Поэтому при рассеянии частицы в некоторой точке пространства она переходит на другую дрейфовую поверхность, у которой расстояние до оси может быть больше, чем у исходной. Поскольку, вообще говоря, Γ меняется вдоль дрейфовой поверхности на величину, существенно превышающую ρ_i , время ухода ионов на стенку мало по сравнению с оценкой по классической диффузии. Так, в предельном случае, когда "размах" $\Delta\Gamma = \Gamma_{\max} - \Gamma_{\min}$ дрейфовых оболочек сравним с R , имеем $\tau \sim \tau_i$.

Приведенные рассуждения вполне аналогичны тем, которые применялись Г.И. Будкером еще 20 лет назад в задаче о потерях частиц в тороидальных ловушках [II]. Фактически в работе [II] содержалась значительная часть идеологии "неоклассических" процессов переноса, получившей в последние 10 лет большое развитие.

Ясно, что минимальное время жизни плазмы при рассматриваемом механизме потерь равно τ_i и поэтому такой механизм существен именно в применении к амбиполярным ловушкам, где продоль-

* Заметим, впрочем, что если в такой ловушке возбуждена аксиально-несимметричная волна той или иной природы, то радиальные блуждания частиц могут возникать вследствие дрейфа в поле волны. Такой механизм неоклассического переноса в пробкотронах рассматривался в [10].

ные потери ионов подавлены (в обычных пробкотронах он в худшем случае давал бы уменьшение времени жизни в 1,5–2 раза по сравнению с чисто продольными потерями). Он может также играть важную роль и в других типах открытых ловушек, допускающих удержание плазмы в течение времени, значительно превышающего τ_i . В частности, речь может идти о многопробочных ловушках и о ловушках с обращенным полем (имеются в виду аксиально-несимметричные варианты этих ловушек).^{*}

II. ПЛАЗМА В КРАЙНИХ ПРОБКОТРОНАХ. ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

Высокая плотность плазмы в крайних пробкотронах будет поддерживаться за счет инъекции в них ионов с энергией, существенно превышающей электронную температуру T_e [5, 6]. Влияние амбиполярного потенциала на движение быстрых ионов несущественно, так что пространственное распределение их плотности $n_i(\vec{r})$ полностью определяется условиями инъекции и геометрией магнитного поля. Время жизни быстрых ионов, очевидно, порядка времени столкновения между ними.

Частота электрон-электронных столкновений велика по сравнению с частотой ион-ионных столкновений, и поэтому функция распределения электронов близка к максвелловской, причем температура постоянна вдоль каждой силовой линии. Квазинейтральность плазмы по силовой линии обеспечивается за счет соответствующей подстройки амбиполярного потенциала.

Оценим теперь время обмена электронами между различными силовыми трубками. Этот обмен происходит за счет дрейфа электронов. Как уже отмечалось во Введении, форма дрейфовых оболочек, проходящих через одну и ту же силовую линию, в аксиально-несимметричном магнитном поле разная для разных значений ε и μ . Вообще говоря, "размах" оболочек по порядку величины равен поперечному размеру плазмы в крайних пробкотронах. Поскольку электронные столкновения приводят к изменению ε и μ и перескоку электронов с одной дрейфовой оболочки на другую, в крайних пробкотронах за время порядка ν_e^{-1} происходит радиальное перемешивание электронов. Их температура делается однородной не только вдоль отдельной силовой линии, но и по всей плазме. Про-

^{*}Подчеркнем, что в отличие от токамаков, отсутствие аксиальной симметрии задачи приводит к возможности диффузии плазмы за счет столкновений между частицами одного сорта.

исходящее за счет радиального перемешивания установление полного термодинамического равновесия в газе электронов означает, что плотность электронов во всем объеме крайнего пробкотрона (а не только вдоль отдельной силовой линии) подчиняется бальцмановскому распределению:

$$n_e(\vec{r}) = \text{const} e^{\frac{e\psi(\vec{r})}{T_e}} \quad (2)$$

Отметим, что при предполагаемом известным пространственном распределении ионов $n_i(\vec{r})$ условие квазинейтральности $n_e(\vec{r}) = n_i(\vec{r})$ позволяет найти пространственное распределение потенциала:

$$\psi(\vec{r}) = \text{const} + \frac{T_e}{e} \ln n_i(\vec{r}). \quad (3)$$

Как известно (см. Приложение), в приосевой области магнитной ловушки дрейфовые оболочки для частиц с разными значениями ε и μ мало отличаются друг от друга, так что радиальное перемешивание может происходить медленнее, чем за время ν_e^{-1} . При этом утверждение об установлении бальцмановского распределения электронов во всей ловушке все же остается в силе, если время перемешивания меньше времени жизни электронов в ловушке.

Обмен электронами между центральным и крайним пробкотронами происходит за время порядка нескольких ν_e^{-1} . Иными словами бальцмановское распределение вдоль силовой трубки устанавливается не только в крайнем пробкотроне, но и по всей длине установки. В сочетании с тем фактом, что в крайних пробкотронах имеется бальцмановское равновесие между разными силовыми трубками, это означает, что и во всей установке в целом электроны подчиняются распределению Больцмана.

Описанный механизм установления электронного равновесия становится малоэффективным в случае, когда число частиц в центральном пробкотроне значительно (примерно на два порядка) превышает число частиц в крайних пробкотронах: тогда обмен электронами (через крайние пробкотроны) между различными силовыми трубками центрального пробкотрона требует слишком мно-

го времени. В таких условиях существенным становится перемешивание электронов внутри самого центрального пробкотрона. Этот процесс идет относительно медленно из-за того, что размах дрейфовых оболочек частиц в центральном пробкотроне мал (см. раздел Ш), но, по-видимому, достаточно быстро для установления бальцовского распределения электронов в реальных условиях.

Ниже мы будем считать, что бальцовское равновесие успевает установиться. Это допущение, не влияя на существо дальнейших выводов, позволяет вместе с тем сделать многие оценки более конкретными*).

Ш. ДРЕЙФОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЧАСТИЦ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

Выделим в адиабатическом инварианте I аксиально-симметричное слагаемое I_0 и часть, зависящую от угла ψ :

$$I = I_0(r, \mu, \varepsilon) + I_1(r, \psi, \mu, \varepsilon), \quad (4)$$

$$I_0 = \langle I \rangle, \quad \langle I_1 \rangle = 0,$$

где угловыми скобками обозначается усреднение по углу ψ :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\psi$$

Как будет видно из дальнейшего, добавка I_1 состоит из двух слагаемых: $I_1 = I_1' + I_1''$. Первое слагаемое I_1' связано с вкладом в I_1 области магнитных пробок центрального пробкотрона. Конкретное выражение для нее можно получить, задавшись определенной конфигурацией пробочного магнитного поля и проводя интегрирование в (I) по области, где напряженность квадрупольной гармоники отлична от нуля.

*). Отметим, что при наличии размешивания электронов в крайних пробкотронах становится возможным протекание токов вдоль силовых линий центральной ловушки (поскольку эти токи могут теперь замыкаться через крайние пробкотроны), так что, вообще говоря, перестает выполняться критерий [12] отбора равновесных конфигураций в центральной ловушке, утверждающий, что давление плазмы постоянно на тех магнитных поверхностях, для которых

$$\int \frac{ds}{H} = \text{const}$$

(интегрирование ведется между амбиполярными пробками, длина которых считается исчезающе малой).

Если поперечный размер плазмы в магнитной пробке порядка длины пробки L_n (под L_n мы понимаем расстояние, на котором магнитное поле в пробке меняется в два раза), грубая оценка I_1' , справедливая для основной массы частиц, имеет вид

$$I_1' \sim L_n v_{th} \sim \frac{L_n}{L} I_0$$

Ситуация становится более тонкой, когда радиус плазмы R мал по сравнению с L_n , так что для описания поля в области плазмы можно пользоваться параксиальным приближением. В этом случае, как показано в Приложении, в первом приближении по параметру $(R/L_n)^2$ I_1' оказывается равным нулю. Оценка отношения I_1'/I_0 при этом имеет вид

$$\alpha \equiv \frac{I_1'}{I_0} \sim \left(\frac{R}{L_n}\right)^4 \frac{L_n}{L} \quad (5)$$

Второе слагаемое, I_1'' , обусловлено наличием аксиально-несимметричных составляющих в ψ и H_z на длинной части центральной ловушки:

$$\psi = \psi_0(r) + \delta\psi(r, \psi), \quad H_z = H_0(r) + \delta H(r, \psi) \quad (6)$$

$$\psi_0 = \langle \psi \rangle, \quad H_0 = \langle H_z \rangle$$

Причина возникновения асимметрии состоит в том, что в процессе диффузии плазмы ее функция распределения искажается относительно максвелловской, и появляются возмущения плотности и давления, зависящие от ψ . Как следствие, возникают аксиально-несимметричные добавки к потенциалу и магнитному полю. Явные выражения для этих добавок будут получены после решения кинетического уравнения и нахождения функции распределения ионов. Оказывается, что $\delta\psi \sim \alpha \psi_0$, $\delta H \sim \alpha H_0$, где α определяется формулой (5). Учитывая малость $\delta\psi$ и δH , из (I) получим следующее выражение для I_1'' :

$$I_1'' = -\frac{1}{m_i} (e\delta\psi + \mu\delta H) \int ds \left[\frac{2}{m_i} (\varepsilon - e\psi_0 - \mu H_0) \right]^{-1/2} = -\frac{t_{th}}{m_i} (e\delta\psi + \mu\delta H), \quad (7)$$

где через t_{th} обозначено время пролета иона через ловушку. Легко видеть, что $I_1'' \sim I_1'$.

Отметим, что в силу симметрии центральной ловушки функция I_1' инвариантна относительно преобразований $\psi \rightarrow -\psi$, $\psi \rightarrow \pi - \psi$ (предполагается, что угол ψ отсчитывается от плоскости симметрии ловушки, см. рис. 1). Кроме того, она периодична по углу ψ с периодом, равным $\pi/2$, так что ее разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$I_1' = \sum_{k=1}^{\infty} I_1^{(k)}(r, \mu, \varepsilon) \cos 4k\psi. \quad (8)$$

Что же касается I_1'' , то в ней, вообще говоря, содержатся как косинусные, так и синусные гармоники, поэтому для функции I_1 разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{\infty} I_1^{(k)}(r, \mu, \varepsilon) \cos 4k\psi + I_2^{(k)}(r, \mu, \varepsilon) \sin 4k\psi. \quad (8')$$

Наконец заметим, что в усредненное значение продольного инварианта $I_0(r, \mu, \varepsilon)$ основной вклад вносит длинная часть центральной ловушки, где силовые линии прямые. Поэтому можно считать, что

$$I_0 = L \left[\frac{z}{m_i} (\varepsilon - e\varphi_0 - \mu H_0) \right]^{1/2}. \quad (9)$$

Уравнение $I(r, \psi, \mu, \varepsilon) = \text{const}$ определяет форму сечения дрейфовых поверхностей частиц экваториальной плоскостью ловушки. Явную зависимость $r(\psi, \mu, \varepsilon)$ можно получить, разлагая I_0 в (4) по малому отклонению $\delta r = r - \langle r \rangle$ с точностью до членов первого порядка:

$$r(\psi, \mu, \varepsilon) = r_* - \frac{I_1}{\partial I_0 / \partial r} \Big|_{r=r_*}, \quad r_* = \langle r \rangle. \quad (10)$$

Как следует из (10), траектории большинства частиц отходят от окружности на величину $\delta r \sim \alpha R$.

Особого рассмотрения требует случай, когда $\partial I_0 / \partial r \rightarrow 0$, и формула (10) становится неприменимой. Из (9) видно, что производная $\partial I_0 / \partial r$ обращается в нуль при

$$\mu = \mu_*(r) \equiv - \frac{e \partial \varphi_0 / \partial r}{\partial H_0 / \partial r}. \quad (11)$$

Это условие означает, что для ионов с $\mu = \mu_*$ на длинной части центрального пробкотрона магнитный дрейф полностью компенсируется электрическим.

