21

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78-47

В.М.Катков, В.М.Страховенко

ПРОЦЕСС РАДИАЦИОННОЙ РЕКОМБИНАЦИИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ОПЫТАХ ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

Новосибирск
1978

ПРОЦЕСС РАДИАЦИОННОЙ РЕКОМБИНАЦИИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ОПЫТАХ ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

В.М.Катков, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

В дипольном приближении получено простое замкнутое выражение для сечения радиационной рекомбинации электрона на произвольный уровень водородоподобного атома. Оценивается влияние магнитного поля на этот процесс. Обсуждается возможность его использования в опытах по электронному охлаждению тяжелых заряженных частиц.

ПРОЦЕСС РАДИАЦИОННОЙ РЕКОМБИНАЦИИ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ОПЫТАХ ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ОХЛАЖДЕНИИ

В.М.Катков, В.М.Страховенко

I. В связи с развернувшимися в последнее время работами по электронному охлаждению /I/ усилился интерес к процессу рекомбинации электронов на протонах. Так, регистрация образующихся атомов водорода непосредственно использовалась на установке НАП-М для совмещения протонного и электронного пучков и для грубой оценки температуры последнего. Как показано ниже, при значениях параметров, отвечающих эксперименту /I/, рекомбинация осуществляется за счет радиационных переходов. Состояние проблемы и обзор литературы по этому вопросу см., напр., в /2/. В настоящей работе впервые выражение для сечения радиационной рекомбинации на n - ый уровень водородоподобного атома получено в простой аналитической форме благодаря тому, что удалось выполнить суммирование по всем квантовым числам. Кроме того, проводится анализ экспериментальной ситуации при электронном охлаждении, в частности, оценивается влияние магнитного поля на скорость рекомбинации.

Рекомбинация может происходить как с участием трех частиц (тройная рекомбинация), так и за счет излучения фотона (радиационная рекомбинация). Полное число актов рекомбинации в единицу времени $\dot{N}$ дается выражением

$$\dot{N} = \beta n_e N_p \tag{I.I}$$

где n_e - плотность электронов, N_p - полное число протонов, а β - коэффициент рекомбинации.

При тройной рекомбинации происходит передача энергии порядка средней кинетической от одного электрона к другому. Характерным расстоянием в этом процессе является $\rho \sim e^2/T$ (T - температура электронного газа в энергетических единицах), а его вероятность в единицу времени $\sim v_T \rho^2 n_e$ (v_T - скорость, отвечающая температуре T). Для того, чтобы произошла рекомбинация, электрон, потерявший энергию, должен оказаться на расстоянии $\sim \rho$ от протона. Число таких электронов $\sim \rho^3 n_e$. Отсюда получаем с помощью определения (I.I) следующую оценку для коэффициента тройной рекомбинации β_3 :

$$\beta_3 \sim v_T \rho^5 n_e \simeq 4 \cdot 10^{-27} T^{-9/2} n_e \ \frac{см^3}{сек} \qquad (I.2)$$

здесь температура T выражена в э.в. Как будет видно из дальнейшего, для коэффициента радиационной рекомбинации β_R при $\alpha c/v_T > 1$ ($\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры) справедлива оценка

$$\beta_R > 10^{-13} T^{-1/2} \ \frac{см^3}{сек} \qquad (I.2a)$$

В эксперименте /I/ параметры имели следующие значения: $n_e = 2{,}8 \cdot 10^8 см^{-3}$, $T > 1/6$. При таких условиях отношение $\beta_3/\beta_R < 10^{-2}$, т.е. оказывается пренебрежимо малым и достаточно учитывать только радиационную рекомбинацию. Следует иметь в виду, что с повышением электронной плотности вклад тройной рекомбинации (при заданной температуре) растет и в достаточно плотной плазме может стать определяющим.