Найдем траекторию ионов, проходящих через точку r_1, ψ_1 и имеющих магнитный момент μ , близкий к $\mu_*(r_1)$, $\Delta \mu = \mu - \mu_*(r_1) \ll \mu$. Вводя отклонение $x = r - r_1$ и разлагая I_0 по x и $\Delta \mu$ с точностью до членов второго порядка малости, получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} x^2 + \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} x \Delta \mu + I_1(\psi) - I_1(\psi_1) = 0 \quad (12)$$

(аргументы $r_1, \mu_*(r_1), \varepsilon$ в I_1 и производных от I_0 для краткости опускаем). Разрешая (12) относительно x , легко получить, что форма траектории существенно различна в зависимости от того, больше или меньше $|\Delta \mu|$, чем величина $\Delta \mu_0$:

$$\Delta \mu_0 \equiv \left| \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right|^{-1} \left\{ 2 \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \left[\max_{\psi} I_1(\psi) - \min_{\psi} I_1(\psi) \right] \right\}^{1/2} \quad (13)$$

(для определенности считаем, что $\partial^2 I_0 / \partial r^2 > 0$). Условие $|\Delta \mu| < \Delta \mu_0$ соответствует захваченным частицам, для которых область движения по углу ψ ограничена (см. рис. 4), а $|\Delta \mu| > \Delta \mu_0$ — пролетным частицам, обходящим магнитную ось системы.

Как следует из (12), максимальное отклонение захваченных частиц по порядку величины равно $x_{\max} \sim \alpha^{1/2} R$, что в $\alpha^{-1/2}$ раз больше "размаха" дрейфовой поверхности для основной массы частиц (с $\Delta \mu \sim \mu$). Оценка $\Delta \mu$ для захваченных частиц имеет вид: $\Delta \mu \sim \Delta \mu_0 \sim \alpha^{1/2} \mu_*$.

IV. ДРЕЙФОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем маркировать каждую силовую линию полярными координатами r, ψ и точки ее пересечения с экваториальной плоскостью ловушки. Так как время пролета иона между пробками мало по сравнению со временем столкновения, которое в свою очередь мало по сравнению с характерным временем удержания ионов в центральном пробкотроне, функция распределения ионов на некоторой силовой линии может считаться зависящей только от ин-

тетралов движения ε и μ и не зависящей от координаты S вдоль силовой линии. Иными словами, система может быть адекватно описана функцией распределения ионов вида:

$$f = f(r, \psi, \mu, \varepsilon).$$

Заряженная частица, совершая быстрые колебания между пробками, одновременно медленно дрейфует вокруг оси системы. Изменение полярных координат $r(t)$ и $\psi(t)$ силовой линии, на которой в данный момент находится частица, характеризуется скоростью $\vec{u} = (u_r, u_\psi)$, где $u_r = \dot{r}$, $u_\psi = r\dot{\psi}$. Выражение для \vec{u} можно найти, например, в работе [13]. Поскольку в рассматриваемом случае магнитное поле в центре пробкотрона имеет только Z -составляющую, $H \equiv H_z$, общие выражения работы [13] можно представить в виде:

$$u_r = \frac{1}{rt_n \omega_H} \frac{\partial I}{\partial \psi}, \quad (I4)$$

$$u_\psi = -\frac{1}{t_n \omega_H} \frac{\partial I}{\partial r}, \quad (I5)$$

где I — определяемый по формуле (1) продольный адиабатический инвариант, $\omega_H = eH/mc$, а t_n — время пролета частицы между точками отражения:

$$t_n = \int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{v_{||}}; \quad (v_{||} = \left[\frac{2}{m_i} (\varepsilon - \mu H - e\psi) \right]^{1/2}) \quad (I6)$$

(S_1 и S_2 определяются из условия обращений в нуль подкоренного выражения).

Функция распределения ионов $f(r, \psi, \mu, \varepsilon)$ удовлетворяет кинетическому уравнению, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi} = \overline{Stf} \quad (I7)$$

где \overline{Stf} представляет собой усредненный по силовой линии интеграл столкновений:

$$\overline{Stf} = \left[\int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{v_{||}} Stf \right] \left[\int_{S_1}^{S_2} \frac{ds}{v_{||}} \right]^{-1}$$

Число ионов, отнесенное к единице объема, в интервале $dv_{||} dv_{\perp}$ скоростей выражается через f обычным способом:

$$dn = 2\pi f v_{\perp} dv_{\perp} dv_{||}$$

В переменных ε, μ это соотношение записывается в виде:

$$dn = \frac{\sqrt{2} \pi H}{m_i^{3/2}} f_i \frac{d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H - e\psi}}$$

Число ионов внутри силовой трубки, опирающейся на площадку единичной площади в экваториальной плоскости, очевидно, есть

$$N(r, \psi) = \frac{\sqrt{2} \pi}{m_i^{3/2}} H \int_{S_1}^{S_2} ds \int \frac{f d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H - e\psi}}$$

а их кинетическая энергия

$$W(r, \psi) = \frac{\sqrt{2} \pi}{m_i^{3/2}} H \int_{S_1}^{S_2} ds \int \frac{(\varepsilon - e\psi) f d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H - e\psi}}$$

(здесь H есть магнитное поле в экваториальной плоскости лодушки).

Поскольку интеграл столкновений не меняет числа частиц и их энергии, из (I7) (при учете соотношений (I4), (I5)) получаются следующие уравнения непрерывности для усредненных по азимуту величин $\langle N \rangle$ и $\langle W \rangle$:

$$\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle q_r \rangle = 0$$

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle Q_r \rangle = \langle S \rangle$$

Здесь

$$\langle q_r \rangle \equiv \frac{2\pi c}{r e m_i} \left\langle \int \frac{\partial I}{\partial \psi} f d\mu d\varepsilon \right\rangle \quad (I8)$$

и

$$\langle Q_r \rangle \equiv \frac{2\pi c}{r e m_i} \left\langle \int \frac{\partial I}{\partial \psi} \left(\frac{\int \frac{\varepsilon - e\psi}{v_{||}} ds}{\int \frac{ds}{v_{||}}} \right) f d\mu d\varepsilon \right\rangle \quad (I9)$$

имеют смысл потоков частиц и кинетической энергии, а

$$\langle S \rangle \equiv -\frac{2\pi}{m_i^2} \left\langle H \int \left(\vec{u} \nabla \frac{\int \frac{e\psi}{v_{||}} ds}{\int \frac{ds}{v_{||}}} \right) \left(\int \frac{ds}{v_{||}} \right) f d\mu d\varepsilon \right\rangle \quad (20)$$

есть источник, связанный с работой электрического поля над частицами.

Выражения для $\langle Q_r \rangle$ и $\langle S \rangle$ можно существенно упростить, если учесть, что в центральном пробкотроне имеется участок с прямыми магнитными силовыми линиями, длина которого существенно превышает длину пробки. Так как потенциал на этом участке не зависит от S , можно записать, что

$$\left(\int \frac{\varphi ds}{v_{||}} \right) / \left(\int \frac{ds}{v_{||}} \right) \approx \varphi = \varphi_0(r) + \delta\varphi(r, \psi).$$

При учете этого соотношения вместо (19) и (20) получаем:

$$\langle Q_r \rangle = \frac{2\pi c}{r e m_i} \left\langle \int \frac{\partial I}{\partial \psi} (\varepsilon - e\varphi_0) f d\mu d\varepsilon \right\rangle, \quad (19')$$

$$\langle S \rangle = -e \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \langle q_r \rangle. \quad (20')$$

Как видно из (18) и (19'), радиальные потоки частиц и энергии связаны, как следовало ожидать, с наличием зависящего от ψ слагаемого в интеграле I (см. раздел III), которое и ответственно за пересечение дрейфовых поверхностей.

В случае, когда дрейфовые поверхности не слишком сильно отличаются от окружностей (а именно такова ситуация в длинном центральном пробкотроне), время диффузии плазмы велико по сравнению со временем столкновения. Это позволяет пользоваться локально максвелловским приближением, т.е. считать, что

$$f = f_M + \delta f, \quad (21)$$

где

$$f_M = n(r, t) \left[\frac{m_i}{2\pi T_i(r, t)} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{\varepsilon - e\varphi_0(r, t)}{T_i(r, t)} \right] \quad (22)$$

а $\delta f \ll f_M$. Чтобы сделать разбиение (21) однозначным, будем требовать, чтобы поправка δf не вносила вклада в усредненные по азимуту величины $\langle N \rangle$ и $\langle W \rangle$:

$$\left\langle \int_{S_1}^{S_2} ds \int \frac{\delta f d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H - e\varphi}} \right\rangle = 0, \quad (23)$$

$$\left\langle \int_{S_1}^{S_2} ds \int \frac{(e - e\varphi) \delta f d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H - e\varphi}} \right\rangle = 0. \quad (24)$$

Если провести интегрирование по частям (по переменной ψ) в выражениях (18), (19'), то получим

$$\langle q_r \rangle = - \frac{2\pi c}{r e m_i} \left\langle \int I \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} d\varepsilon d\mu \right\rangle, \quad (25)$$

$$\langle Q_r \rangle = - \frac{2\pi c}{r e m_i} \left\langle \int I (\varepsilon - e\varphi_0) \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} d\varepsilon d\mu \right\rangle.$$

Отсюда видно, что $\langle q_r \rangle$ и $\langle Q_r \rangle$ определяются только добавкой δf (а не максвелловской функцией f_M , не зависящей от ψ). Уравнение для δf получится, если (21) подставить в уравнение (17) и пренебречь временными производными функции распределения:

$$u_r \frac{\partial}{\partial r} (f_M + \delta f) + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \overline{St \delta f} \quad (26)$$

Поскольку при усреднении столкновительного члена основной вклад в интегралы будет вносить длинная область центрального пробкотрона, где силовые линии прямые, то $\overline{St \delta f} \approx St \delta f$. Ниже мы будем пользоваться этим обстоятельством.

У. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА

Так как главный вклад в N и W вносит длинный однородный по z участок центрального пробкотрона, можно приближенно записать, что

$$N = nL, \quad W = \frac{3}{2} nT_i L$$

и привести уравнения баланса к виду:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{rL} \frac{\partial}{\partial r} r \langle q_r \rangle = 0 \quad (27)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial n T_i}{\partial t} + \frac{1}{rL} \frac{\partial}{\partial r} r \langle Q_r \rangle = \frac{\langle S \rangle}{L} \quad (28)$$

Поскольку в рассматриваемых сейчас проектах амбиполярных ловушек предполагается иметь в центральном пробкотроне плазму с $\beta \sim 1$ ($\beta = 8\pi n(T_i + T_e)/H^2$), радиальная диффузия плазмы будет приводить к перераспределению магнитного поля и, как следствие, к появлению радиальной конвекционной скорости v_r . Наличие этого движения может быть учтено в уравнениях баланса стандартным способом: в левую часть уравнения (27) следует добавить член $r^{-1} \partial(r n v_r)/\partial r$, в левую часть уравнения (28) — член $\frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n T_i v_r) + n T_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r)$ (ср. [14]). Сама же величина v_r определяется просто как скорость радиального дрейфа под действием вихревого электрического поля, возникающего из-за изменения магнитного поля:

$$v_r = - \frac{1}{r H_0(r, t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r H_0(r', t) r' dr' \quad (29)$$

В заключение выпишем еще раз в компактной форме полную систему уравнений переноса ионов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n v_r + \frac{1}{rL} \frac{\partial}{\partial r} r \langle Q_r \rangle = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial n T_i}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r n T_i v_r + n T_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \\ + \frac{1}{rL} \frac{\partial}{\partial r} r \langle Q_r \rangle = e \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \frac{\langle Q_r \rangle}{L} \end{aligned} \quad (31)$$

Эти уравнения следует решать совместно с (29) и уравнением равновесия

$$n(T_i + T_e) + \frac{H_0^2}{8\pi} = \frac{H_e^2}{8\pi} \quad (32)$$

(H_e — внешнее поле в средней части центрального пробкотрона). Если электроны находятся в бoльцмановском равновесии (см. разд. II), то входящее в уравнения электрическое поле может быть исключено с помощью (3):

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = \frac{T_e}{en} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (33)$$

При известной температуре электронов T_e уравнения (29) — (33) образуют замкнутую систему для отыскания величин n , T_i , v_r , H_0 , φ_0 .

Дальнейшее продвижение в решении задачи связано с нахождением потоков $\langle q_r \rangle$ и $\langle Q_r \rangle$ по градиентам плотности и температуры, для чего, разумеется, необходимо найти из кинетического уравнения поправку δf к максвелловской функции распределения. Этому вопросу посвящены следующие пять разделов.

VI. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

В этом разделе мы проведем классификацию разных режимов диффузии и оценим величину коэффициента диффузии ионов в зависимости от частоты ион-ионных столкновений ν_i .

Введем в рассмотрение время продрейфовывания иона τ_d вокруг магнитной оси системы для частиц, сильно отличающихся от захваченных, $\Delta\mu = \mu - \mu_*(r) \sim \mu$. Оценивая τ_d как r/u_ψ , с помощью (15) получим:

$$\tau_d \sim \frac{e n R^2}{c T}$$

Для частиц с μ близким к μ_* , $\Delta\mu \ll \mu$, время обхода вокруг оси увеличивается по сравнению с τ_d в $\mu/\Delta\mu$ раз. В частности, для захваченных частиц $\Delta\mu/\mu \sim \alpha^{1/2}$, и для них период движения по траектории в плоскости r, ψ равен $\tau_t \sim \tau_d \alpha^{-1/2}$.

Рассмотрим сначала случай редких столкновений. Именно, будем считать, что за время τ_t захваченные частицы не успевают испытать такое столкновение, которое переводит их в пролетные. Эта ситуация соответствует "банановому" режиму в теории процессов переноса в тороидальных машинах [15]. Учитывая, что эффективная частота таких столкновений равна $\nu_{eff} \sim \nu_i (\mu/\Delta\mu)^2 \sim \nu_i \alpha^{-1}$, получим, что "банановый" режим реализуется при

$$\tau_d \nu_i \ll \alpha^{3/2} \quad (34)$$

При этом вклад захваченных частиц в коэффициент диффузии оценивается как

$$D \sim \chi_{max}^2 \nu_{eff} \frac{\Delta\mu_0}{\mu} \sim \alpha^{1/2} \nu_i R^2, \quad (35)$$

где множитель $\Delta\mu_0/\mu$ учитывает малую долю таких частиц (напомним, что χ_{\max} представляет собой характерный "размах" дрейфовых поверхностей захваченных частиц; см. раздел III). Вклад в коэффициент диффузии ионов с $\Delta\mu \sim \mu$ равен

$$D \sim (\delta r)^2 \nu_i \sim \alpha^2 R^2 \nu_i. \quad (36)$$

и мал по сравнению с (35). Таким образом, в "банановом" режиме скорость процессов переноса определяется частицами с $\Delta\mu/\mu \sim \alpha^{1/2}$.

Область частот столкновений, где выполняются неравенства

$$\alpha^{3/2} \ll \tau_d \nu_i \ll 1 \quad (37)$$

является аналогом режима "плато" в тороидальных установках (см. [15]). В этом случае диффузия также определяется частицами с малым значением $\Delta\mu$. Это такие частицы, для которых обратное время обхода вокруг оси $(\tau_d \mu / \Delta\mu)^{-1}$ сравнивается с эффективной частотой столкновений $\nu_i (\mu / \Delta\mu)^2$, т.е. $\Delta\mu/\mu \sim (\nu_i \tau_d)^{1/3}$. Для них "размах" дрейфовой поверхности порядка $\alpha R \mu / \Delta\mu$, и оценка коэффициента диффузии имеет вид

$$D \sim \left(\alpha R \frac{\mu}{\Delta\mu} \right)^2 \cdot \nu_i \left(\frac{\mu}{\Delta\mu} \right)^2 \cdot \frac{\Delta\mu}{\mu} \sim \alpha^2 \frac{R^2}{\tau_d}. \quad (38)$$

Коэффициент диффузии (38) не зависит от частоты столкновений. Вклад в диффузию ионов с большими значениями $\Delta\mu$ по-прежнему оценивается по формуле (36) и мал по сравнению с (38).

Наконец, при $\nu_i \tau_d \gg 1$ скорость диффузии определяется ионами с $\Delta\mu \sim \mu$. За время между столкновениями такой ион смещается по азимуту на угол $\sim (\nu_i \tau_d)^{-1}$ и, следовательно, уходит по радиусу на величину порядка $\delta r (\nu_i \tau_d)^{-1}$. Поэтому коэффициент диффузии оценивается здесь как

$$D \sim \left(\frac{\delta r}{\nu_i \tau_d} \right)^2 \nu_i \sim \alpha^2 R^2 \nu_i (\nu_i \tau_d)^{-2}. \quad (39)$$

По условиям применимости этот режим является аналогом режима Пфирша-Шлютера, хотя механизм диффузии здесь другой; он связан с ион-ионными столкновениями.

Описанная выше картина оказывается справедливой для плазмы с $\beta \sim 1$. Если же $\beta \ll 1$, то доля частиц в плазме с $\mu \sim \mu_*$ становится экспоненциально малой, и их вклад в коэффициенты переноса стремится к нулю. Для доказательства этого утверждения достаточно в (II) подставить выражения для $\partial\psi_0/\partial r$ и $\partial n_0/\partial r$, полученные из уравнений (32), (33). В результате получим

$$\mu_* = \frac{2}{\beta} \frac{T_e}{H_0}.$$

При $\beta \ll 1$ энергия частиц с таким значением μ существенно превышает температуру T_i и, следовательно, их число экспоненциально мало. Поэтому при $\beta \ll 1$ коэффициент диффузии при $\nu_i \tau_d \ll 1$ необходимо оценивать по формуле (36). Этот режим мы будем называть режимом вращательной диффузии (в знак того, что основной вклад в D вносят частицы, совершающие быстрое вращение вокруг магнитной оси).

Качественная зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений, построенная на основе проведенных выше оценок, приведена на рис.5.

VI. РЕЖИМ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

В рассматриваемом режиме в силу условия $\nu_i \tau_d \ll 1$ столкновительный член в кинетическом уравнении (26) мал по сравнению со вторым слагаемым в левой части. Это позволяет искать функцию распределения $f = f_m + \delta f$, пользуясь теорией возмущений по малому параметру $\nu_i \tau_d$. В нулевом приближении в пренебрежении столкновениями кинетическому уравнению удовлетворяет любая функция интегралов движения частицы. Учитывая, что она должна мало отличаться от максвелловского распределения, мы выберем ее равной

$$f^{(0)} = n(r_*) \left[\frac{m_i}{2\pi T_i(r_*)} \right]^{3/2} \exp \left[- \frac{\epsilon - e\psi_0(r_*)}{T_i(r_*)} \right], \quad (40)$$

где r_* — среднее значение радиуса r по траектории частицы. Согласно (10), r_* выражается как функция r, ψ, μ, ϵ следующим образом

$$r_* = r + I_1 / (\partial I_0 / \partial r). \quad (41)$$

При нахождении поправки $f^{(1)}$, пропорциональной частоте столкновений, в кинетическом уравнении можно пренебречь малым слагаемым $u_r \partial f^{(1)} / \partial r$:

$$\frac{u_\psi}{r} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \psi} = St f^{(0)} \quad (42)$$

Подставив (41) и (40) и разлагая $f^{(0)}$ по малому параметру $I_1 / (\partial I_0 / \partial r)$, столкновительный член в правой части (42) можно записать в следующем виде

$$St f^{(0)} = St \left(\frac{I_1}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r} \right),$$

где

$$\frac{\partial f_m}{\partial r} = \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{e}{T_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{1}{T_i} \frac{\partial T_i}{\partial r} \left(\frac{\epsilon - e\varphi_0}{T_i} - \frac{3}{2} \right) \right] f_m. \quad (43)$$

Интегрируя теперь (42), найдем поправку $f^{(1)}$:

$$f^{(1)} = \int d\psi \frac{r}{u_\psi} St \left(\frac{I_1}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r} \right). \quad (44)$$

В качестве u_ψ здесь достаточно подставить скорость

$$u_\psi \approx u_\psi^{(0)} = - \frac{1}{\omega_n t_{11}} \frac{\partial I_0}{\partial r} = \frac{1}{m_i \omega_n} \left(e \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \mu \frac{\partial H_0}{\partial r} \right), \quad (45)$$

не зависящую от азимутального угла ψ (см. формулу (9)).

Построенное решение обладает тем свойством, что разность $\delta f = f^{(0)} + f^{(1)} - f_m$ удовлетворяет необходимым условиям (23), (24).

Обратимся теперь к вычислению возмущения потенциала $\delta\varphi$. Оно связано с тем, что в процессе диффузии возникает аксиально-несимметричная поправка к плотности частиц. Для вычисления последней достаточно воспользоваться функцией $f^{(0)}$:

$$\delta n = \int (f^{(0)} - f_m) d^3v = \frac{\sqrt{2} \pi H_0}{m_i^{3/2}} \int \frac{d\mu d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}} \frac{I_1}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r}. \quad (46)$$

Из (3) имеем

$$\delta\varphi = \frac{T_e}{e} \frac{\delta n}{n}. \quad (47)$$

Учтем теперь, что $I_1 = I_1' + I_1''$ и воспользуемся формулой (7). Так как во вращательном режиме $\beta \ll 1$, то возмущением магнитного поля δH можно пренебречь, поэтому

$$I_1 = I_1' - \frac{e}{m_i t_{11}} \delta\varphi \quad (48)$$

Уравнения (46)–(48) позволяют определить $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\sqrt{2} \pi H_0}{m_i^{3/2}} \left(\int \frac{d\mu d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}} \frac{\partial f_m}{\partial r} \frac{I_1'}{\partial I_0 / \partial r} \right) \left(\frac{e n}{T_e} - \frac{\sqrt{2} e H_0}{L m_i^{3/2}} \int \frac{d\mu d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}} \frac{\partial f_m}{\partial r} \frac{\sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}}{e\varphi_0' + \mu H_0'} \right)^{-1}. \quad (49)$$

Тем самым мы конкретизировали выражение для I_1 (48), (напомним, что I_1' получается интегрированием (1) по области магнитных пробок).

Отметим, что так как в разложении (8) функции I_1' содержатся только косинусы, то, как следует из (48), (49), функция I_1 также разлагается в ряд по косинусам, т.е. $I_1^{(k)}$ в (8') равны нулю. Это связано с тем, что при вычислении возмущения плотности δn мы пренебрегли поправкой $f^{(1)}$ к функции распределения; учет ее дал бы $I_1^{(k)} \sim \nu_i \tau_i I_1^{(k)} \ll I_1^{(k)}$.

Наконец, вычислим потоки вещества и энергии в плазме. Нетрудно показать, что любая функция интегралов движения не вносит вклада в $\langle q_r \rangle$ и $\langle Q_r \rangle$, так что последние целиком определяются поправкой $f^{(1)}$.