2. Займемся расчетом сечения радиационной рекомбинации. Заметим, что для $Z\alpha \ll 1$ (Z - заряд ядра) применимо дипольное приближение. Мы ограничимся этим случаем. Вычисления удобно проводить в параболических координатах (ξ, η, φ), в которых радиус-вектор $\vec{r}$ имеет компоненты $\vec{r} = (\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi$, $\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi$, $\frac{1}{2}(\xi-\eta))$. Волновая функция дискретного спектра, отвечающая n-му уровню, имеет вид (в кулоновых единицах)

$$\Psi_q = \frac{\sqrt{2}}{n^2} f_{n_1,m}\left(\frac{\xi}{n}\right) f_{n_2,m}\left(\frac{\eta}{n}\right) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (2.I)$$

где n_1, n_2 - параболические квантовые числа, m - магнитное квантовое число, n - главное квантовое число $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$, а функция $f_{\ell,m}(x)$ имеет вид

$$f_{\ell,m}(x) = \frac{1}{|m|!}\sqrt{\frac{(\ell+|m|)!}{\ell!}}\, \Phi(-\ell, |m|+1, x) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{|m|}{2}} \qquad (2.2)$$

Φ - вырожденная гипергеометрическая функция. Волновая функция непрерывного спектра частицы, распространяющейся вдоль третьей оси имеет вид

$$\Psi_н = e^{\frac{\pi\xi}{2}} \Gamma(1+i\xi) e^{\frac{i(\xi-\eta)}{2\xi}} \Phi\left(-i\xi, 1, -\frac{i\xi}{\xi}\right) \qquad (2.3)$$

здесь $\xi = Z\alpha c/v$, v - скорость частицы. В дипольном приближении матричный элемент M выражается через интеграл $\vec{M}$: $M \infty (\vec{e}^* \vec{M})$, где $\vec{e}$ - вектор поляризации фотона, а $\vec{M}$ имеет вид

$$\vec{M} = \frac{e^{\pi\xi/2}\Gamma(1+i\xi)}{4n^2\sqrt{\pi}} \int d\xi\, d\eta\, d\varphi\, (\xi+\eta)\vec{r} \cdot \qquad (2.4)$$

$$\cdot e^{\frac{i(\xi-\eta)}{2\xi}} \Phi\left(-i\xi, 1, -\frac{i\xi}{\xi}\right) e^{-im\varphi} f_{n_1,m}\left(\frac{\xi}{n}\right) f_{n_2,m}\left(\frac{\eta}{n}\right)$$

Этот интеграл можно взять, дифференцируя по параметру следующее соотношение (см. /3/ стр. 875)

$$\int_0^\infty dt\, e^{-st} t^{c-1} \Phi(a,c,t)\Phi(\alpha,c,\lambda t) = \qquad (2.5)$$

$$= \Gamma(c)(s-1)^{-a}(s-\lambda)^{-\alpha} s^{a+\alpha-c} F(a, \alpha; c; \lambda/(s-1)(s-\lambda))$$

здесь F - гипергеометрическая функция.

Следуя стандартной процедуре, т.е. образуя $|M|^2$ и проводя суммирование по возможным конечным состояниям, находим для $\sigma^{(n)}$ - сечения радиационной рекомбинации на n-ый уровень:

$$\sigma^{(n)} = \frac{16}{3}\alpha\pi^2 \lambda_c^2 \xi^2 \frac{\exp\{-4\xi \,\mathrm{arctg}(\frac{n}{\xi})\}}{(1-e^{-2\pi\xi})|\lambda_n|^4} S_n,$$

$$S_n = \sum_{n_1=0}^{n-1} \left|\left(1 - \frac{\lambda_n}{n} z\frac{d}{dz}\right) F_{n_1}(z)\right|^2 + \qquad (2.6)$$

$$+ \sum_{n_1=0}^{n-2} \left|\frac{\lambda_n}{n}\left(F_{n_1+1}(z) - F_{n_1}(z)\right)\right|^2 (n_1+1)(n-n_1-1)$$

где $\lambda_c = \hbar/mc$, $z = -in/\xi\lambda_n^{*2}$, $\lambda_n = (1+in/\xi)/2$,

$$F_\ell(z) \equiv F(-\ell, i\xi; 1; z)$$

Первая сумма в S_n отвечает значению магнитного квантового числа $m=0$, вторая $|m|=1$. Пользуясь рекуррентными соотношениями для гипергеометрических функций, можно переписать выражение для S_n в виде:

$$S_n=\sum_{n_1=0}^{n-1}\left\{\left[(n_1+1)R_{n_1}(z)+n_1R_{n_1-1}(z)\right]^2+\frac{(n_1+1)(n-n_1-1)}{|\lambda_n|^2}R_{n_1}^2(z)\right\} \tag{2.7}$$

где

$$R_\ell(z)\equiv\left(\frac{\lambda_n^*}{\lambda_n}\right)^\ell F(-\ell,1+i\xi;2;z)$$