Используя (43)–(45) и разложение (8'), выражение для $\langle q_r \rangle$ можно записать в следующем виде:

$$\langle q_r \rangle = \frac{\sqrt{2} \pi H_0}{L m_i^{3/2}} \left\{ \left(\frac{n'}{n} + \frac{e\varphi_0'}{T_i} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu d\epsilon \frac{I_c^{(k)}}{e\varphi_0' + \mu H_0'} St \left(\frac{I_c^{(k)} f_m \sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0'}}{e\varphi_0' + \mu H_0'} \right) + \frac{T_i'}{T_i} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu d\epsilon \frac{I_c^{(k)}}{e\varphi_0' + \mu H_0'} St \left(\frac{I_c^{(k)} \sqrt{\epsilon - \mu H_0 - e\varphi_0'} \left(\frac{\epsilon - e\varphi_0}{T_i} - \frac{3}{2} \right) f_m}{e\varphi_0' + \mu H_0'} \right) \right\}. \quad (50)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по радиусу r и учтено, что $I_1^{(k)} \approx 0$. С помощью (32), (33) φ_0' и H_0' выражаются через градиенты плотности и температуры

$$\varphi_0' = \frac{T_e}{e} \frac{n'}{n}, \quad H_0' = - \frac{4\pi}{H_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[n (T_i + T_e) \right].$$

Знание конкретных зависимостей $\Gamma_c^{(k)}(r, \mu, \epsilon)$ позволяет в принципе вычислить интегралы в (50) и найти выражение для потока частиц. Эта часть задачи связана, по-видимому, с численным счетом для каждой из конкретных установок. Отметим здесь, что зависимость $\langle q_r \rangle$ от градиентов n' и T_i' не имеет вида простой пропорциональности, т.е. коэффициенты диффузии и термодиффузии в свою очередь зависят от n' и T_i' .

Что касается потока тепла $\langle Q_r \rangle$, то он получится из формулы (50) добавлением множителя $(\epsilon - e\varphi_0)$ в подинтегральные выражения обоих слагаемых.

УШ. "БАНАНОВЫЙ" РЕЖИМ ДИФФУЗИИ

В этом режиме, как отмечалось в разделе VI, основной вклад в диффузию вносят частицы, значение магнитного момента которых близко к $\mu_* = -e(\partial\varphi_0/\partial r)/(\partial n_0/\partial r)$. Существенно, что μ_* не зависит от энергии частиц, т.е. область фазового пространства, где происходит значительное искажение функции распределения ионов, представляет собой узкую (по μ) полосу, вытянутую вдоль оси ϵ . Для этой области фазового пространства интеграл столкновений $St \delta f$, входящий в (26), можно существенно упростить, записав его в переменных ϵ, μ и сохранив только члены, содержащие два дифференцирования по μ (ср. соответствующие приближения в работах [16, 17]). При этом в коэффициенте перед второй производной по μ можно положить $\mu = \mu_*$. Результат имеет вид:

$$St \delta f = \nu(\epsilon, r) \mu_*^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \mu^2}. \quad (51)$$

Здесь

$$\nu(\epsilon, r) = \nu_0(r) \left[F\left(\frac{\epsilon - e\varphi}{T_i}\right) + \frac{\epsilon - e\varphi_0 - \mu_* H}{\mu_* H} G\left(\frac{\epsilon - e\varphi}{T_i}\right) \right],$$

причем частота столкновений ν_0 определяется формулой

$$\nu_0(r) \equiv 8\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Lambda \frac{ne^4}{m_i^{3/2} T_i^{3/2}},$$

а функции $F(x)$ и $G(x)$ — формулами.

$$F(x) \equiv \frac{1}{x^4} \int_0^x e^{-t} t^{3/2} dt,$$

$$G(x) \equiv \frac{1}{x^3} \left[\left(1 - \frac{1}{2}x\right) \int_0^x e^{-t} t^{3/2} dt + x^{3/2} e^{-x} \right]$$

Будем искать поправку к функции распределения δf в точке $r = r_0$. Вводя переменные $x = r - r_0$, $\xi = [\mu - \mu_*(r_0)] / \mu_*(r_0)$, можно записать уравнение (26) в виде:

$$u_r \left(\frac{\partial f_m}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} + u_r \frac{\partial \delta f}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \xi^2}. \quad (52)$$

Поскольку "размах" дрейфовых оболочек мал по сравнению с масштабом изменения функции $f_m(r)$, производную $\partial f_m / \partial r$ (39) берем в точке $r = r_0$ и считаем не зависящей от x .

Из (12) легко видеть, что уравнение траектории частицы можно представить в форме:

$$J \equiv (x + x_0 \xi)^2 + y(\psi) = \text{const}, \quad (53)$$

где

$$y(\psi) \equiv 2 \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1} I_1(\psi), \quad (54)$$

$$x_0 \equiv \mu_*(r_0) \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \right)^{-1}. \quad (55)$$

Скорости u_r и u_ψ выражаются через J следующим образом:

$$u_\psi = -\omega \frac{\partial J}{\partial x}, \quad u_r = \frac{\omega}{r} \frac{\partial J}{\partial \psi}, \quad (56)$$

где

$$\omega \equiv \frac{1}{2\omega_n t_n} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2}. \quad (57)$$

В этих обозначениях уравнение (52) приобретает вид:

$$\frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial \psi} \frac{\partial f_m}{\partial r} + \frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial \psi} \frac{\partial \delta f}{\partial x} - \frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial x} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \xi^2}. \quad (58)$$

Существенно, что переменная ϵ входит в (58) только как параметр (нет производных по ϵ). Вклад в интегралы (23), (24) вносит узкая по μ область вблизи значения $\mu = \mu_*$, поэтому при интегрировании по μ весовые множители перед δf можно вынести из под знака интеграла. В результате условия (23), (24)

сводятся к одному условию:

$$\left\langle \int \delta f d\xi \right\rangle = 0. \quad (59)$$

Начало отсчета угла ψ можно выбрать так, чтобы определяемые уравнением (53) траектории частиц на плоскости (x, ψ) были симметричны относительно оси $\psi = 0$. Ввиду периодичности задачи при этом достаточно рассмотреть изменение ψ в интервале $(-\pi/4, +\pi/4)$.

Далее будем пользоваться способом вычисления поправки δf , использованным в работах [16, 17]. Именно, представим δf в виде суммы четной и нечетной по ψ функций:

$$g \equiv \frac{1}{2} [\delta f(\xi, x, \psi) + \delta f(\xi, x, -\psi)], \quad (60)$$

$$h \equiv \frac{1}{2} [\delta f(\xi, x, \psi) - \delta f(\xi, x, -\psi)]$$

и воспользуемся тем обстоятельством, что при указанном выше способе выбора системы координат $J(\psi)$ есть четная функция ψ (т.е. u_ψ четна, а u_r нечетна по ψ). Тогда для g и h имеем:

$$\frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial \psi} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \quad (61)$$

$$\frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial \psi} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\omega}{r_0} \frac{\partial J}{\partial \psi} \frac{\partial f_m}{\partial r}$$

Теперь в этих уравнениях следует положить $x = 0$ (т.к. мы ищем решение в точке $r = r_0$) и перейти от переменных ψ, ξ к переменным J, ψ . Вводя параметр $\sigma = \text{sign } \xi x_0$, получим:

$$\frac{\partial h}{\partial \psi} = - \frac{2r_0}{\omega} x_0^2 \sigma \nu \frac{\partial}{\partial J} (\sqrt{J-y} \frac{\partial g}{\partial J}), \quad (62)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} = - \frac{2r_0}{\omega} x_0^2 \sigma \nu \frac{\partial}{\partial J} (\sqrt{J-y} \frac{\partial h}{\partial J}) + \frac{\sigma}{2\sqrt{J-y}} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial f_m}{\partial r}. \quad (63)$$

Решение уравнений (62), (63) ищется в виде ряда по малому параметру ν :

$$g = g_0 + \nu^2 g_2 + \dots, \quad h = \nu h_1 + \dots$$

Нам потребуется только нулевой член разложения $g_0(J, \psi)$. Эта функция имеет различный вид для захваченных и пролетных

частиц. Сепаратриса, разделяющая эти две области, определяется уравнением

$$J = J_c \equiv \max_{\psi} y(\psi).$$

Обозначая значения g_0 при $J < J_c$ через g_0^+ , а при $J > J_c$ через g_0^u и действуя так же, как в [16, 17], нетрудно получить

$$g_0^+ = -\sigma \sqrt{J-y} \frac{\partial f_m}{\partial r} \quad (64)$$

$$g_0^u = -\sigma \left(\sqrt{J-y} - \int_{J_c}^J \frac{dJ'}{E(J')} \right) \frac{\partial f_m}{\partial r},$$

где

$$E(J) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\psi \sqrt{J-y(\psi)}. \quad (65)$$

Функция g_0 непрерывна на сепаратрисе, в то время как ее производная терпит там разрыв. При $J \rightarrow \infty$ (т.е. $\xi \rightarrow \infty$) $g_0^u(J, \psi)$ стремится к конечному пределу, не зависящему от ψ :

$$\lim_{J \rightarrow \infty} g_0^u(J, \psi) = \sigma \frac{\pi}{4} \frac{\partial f_m}{\partial r} \left[\int_{J_c}^{\infty} dJ \left(\frac{1}{E(J)} - \frac{2}{\pi J^{3/2}} \right) - \frac{4}{\pi} J_c^{3/2} \right]. \quad (66)$$

В связи с этим напомним, что построенное решение справедливо лишь в узком интервале вблизи точки $\mu = \mu_*(r_0)$. Определение δf вне этого интервала связано с громоздкими выкладками и здесь не приводится. Поэтому дальнейшие вычисления служат лишь иллюстрацией схемы нахождения потоков.

Для вычисления потоков $\langle q_r \rangle$ и $\langle Q_r \rangle$ будем пользоваться формулами (18), (19). Продольный инвариант I , входящий в подинтегральные выражения этих формул, в окрестности точки r_0 и при малых значениях $\mu - \mu_*(r_0)$ с точностью до константы пропорционален введенной выше функции J :

$$I = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} J + \text{const}$$

Учитывая, что J — четная функция ψ , выражения для $\langle q_r \rangle$ можно записать в следующем виде:

$$\langle q_r \rangle = \frac{c \mu_*}{2 e r_0 m_i} \int d\xi d\psi \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} h \frac{\partial J}{\partial \psi} \quad (67)$$

(четное слагаемое g в поправке δf не дает вклада в этот интеграл). Выражение (67) удобно преобразовать следующим образом. Перейдем от интегрирования по ξ к интегрированию по J и выполним интегрирование по частям по переменной ψ , воспользовавшись при этом уравнением (62). В результате получим:

$$\langle q_r \rangle = - \frac{2\pi c \mu_*}{e m_i} \int d\varepsilon \frac{v x_0}{\omega} \frac{\partial^2 I_0}{\partial r^2} \sum_{\sigma} \sigma \left\langle \int dJ \sqrt{J-y} \frac{\partial}{\partial J} \left(\sqrt{J-y} \frac{\partial g}{\partial J} \right) \right\rangle.$$

Второй интеграл в этой формуле вычисляется элементарно и равен $-(1/2) \lim_{J \rightarrow 0} g$. Пользуясь теперь соотношением (66) и подставляя выражения для $x_0, \omega, \partial f_m / \partial r$ в соответствии с (55), (57), (43), окончательное выражение для $\langle q_r \rangle$ запишем в следующем виде

$$\langle q_r \rangle = \frac{\pi^2 \mu_*^2 L H_0}{2^{3/2} m_i^{5/2}} \left\{ \left(\frac{h'}{h} + \frac{e\varphi_0'}{T_i} \right) \int d\varepsilon \nu \gamma \left| \frac{\partial^2 I_0 / \partial r^2}{\partial^2 I_0 / \partial r^2} \right| \frac{f_m}{\sqrt{2 - \mu H_0 - e\varphi_0}} + \right. \\ \left. + \frac{T_i'}{T_i} \int d\varepsilon \nu \gamma \left| \frac{\partial^2 I_0 / \partial r^2}{\partial^2 I_0 / \partial r^2} \right| \frac{\varepsilon - e\varphi_0 - \frac{3}{2}}{\sqrt{\varepsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}} f_m \right\}, \quad (68)$$

где через $\gamma = \gamma(\varepsilon, r_0)$ обозначено содержимое квадратных скобок в формуле (66). Поток тепла $\langle Q_r \rangle$ получается из (68) внесением множителя $\varepsilon - e\varphi_0$ в подинтегральные выражения обоих слагаемых.

Перейдем теперь к вычислению возмущения потенциала и магнитного поля $\delta\varphi$ и δH и определению функции I_1'' . Для этого заметим, что поправка g_0 (64) как функция переменной ξ является нечетной функцией, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0 d\xi = 0. \quad (69)$$

При вычислении различных моментов от g_0 (плотности, давления) отличный от нуля вклад дает узкая по μ окрестность точки $\mu = \mu_*(r_0)$, поэтому весовую функцию можно выносить из-под знака интеграла и в силу (69) результат будет равен нулю. Таким образом, захваченные частицы не приводят к возмущению давления и плотности плазмы (вклад поправок h_1, g_2, \dots пренебрежимо мал по параметру ν). Возмущение давления и плотнос-

ти плазмы в этом режиме обусловлено пролетными частицами с $\mu - \mu_* \gg \alpha^{1/2} \mu_*$, которые описываются решением кинетического уравнения режима вращательной диффузии. Поэтому в банановом режиме остаются справедливыми формулы (46), (47) для $\delta\varphi$.

Что касается δH , то оно находится из уравнения $r_L + H^2/8\pi = \text{const}$:

$$\delta H = - \frac{4\pi \delta r_L}{H_0}. \quad (70)$$

Вычисляя δr_{iL} с помощью функции распределения из раздела УП, получим:

$$\delta r_{iL} = \frac{2^{3/2} \pi H_0^2}{m_i^{3/2}} \int \frac{I_1}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r} \frac{\mu d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}}. \quad (71)$$

Возмущение электронного давления равно

$$\delta p_e = T_e \delta n.$$

Т.о. с помощью (7) для I_1'' имеем следующее уравнение:

$$I_1'' = \frac{4\sqrt{2} \pi^2 \mu H_0}{t_n m_i^{5/2}} \int \frac{(I_1' + I_1'')}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r} \frac{\mu d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}} + \\ + \frac{\sqrt{2} \pi T_e H_0}{n t_n m_i^{5/2}} \left(\frac{4\pi \mu h}{H_0} - 1 \right) \int \frac{(I_1' + I_1'')}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\partial f_m}{\partial r} \frac{d\mu d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}}.$$

Решение этого интегрального уравнения с вырожденным ядром находится элементарно и имеет следующий вид:

$$I_1'' = \left\{ A \left[\left(\int I_1' B d\mu d\varepsilon \right) \left(1 - \int C D d\mu d\varepsilon \right) + \left(\int I_1' D d\mu d\varepsilon \right) \left(\int B C d\mu d\varepsilon \right) \right] + \right. \\ \left. + C \left[\left(\int I_1' B d\mu d\varepsilon \right) \left(\int A D d\mu d\varepsilon \right) + \left(\int I_1' D d\mu d\varepsilon \right) \left(1 - \int A B d\mu d\varepsilon \right) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left(1 - \int A B d\mu d\varepsilon \right) \left(1 - \int C D d\mu d\varepsilon \right) - \left(\int A D d\mu d\varepsilon \right) \left(\int B C d\mu d\varepsilon \right) \right\}^{-1},$$

где

$$A = \frac{4\sqrt{2} \pi^2 \mu H_0}{t_n m_i^{5/2}}, \quad B = \frac{\partial f_m / \partial r}{\partial I_0 / \partial r} \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon - \mu H_0 - e\varphi_0}}, \\ C = \frac{\sqrt{2} \pi T_e H_0}{n t_n m_i^{5/2}} \left(\frac{4\pi \mu h}{H_0} - 1 \right), \quad D = \frac{\partial f_m / \partial r}{\partial I_0 / \partial r} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - e\varphi_0 - \mu H_0}}.$$

IX. РЕЖИМ ПЛАТО

В этом случае, как показывают простые оценки, в кинетическом уравнении (26) можно пренебречь производной $\partial \delta f / \partial t$ по сравнению с $\partial f_m / \partial t$:

$$u_r \frac{\partial f_m}{\partial r} + \frac{u_\psi}{r} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = St \delta f. \quad (72)$$

Так же, как и в предыдущем разделе мы ограничимся вычислением вклада в коэффициенты переноса частиц с малым значением $\Delta \mu$, для которых второе слагаемое в левой части (72) по порядку величины равно столкновительному члену.

В силу малости $\Delta \mu$ для этих частиц можно воспользоваться следующим выражением для u_ψ :

$$u_\psi \approx -\frac{1}{t_n \omega_n} \frac{\partial I_0}{\partial r} \approx -\frac{1}{t_n \omega_n} \xi \mu_* \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r}, \quad \xi = \frac{\mu - \mu_*(r)}{\mu_*(r)},$$

где производная $\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r$ вычисляется в точке $\mu = \mu_*(r)$. Для столкновительного члена, так же как и в "банановом" режиме воспользуемся приближением (51). Таким образом окончательное выражение для кинетического уравнения принимает вид:

$$\frac{1}{t_n \omega_n} \frac{\partial I_0}{\partial \psi} \frac{\partial f_m}{\partial r} - \frac{\mu_*}{t_n \omega_n} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \xi^2}. \quad (73)$$

Учитывая разложение (8), будем искать решение (73) в виде ряда Фурье по переменной ψ :

$$\delta f = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta f_c^{(k)}(r, \mu, \varepsilon) \cos 4k\psi + \delta f_s^{(k)}(r, \mu, \varepsilon) \sin 4k\psi \right]. \quad (74)$$

Усреднение (74) по ψ дает нуль, поэтому такое решение удовлетворяет соотношениям (23), (24). Подставляя (74) и (8) в (73), получим

$$\begin{aligned} \frac{4k\mu_*\xi}{t_n \omega_n} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \delta f_c^{(k)} - \nu \frac{\partial^2 \delta f_s^{(k)}}{\partial \xi^2} &= \frac{4k I_c^{(k)}}{t_n \omega_n} \frac{\partial f_m}{\partial r} \\ \frac{4k\mu_*\xi}{t_n \omega_n} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \delta f_s^{(k)} - \nu \frac{\partial^2 \delta f_c^{(k)}}{\partial \xi^2} &= \frac{4k I_s^{(k)}}{t_n \omega_n} \frac{\partial f_m}{\partial r} \end{aligned} \quad (75)$$

В этих формулах значения $I_{c,s}^{(k)}$ вычисляются при $\mu = \mu_*(r)$.

Введение безразмерных переменных

$$h_{c,s}^{(k)} = \left(\frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right)^{2/3} \left(\frac{r t_n \omega_n \nu \mu_*^2}{4k} \right)^{1/3} \left(\frac{\partial f_m}{\partial r} \right)^{-1} \delta f_{c,s}^{(k)} \quad (76)$$

$$\zeta = \left(\frac{4k}{r t_n \omega_n \nu \mu_*^2} \frac{\partial^2 I_0}{\partial \mu \partial r} \right)^{1/3} \mu_* \xi$$

переводит (75) в следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_s^{(k)}}{\partial \zeta^2} - \zeta h_c^{(k)} &= -I_e^{(k)} \\ \frac{\partial^2 h_c^{(k)}}{\partial \zeta^2} + \zeta h_s^{(k)} &= I_s^{(k)}. \end{aligned} \quad (77)$$

Граничные условия к системе (77), однозначно определяющие искомое решение, состоят в требовании $h_s^{(k)}, h_c^{(k)} \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm \infty$. Для решения (77) удобно ввести комплексный параметр $\alpha = I_s^{(k)} + i I_c^{(k)}$ и переменную $v = (h_s^{(k)} + i h_c^{(k)}) / \alpha$. При этом система (77) преобразуется в уравнение

$$-i v'' + \zeta v = 1$$

С помощью метода Лапласа нетрудно получить явное выражение для v ; оно приведено, например, в работе [18]. Нам потребуются только следующие свойства функции v (см. [18]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } v d\zeta = -\pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re } v d\zeta = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_c^{(k)} d\zeta = -\pi I_s^{(k)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h_s^{(k)} d\zeta = \pi I_c^{(k)} \quad (78)$$

При вычислении потоков (18) и (19') необходимо учесть, что функция δf отлична от нуля только в узкой окрестности вблизи значения $\mu = \mu_*(r)$, поэтому при интегрировании по μ весовые множители в (18), (19') можно считать постоянными. Формулы (78) позволяют при этом вычислить возникающие интегралы. Результат имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle q_r \rangle &= -\frac{4\pi^2 H_0}{m_i^2 L r \omega_n} \left\{ \left(\frac{h'}{h} + \frac{e\varphi_0'}{T_i} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k \int d\varepsilon \frac{f_m ([I_c^{(k)}]^2 + [I_s^{(k)}]^2)}{|\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_i'}{T_i} \sum_{k=1}^{\infty} k \int d\varepsilon \frac{f_m ([I_c^{(k)}]^2 + [I_s^{(k)}]^2)}{|\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r|} \left(\frac{\varepsilon - e\varphi_0}{T_i} - \frac{3}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (79)$$

Выражение для $\langle Q_r \rangle$ отличается от (79) наличием дополнительного множителя $(\epsilon - \epsilon \psi_0)$ под интегралами.

Наконец, получим уравнение для нахождения I_1'' . Из формул (7), (47), (70) следует, что

$$I_1'' = \frac{1}{m_i t_n} \left(\frac{4\pi\mu}{H_0} \delta p_{\lambda i} + \left(\frac{4\pi\mu}{H_0} - \frac{1}{n} \right) T_e \delta n \right). \quad (80)$$

Возмущение плотности и давления в режиме плато обусловлено как ионами с малыми значениями $\Delta\mu$, $\Delta\mu \lesssim \mu_* (\nu_i \tau_d)^{1/3}$, которые описываются функцией распределения, полученной в этом разделе, так и ионами с $\Delta\mu \gtrsim \mu_* (\nu_i \tau_d)^{1/3}$, описываемыми вращательной функцией распределения. Обе эти группы частиц вносят одинаковый по порядку величины вклад в $\delta p_{\lambda i}$ и δn . Вычисления с вращательной функцией распределения были проведены в предыдущих разделах, а вклад в $\delta p_{\lambda i}$ и δn частиц с малым $\Delta\mu$, находится интегрированием полученной выше функции распределения. В результате уравнение (80) принимает вид:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} I_c^{(k)} \\ I_s^{(k)} \end{Bmatrix} &= \frac{8\pi^2\mu}{t_n m_i^3} \left[-\pi\mu_* H_0 \frac{d\epsilon}{d\mu} \frac{\partial f_M / \partial r}{|\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r|} \begin{Bmatrix} I_s^{(k)} \\ -I_c^{(k)} - I_c^{(k)} \end{Bmatrix} + \right. \\ &+ \left. \int \frac{\mu d\mu d\epsilon}{v_n} \frac{\partial f_M / \partial r}{\partial I_0 / \partial r} \begin{Bmatrix} I_c^{(k)} + I_c^{(k)} \\ I_s^{(k)} \end{Bmatrix} \right] + \frac{2T_e \pi H_0}{t_n n m_i^3} \left(\frac{4\pi\mu n}{H_0} - 1 \right) \times \\ &\times \left[-\pi \int \frac{d\epsilon}{v_n} \frac{\partial f_M / \partial r}{|\partial^2 I_0 / \partial \mu \partial r|} \begin{Bmatrix} I_s^{(k)} \\ -I_c^{(k)} - I_c^{(k)} \end{Bmatrix} + \int \frac{\mu d\mu d\epsilon}{v_n} \frac{\partial f_M / \partial r}{\partial I_0 / \partial r} \begin{Bmatrix} I_c^{(k)} + I_c^{(k)} \\ I_s^{(k)} \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

В принципе решение этой системы не представляет трудностей, но отличается большой громоздкостью и поэтому здесь не приводится.

Х. РЕЖИМ СИЛЬНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В рассматриваемом случае, в отличие от "бананового" режима и режима плато, детальная структура столкновительного члена не очень существенна. Поэтому ниже мы будем использовать столкновительный член в форме Батнагара-Гросса-Крука [19]. Кроме того для упрощения вычислений ограничимся нахождением потоков, связанных с градиентом плотности, считая, что $\partial \tau_i / \partial r = 0$. Вы-

числения, связанные с учетом градиента температуры, проводятся по той же схеме.