Отметим, что согласно соотношению

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right) \tag{2.8}$$

величина $R_\ell(z)$ является действительной. Далее, с помощью формулы

$$(2\alpha-\gamma-\alpha z+\beta z)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+$$
$$+(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)+\alpha(z-1)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)=0$$

можно представить S_n в следующей форме

$$S_n=\sum_{n_1=0}^{n-1}\left\{n_1^2R_{n_1-1}^2-(n_1+1)^2R_{n_1}^2+\right.$$
$$\left.+n_1(n_1+1)R_{n_1}R_{n_1-1}-(n_1+1)(n_1+2)R_{n_1+1}R_{n_1}\right\} \tag{2.9}$$

В такой записи суммирование по n_1 становится тривиальным и для S_n окончательно получаем

$$S_n=-nR_{n-1}(z)\left[nR_{n-1}(z)+(n+1)R_n(z)\right] \tag{2.10}$$

Величина S_n зависит от $x_n\equiv|\lambda_n|^2$. Приведем вид $S_n(x_n)$ для нескольких значений n

$$S_1=1;\quad S_2=2+\frac{3}{x_2}+\frac{1}{x_2^2};\quad S_3=3+\frac{14}{x_3}+$$
$$+\frac{19}{x_3^2}+\frac{8}{x_3^3}+\frac{1}{x_3^4};\quad S_4=4+\frac{38}{x_4}+\frac{346}{3x_4^2}+ \tag{2.11}$$
$$+\frac{409}{3x_4^3}+\frac{622}{9x_4^4}+\frac{43}{3x_4^5}+\frac{1}{x_4^6}.$$

В предельном случае $\xi\gg1$, $n\ll\xi$, S_n выражается через полиномы Лагерра

$$S_n\simeq\frac{1}{8}\left[L_n^2(4n)-L_{n-1}^2(4n)\right] \tag{2.12}$$

В случае $n\gg\xi$, $S_n\simeq n$. К этому случаю, в частности, относится борновское приближение, для которого параметр $\xi\ll1$.

Используя выражение для производящей функции (см. /4/ стр. 93)

$$(1-s)^{a-c}(1-s+sz)^{-a}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m(c)_m}{m!}F(-m,a;c;z) \tag{2.13}$$

можно получить удобное интегральное представление для $R_n(z)$:

$$nR_{n-1}(z)=\exp\left\{2\xi\,\mathrm{arctg}\left(\frac{n}{\xi}\right)\right\}(1-e^{-2\pi\xi})|\lambda_n|^2\cdot$$
$$\cdot\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\xi/n}^{\xi/n}\frac{dx}{1+x^2}\exp\left\{2in\left(\mathrm{arctg}\,x-\frac{\xi}{n}\mathrm{Arth}\frac{nx}{\xi}\right)\right\} \tag{2.14}$$

с помощью которого перепишем выражение (2.6) для сечения радиационной рекомбинации

$$\sigma^{(n)}=\frac{32}{3\sqrt3}\pi\alpha x_c^2\xi^2(1-e^{-2\pi\xi})\,\mathcal{U}(n,\xi) \tag{2.15}$$

$$\mathcal{U}(n,\xi)=\frac{\sqrt3}{2\pi}\mathcal{U}_1(n,\xi)\,\mathcal{U}_2(n,\xi)$$

здесь

$$\mathcal{U}_1(n,\xi)=\int_{-\xi/n}^{\xi/n}\frac{dx}{1+x^2}\exp\left\{2in\,\mathrm{arctg}\,x-2i\xi\,\mathrm{Arth}\frac{nx}{\xi}\right\}$$
$$\mathcal{U}_2(n,\xi)=\int_{-\xi/n}^{\xi/n}dx\left(\frac{2ix}{1+x^2}+\frac{n}{n^2+\xi^2}\right)\exp\left\{2in\,\mathrm{arctg}\,x-2i\xi\,\mathrm{Arth}\frac{nx}{\xi}\right\} \tag{2.16}$$

Такая форма записи удобна для получения асимптотик. Найдем, например, асимптотическое выражение $\mathcal{U}(n,\xi)$ (и тем самым для $\sigma^{(n)}$) при $n\gg1$ и фиксированном значении ξ . При этих условиях вклад в интегралы (2.16) дают малые значения $x\sim N^{-1/3}$, где $N=n\left(1+\frac{n^2}{\xi^2}\right)$; учитывая это, находим[*)]

*) Первые два члена этого разложения были известны ранее (см. /2/ стр. 226).