Выпишем исходное уравнение для поправки δf :

$$\frac{1}{r t_n \omega_n} \frac{\partial I_1}{\partial \psi} \frac{\partial f_M}{\partial r} + \frac{u_\psi^{(0)}}{r} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = -\nu_i \left(\delta f - \frac{\delta n}{n} f_M \right). \quad (81)$$

Здесь $u_\psi^{(0)}$ определяется выражением (45), ν_i - частота ионных столкновений, а

$$\delta n = \int \delta f d^3v.$$

Так же, как и в предыдущем разделе будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned} \delta f &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta f_c^{(k)} \cos 4k\psi + \delta f_s^{(k)} \sin 4k\psi \right] \\ \delta n &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta n_c^{(k)} \cos 4k\psi + \delta n_s^{(k)} \sin 4k\psi \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Подставляя (8') и (82) в (81), получим

$$\begin{aligned} \frac{4k}{r t_n \omega_n} I_s^{(k)} \frac{\partial f_M}{\partial r} + \frac{4k u_\psi^{(0)}}{r} \delta f_s^{(k)} &= -\nu_i \left(\delta f_c^{(k)} - \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M \right) \\ - \frac{4k}{r t_n \omega_n} I_c^{(k)} \frac{\partial f_M}{\partial r} - \frac{4k u_\psi^{(0)}}{r} \delta f_c^{(k)} &= -\nu_i \left(\delta f_s^{(k)} - \frac{\delta n_s^{(k)}}{n} f_M \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Частота столкновений ν_i в рассматриваемом режиме велика по сравнению с обратным временем дрейфа $\tau_d^{-1} \sim u_\psi^{(0)} / r$. Мы будем кроме того предполагать, что скорость диффузионных потоков определяется гармониками не с очень большими k , так что $k u_\psi^{(0)} / r \ll \nu_i$. При этом, как оказывается, функции $\delta f_s^{(k)}$ и $I_s^{(k)}$ малы по сравнению с $\delta f_c^{(k)}$ и $I_c^{(k)}$: $\delta f_s^{(k)} \sim (\nu_i \tau_d)^{-1} \delta f_c^{(k)}$, $I_s^{(k)} \sim (\nu_i \tau_d)^{-1} I_c^{(k)}$, в то время как $\delta f_c^{(k)} \sim \alpha f_M$, $I_c^{(k)} \sim \alpha I_0$. Учитывая это обстоятельство, получим выражение для $\delta f_c^{(k)}$ и $\delta f_s^{(k)}$ из системы (83) с точностью до членов $\sim \nu_i^{-2}$ включительно:

$$\delta f_c^{(k)} = \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M - A_s^{(k)} - \frac{\delta n_s^{(k)}}{n} f_M B^{(k)} - \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M [g^{(k)}]^2 - A_c^{(k)} B^{(k)} \quad (84)$$

$$\delta f_s^{(k)} = \frac{\delta n_s^{(k)}}{n} f_M + A_c^{(k)} + \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M B^{(k)}, \quad (85)$$

где

$$A_{s,c}^{(k)} = \frac{4\kappa}{r t_{ii} \omega_n \nu_i} I_{s,c}^{(k)} \frac{\partial f_M}{\partial r}, \quad B^{(k)} = \frac{4\kappa u_{\psi}^{(k)}}{r \nu_i}.$$

Отметим, что $A_s^{(k)} \propto \nu_i^{-2}$, $A_c^{(k)}, B^{(k)} \propto \nu_i^{-1}$. Интегрируя выражения (84), (85) по d^3v , найдем возмущения плотности $\delta n_s^{(k)}$ и $\delta n_c^{(k)}$ с точностью до членов ν_i^{-1} :

$$\frac{\delta n_c^{(k)}}{n} = - \frac{\int A_c^{(k)} d^3v}{\int B^{(k)} f_M d^3v} \quad (86)$$

$$\frac{\delta n_s^{(k)}}{n} = - \frac{\int A_s^{(k)} d^3v}{\int B^{(k)} f_M d^3v} + \frac{(\int [B^{(k)}]^2 f_M d^3v)(\int A_c^{(k)} d^3v)}{(\int B^{(k)} f_M d^3v)^2} - \frac{\int A_c^{(k)} B^{(k)} d^3v}{\int B^{(k)} f_M d^3v} \quad (87)$$

Поскольку поток частиц, как следует уже из простых оценок раздела VI, пропорционален ν_i^{-1} , то при вычислении $\langle q_r \rangle$ достаточно подставить в формулу (18) выражение для δf с точностью до членов $\propto \nu_i^{-1}$. В результате получим

$$\langle q_r \rangle = \frac{4\pi H_0}{L r \omega_n m_i^2} \int d\mu d\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_s^{(k)} \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M - I_c^{(k)} \frac{\delta n_s^{(k)}}{n} f_M \right), \quad (88)$$

где $\delta n_c^{(k)}$ и $\delta n_s^{(k)}$ определяются соотношениями (86), (87). Таким образом, если известны функции $I_c^{(k)}$, $I_s^{(k)}$, формула (88) позволяет вычислить диффузионный поток частиц в амбиполярной ловушке.

Для определения $I_c^{(k)}$ и $I_s^{(k)}$ воспользуемся уравнением (80). При вычислении косинусной компоненты δr_{ii} достаточно считать, что $\delta f_c^{(k)} = \frac{\delta n_c^{(k)}}{n} f_M$, так что $\delta r_{iic}^{(k)} = T_i \delta n_c^{(k)}$. Таким образом

$$I_c^{(k)} = \frac{1}{m_i t_{ii}} \left[\frac{4\pi\mu}{H_0} (T_i + T_e) - \frac{T_e}{n} \right] \delta n_c^{(k)} =$$

$$= - \frac{n}{\omega_n t_{ii} m_i} \left[\frac{4\pi\mu}{H_0} (T_i + T_e) - \frac{T_e}{n} \right] \frac{\int \frac{\partial f_M / \partial r}{t_{ii}} (I_c^{(k)} + I_c^{(k)}) d^3v}{\int u_{\psi}^{(k)} f_M d^3v}$$

(мы воспользовались соотношением (86)). Решая это уравнение, получим:

$$I_c^{(k)} = I_c^{(k)} + I_c^{(k)} = I_c^{(k)} - \frac{n}{\omega_n t_{ii} m_i} \left[\frac{4\pi\mu}{H_0} (T_i + T_e) - \frac{T_e}{n} \right] \times$$

$$\left[\int \frac{\partial f_M / \partial r}{t_{ii}} I_c^{(k)} d^3v \right] \left[1 + \frac{n}{\omega_n m_i} \left\{ \frac{4\pi\mu}{H_0} (T_i + T_e) - \frac{T_e}{n} \right\} \frac{\partial f_M / \partial r}{t_{ii}^2} d^3v \right]^{-1}$$

При составлении уравнения для $I_s^{(k)}$ необходимо вычислить $\delta r_{iis}^{(k)}$ с помощью функции распределения (85) и воспользоваться (80). Мы не будем выписывать это уравнение ввиду его громоздкости, отметим только, что из него, в частности, следует использованная выше оценка $I_s^{(k)} \sim \nu_i^{-1} \epsilon_{ii}^{-1} I_c^{(k)}$.

IX. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в работе эффекты пересечения дрейфовых оболочек, помимо влияния на диффузию плазмы поперек магнитного поля, могут приводить к другим важным следствиям, которые заслуживают специального рассмотрения.

Во-первых, в результате размешивания ионов по дрейфовым оболочкам при наличии градиентов плотности и температуры возникает деформация функции распределения по отношению к максвелловской. В особенности существен этот эффект в "банановом" режиме. Возникающая из-за деформации функции распределения специфическая неравновесность плазмы может быть причиной неустойчивости, аналогичной неустойчивости на запертых частицах в задаче о затухании монохроматической ленгмювской волны [20]. Если частота рассеяния ионов на развивающихся в процессе неустойчивости флуктуациях превысит ν_i , коэффициент диффузии существенно возрастает по сравнению с оценкой (35) (в Токамаке этот режим диффузии часто называют "псевдоклассическим").

Этот эффект можно в принципе уменьшить, если увеличить длину магнитных пробок, что приведет к улучшению точности параксиального приближения и уменьшению параметра α , характеризующего "размах" дрейфовых оболочек. Разумеется, удлинение пробок не должно противоречить МГД-устойчивости.

Еще одна возможность борьбы с этими эффектами состоит просто в увеличении длины центрального пробокотрона до значений, сравнимых с длиной свободного пробега ионов λ_i : при этом столкновения частиц приводят к разрушению дрейфовых оболочек.

Второй важный эффект (который в применении к крайним пробокотронам может играть положительную роль) состоит в том, что размешивание электронов в аксиально-несимметричном поле

и установление бoльцмановского распределения при $T_e < T_i$ должно оказывать стабилизирующее воздействие на развитие плазменных неустойчивостей, если их инкремент мал по сравнению с обратным временем размешивания. В условиях, когда $T_e < T_i$, перемешивание электронов вызывает "закорачивание" электрических полей не только вдоль силовых линий, но и во всем объеме пробкотрона. Наиболее быстро размешивание происходит, когда геометрия поля далека от параксиальной. Этот эффект представляет интерес и в применении к обычным коротким пробочным ловушкам с аксиально-несимметричным полем, где он может до некоторой степени заменять в качестве стабилизирующего фактора рассмотренных в работе [21] аномальную диффузию электронов.

Отдельного исследования требует вопрос о роли неоклассических эффектов в диффузии примесей в амбиполярной ловушке.

Авторы приносят благодарность Б.Б.Кадоццеву за обсуждение работы и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим сначала случай плазмы с $\beta \ll 1$, когда можно пренебречь искажением магнитного поля плазмой. При этом с точностью до членов r^2 выражение для магнитного поля вблизи пробки имеет вид^{*}):

$$H_z = H_{0z} - \frac{1}{4} r^2 H_{0z}'' - r^2 h_2' \cos 2\psi$$

$$H_r = -2r h_2 \cos 2\psi - \frac{1}{2} H_{0z}' r \quad (\text{III})$$

$$H_\psi = 2r h_2 \sin 2\psi$$

где $H_{0z}(z) = H_z|_{r=0}$, функция $h_2(z)$ задает квадрупольную составляющую магнитного поля, а штрих обозначает дифференцирование по координате z . Функции $H_{0z}(z)$ и $h_2(z)$ имеют вид, изображенный на рис.6; H_{0z} достигает максимума в пробке и спадает по мере удаления от нее до некоторого конечного значения H_0 — величины магнитного поля в центральной части ловушки, а h_2 отлична от нуля вблизи пробки и обращается в нуль в центральной части ловушки. Поскольку магнитное поле в одной пробке повернуто относительно другой на 90° , то распределение поля в противоположной пробке получится из (III) заменой $\psi \rightarrow \psi + \frac{\pi}{2}$.

Вычислим теперь функцию $I_1'(r, \psi, \varepsilon, \mu)$, проводя интегрирование в (I) по области, где квадрупольная составляющая отлична от нуля.

С помощью простого интегрирования легко получить уравнение силовой линии, проходящей при $z=0$ через точку r_0, ψ_0 :

$$r(r_0, \psi_0, z) = r_0 \sqrt{\frac{H_0}{H_{0z}(z)}} (e^\phi \sin^2 \psi_0 + e^{-\phi} \cos^2 \psi_0)^{1/2} \quad (\text{II})$$

$$\psi(r_0, \psi_0, z) = \text{arctg} (e^\phi \text{tg} \psi_0),$$

где

$$\phi(z) = 4 \int_0^z \frac{h_2(z')}{H_{0z}(z')} dz'$$

^{*}) В разложении (III) учтена симметрия магнитной пробки амбиполярной ловушки. В общем случае в H_z есть еще слагаемое $r^2 f_2' \sin 2\psi$ (и соответствующие члены в H_r и H_ψ), причем, вообще говоря, $f_2(z) \neq h_2(z)$.

Магнитная поверхность, сечение которой плоскостью $z=0$ представляет собой окружность, при вхождении в пробку сплющивается в направлении $\psi = \pi/2$; ее сечение на координате z задается следующим уравнением

$$r = r_0 \sqrt{\frac{H_0}{H_{0z}(z)}} \left(e^{\Phi} \cos^2 \psi + e^{-\Phi} \sin^2 \psi \right)^{-1/2} \quad (\text{П3})$$

Отношение $r(\psi=0)/r(\psi=\pi/2)$, которое характеризует степень сжатия, равно $\exp(-\Phi)$.

Используя явные зависимости (П2) для r и ψ , легко найти, как меняются вдоль силовой линии входящие в интеграл (I) величины H и ds : $H(r_0, \psi_0, z)$, $ds(r_0, \psi_0, z)$. Что касается потенциала φ , то он вместе с плотностью плазмы постоянен вдоль силовой линии, т.е. $\varphi = \varphi(r_0, \psi_0)$. Выполняя интегрирование, после простых, хотя и громоздких вычислений можно получить следующее выражение для I_1' :

$$I_1'(r_0, \psi_0, \varepsilon, \mu) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{m_i}} r_0^2 H_0 \cos 2\psi_0 \int_{z_1}^{z_2} dz (\varepsilon - e\varphi - \mu H_{0z})^{-1/2} \times H_{0z}^{-3} \left\{ e^{-\Phi} [(z - e\varphi) F_1 - \mu H_{0z} F_2] - e^{\Phi} [(z - e\varphi) F_3 - \mu H_{0z} F_4] \right\}, \quad (\text{П4})$$

где

$$F_1(z) = 4h_2^2 + 2h_2 H_{0z}' + \frac{1}{4} (H_{0z}')^2$$

$$F_2(z) = 6h_2^2 + 3h_2 H_{0z}' - h_2' H_{0z} + \frac{3}{8} (H_{0z}')^2 - \frac{1}{4} H_{0z} H_{0z}''$$

$$F_3(z) = 4h_2^2 - 2h_2 H_{0z}' + \frac{1}{4} (H_{0z}')^2$$

$$F_4(z) = 6h_2^2 - 3h_2 H_{0z}' + h_2' H_{0z} + \frac{3}{8} (H_{0z}')^2 - \frac{1}{4} H_{0z} H_{0z}'' \quad (\text{П5})$$

а верхний предел интегрирования z_1 определяется из условия $\varepsilon = \mu H_{0z}(z_1) + e\varphi$. Поскольку I_1' — малая по сравнению с I_0 величина, при вычислении ее по формуле (П4) в качестве φ можно использовать функцию $\varphi_0(r)$, пренебрегая малым слагаемым $\delta\varphi(r, \psi)$ (см. раздел III).

Вклад в I_1' от противоположной пробки получится из (П5) заменой $\psi_0 \rightarrow \psi_0 + \pi/2$, т.е. просто изменением знака. Таким образом с точностью до членов $\sim r^2$ включительно I_1' оказывается равным нулю (ср. [22]). При вычислении I_1' в следующем

приближении по r^2 , нужно удержать члены $\sim r^4$ в разложении магнитного поля вблизи оси. В общем случае, однако, вычисление I_1' становится чрезвычайно громоздким. Поэтому ограничимся лишь оценкой по порядку величины. Предполагая, что $h_2 \sim H_0/L_n$ и, соответственно, оценивая I_1' , как

$$I_1' \sim \left(\frac{H_{0z}^2}{H_0^2} \right)^2 L_n \nu_{ii}$$

для отношения I_1'/I_0 получим формулу (5).

Оценка (5) остается справедливой и для случая плазмы с конечным β . Доказательство этого утверждения, так же как и при $\beta \ll 1$, проводится путем вычисления интеграла (I) для соответствующей конфигурации магнитного поля. При этом, однако, $\text{rot} \vec{H} \neq 0$, и выражение (III) становится несправедливым. Разложение же произвольного соленоидального поля $\vec{H}(\vec{r})$ вблизи оси ловушки (с учетом ее симметрии) имеет вид:

$$H_z = H_{0z}(z) + A(z)r^2 + B(z)r^2 \cos 2\psi$$

$$H_r = -C(z)r \cos 2\psi - \frac{1}{2} H_{0z}' r$$

(П6)

$$H_\psi = C(z)r \sin 2\psi$$

С точностью до членов $\sim r$ дивергенция поля (П6) равна нулю. Функции A, B, C, H_{0z} не являются независимыми (в частности, для плазмы с изотропным давлением должно выполняться соотношение $\text{rot} [\vec{H} \times \text{rot} \vec{H}] = 0$, следующее из уравнений равновесия), но для дальнейшего это несущественно. Форма силовой линии магнитного поля в параксиальном приближении находится из уравнений, куда входит только нулевое приближение $H_z, H_z \approx H_{0z}$, поэтому по-прежнему остаются справедливы уравнения силовой линии (П2) (с заменой h_2 на $C/2$). С их помощью, так же как и выше, можно получить явные выражения для изменения H и ds вдоль силовой линии и вычислить интеграл I. При этом снова оказывается, что в первом приближении по r^2 вклады от противоположных пробок взаимно сокращаются и I_1' не зависит от ψ . Следующее приближение даст для I_1' оценку (5).

Здесь необходимо отметить, что полученные оценки степени асимметрии дрейфовых поверхностей относятся к ионам плазмы цен-

трального пробкотрона. Электроны в амбиполярной ловушке, как отмечалось в разделе II, являются общими для всех трех пробкотронов. Электрический потенциал в ловушке распределен таким образом (см. рис. 2), что крайние пробкотроны представляют собой потенциальные ямы для электронов, в которые они время от времени захватываются. При движении же электронов в крайних пробкотронах размах их дрейфовых поверхностей $\delta r/r$ может значительно превышать величину $R^4/L_{\text{пр}}^4$. Причина этого заключается в том, что магнитная система центрального пробкотрона приводит к искажениям магнитного поля крайнего пробкотрона; при этом, вообще говоря, нарушается симметрия, приводящая к взаимному сокращению вкладов в I , пропорциональных $R^2/L_{\text{пр}}^2$, от противоположных пробков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.Будкер. В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, М., Изд.АН СССР, т.3, стр.3, 1958.
2. Г.И.Будкер, В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов. Письма в ЖЭТФ, 14, 320, 1971.
3. B. G. Logan, I. G. Brown, M. A. Lieberman, A. J. Lichtenberg. Phys. Rev. Lett., 29, 1435, 1972.
4. С.Г.Константинов, О.К.Мышкин, А.Ф.Сорокин, Ф.А.Цельник. ЖТФ, 41, стр.2527, 1971.
5. Г.И.Димов, В.В.Закайдаков, М.Е.Кишеневский. Физика плазмы, 2, 597, 1976.
6. T. K. Fowler, B. G. Logan. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 11, 167, 1977.
7. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Письма в ЖЭТФ, 26, 182, 1977.
8. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. ДАН, 240, № 5, 1978.
9. Б.В.Кадомцев. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.3, стр.285, М., Изд.АН СССР, 1958.
10. С.В.Путвинский, А.В.Тимофеев, ЖЭТФ, 69, 221, 1975.
11. Г.И.Будкер. в сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.1. стр.72, М., Изд.АН СССР, 1958.
12. Б.Б.Кадомцев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.132, Атомиздат, 1963.
13. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.177, 1963.
14. С.И.Брагинский. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.1, стр.183, 1963.
15. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ, 53, 348, 1967; А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.7, стр.205, Атомиздат, 1973.
16. Б.Н.Брейзман, В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов. ЖЭТФ, 58, 1770, 1970.
17. V. V. Mirnov, D. D. Ryutov. Nucl. Fusion, 12, 627, 1972.
18. F. L. Hinton, M. N. Rosenbluth. Phys. Fluids, 16, 836, 1973.

19. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook. *Phys. Rev.*, 94, 511, 1954.
20. W. L. Kruer, L. M. Dawson, R. N. Sudan. *Phys. Rev. Lett.* 23, 838, 1969.
21. D. E. Baldwin, H. L. Berk, L. D. Pearlstein, T. Kammash, T. Uckan. *Proc. of the 5th Int. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nuclear Fusion Research*, vol. 1, p. 302, IAEA, Vienna, 1975.
22. L. S. Hall, B. Menamara. *Phys. Fluids*, 18, 552, 1975.

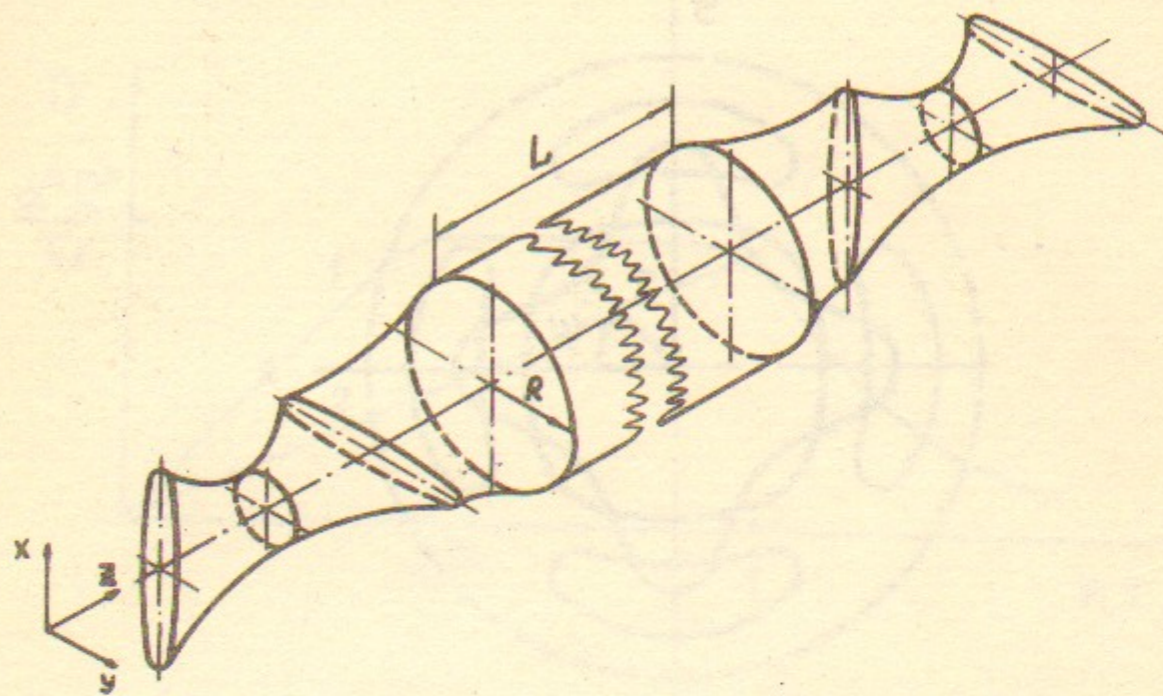


Рис. 1. Геометрия магнитного поля амбиполярной ловушки, L — длина центрального пробкотрона. Ловушка обладает двумя плоскостями симметрии: $x = 0$ и $y = 0$.

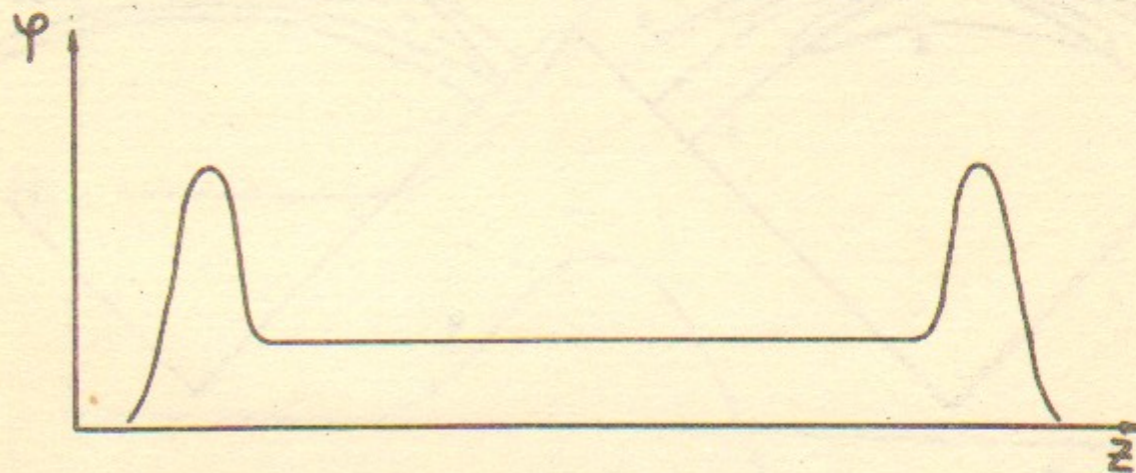


Рис. 2. Распределение потенциала вдоль силовой линии в амбиполярной ловушке. Потенциальный горб в крайних пробкотронах удерживает ионы в центральной ловушке.

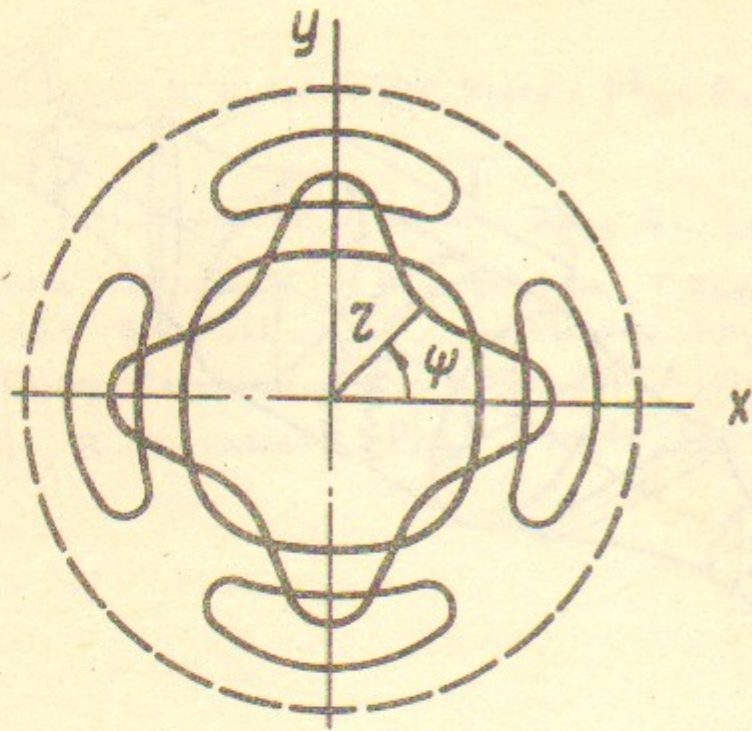


Рис.3. Сечения дрейфовых поверхностей ионов экваториальной плоскостью ловушки.

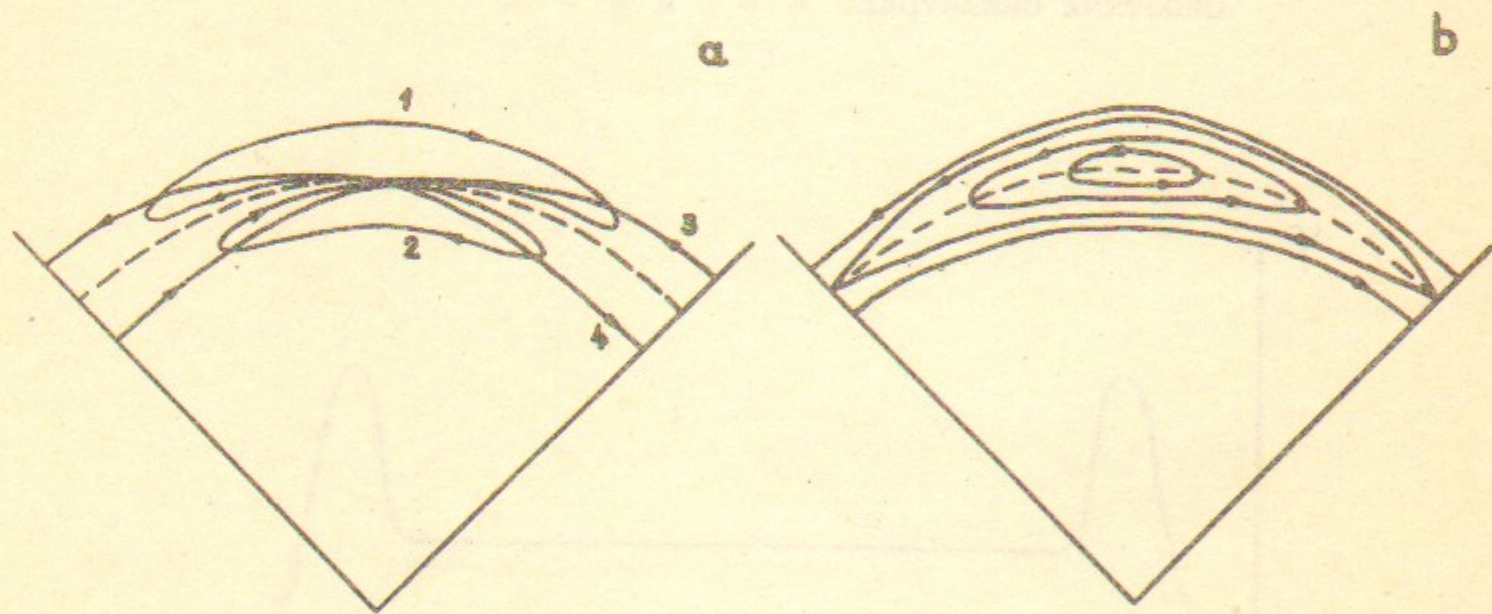


Рис.4. Семейство траекторий в плоскости r, ψ : а) для ионов с разным значением μ , проходящих через одну точку, б) для ионов с фиксированным значением μ , но разным значением I . 1, 2 - захваченные частицы, 3, 4 - пролетные частицы. Стрелки указывают направление движения. Картина периодична по ψ с периодом, равным $\pi/2$.

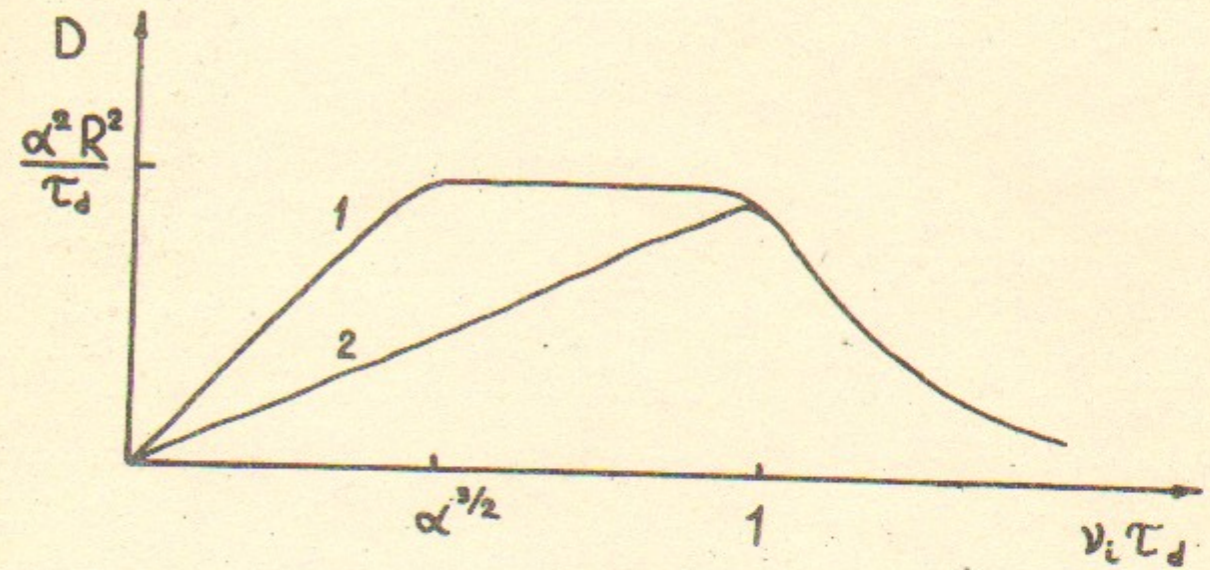


Рис.5. Качественная зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений: 1 - случай плазмы с $\beta \sim 1$, 2 - $\beta \ll 1$.

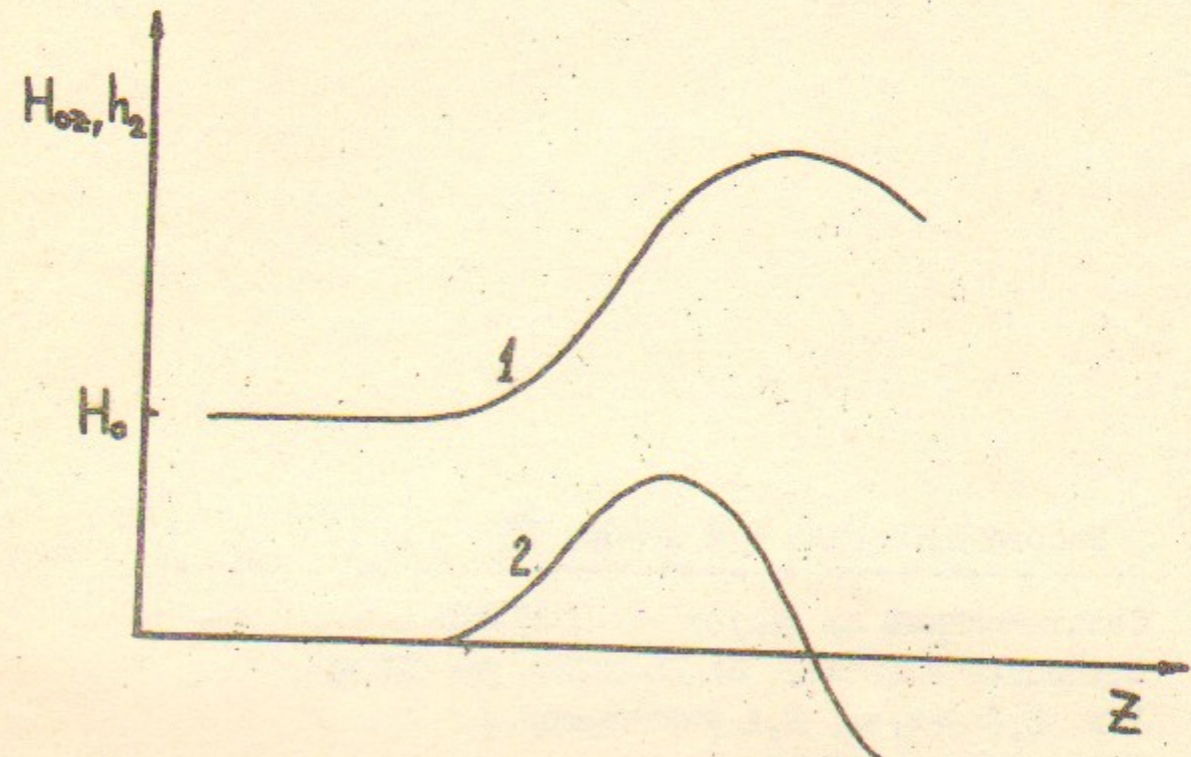


Рис.6. Качественные зависимости H_{0a} (кривая 1) и h_2 (кривая 2) от z .