$$\mathcal{U}(n,\xi) = \frac{1}{N}\left[(1-A)(1-B) + AB\right]$$

где $$A = \frac{a}{N^{2/3}}\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right); \quad B = \frac{1}{350\,a\,N^{4/3}}\left(10\,\frac{n^2}{\xi^2} + 3\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)^2\right); \quad a = \Gamma(1/3)/5\,\Gamma(2/3)\,(12)^{1/3} \simeq 0{,}1728\ldots \qquad (2.17)$$

здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Отметим, что хотя формула (2.17) получена в предположении $n \gg 1$, сравнение ее с точной формулой (2.16) показывает, что, во всяком случае, для $\xi > 1$ отличие при всех n (в том числе и при $n=1$) оказывается меньше 1% и уменьшается с ростом n.

Полное сечение рекомбинации есть сумма парциальных сечений

$$\sigma = \sum_n \sigma^{(n)}$$

Провести такое суммирование в аналитическом виде не представляется возможным. В случае $\xi \gg 1$ можно получить асимптотическую формулу для σ, исходя из выражения (2.17)

$$\sigma \simeq \frac{32}{3\sqrt{3}}\,\pi\alpha\lambdabar_c^2\,\xi^2 \cdot \left[\ln\xi + b_0 + b_1/\xi^{2/3} + b_2/\xi^{4/3} + (b_3 - b_4\ln\xi)/\xi^2\right] \qquad (2.18)$$

где

$$b_0 = C - a\zeta(5/3) - 3\zeta(7/3)/350a + 3\zeta(3)/175$$

C – постоянная Эйлера, $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана;

$$b_0 \simeq 0{,}161\,; \quad b_1 = 3a \simeq 0{,}518\,; \quad b_2 = 9/700a \simeq 0{,}024\,;$$

$$b_3 = \frac{1}{12} - \frac{8C-2}{175} \simeq 0{,}068\,; \quad b_4 = \frac{8}{175} \simeq 0{,}046$$

При этом основной вклад в сумму дают значения $n \lesssim \xi$.

3. Поскольку эксперимент по электронному охлаждению протонов проводится в присутствии магнитного поля, представляется полезным рассмотреть влияние этого поля на процесс радиаци-

онной рекомбинации.

Сравним силы, действующие на электрон, находящийся на уровне с $n=1$ со стороны магнитного поля: $f_{магн.} \sim eH(Z\alpha)$ и со стороны кулоновского центра $f_{кул.} \sim eH_0(Z\alpha)^3$, где $H_0 = m^2c^3/e\hbar \simeq 4{,}4\cdot 10^{13}$ э. Для полей, удовлетворяющих условию

$$H \ll H_0\,(Z\alpha)^2 \qquad (3.1)$$

заведомо выполняющемуся во всех реальных установках, воздействие магнитного поля на электрон в состоянии с $n \sim 1$ пренебрежимо мало по сравнению с кулоновским.

С увеличением главного квантового числа кулоновское взаимодействие уменьшается, однако, поскольку при $\xi \lesssim 1$ рекомбинация происходит на низшие уровни (вклад состояний с $n \gg 1$ падает в этом случае как $1/n^3$), то поля, удовлетворяющие условию (3.1), если и могут оказывать влияние на рекомбинацию, то только при $\xi \gg 1$. Как уже отмечалось, в этом случае основной вклад дают значения $n \lesssim \xi$.

Таким образом достаточно решить поставленную задачу при $\xi, n \gg 1$, когда рассмотрение может быть проведено, по существу, в рамках классической электродинамики. В отсутствии магнитного поля можно прямо воспользоваться формулой для спектральной плотности излучения при пролете электрона, имевшего прицельный параметр ρ (см./5/ стр. 241); разделив это выражение на энергию излученного фотона $\hbar\omega$, имеем для вероятности излучения при данном прицельном параметре:

$$dW_\omega = \frac{2\pi\alpha\,\xi^2\lambdabar_c^2\,\omega\,d\omega}{3v^2}\left\{\left[H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)\right]^2 - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}\left[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)\right]^2\right\} \qquad (3.2)$$

где $$\nu = \xi\hbar\omega/mv^2\,; \quad \varepsilon^2 - 1 = l^2/\xi^2\,; \quad l = mv\rho/\hbar$$

В нашем случае $\nu \gg 1$ и можно заменить функции Ганкеля на их асимптотические выражения

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\nu\left[\eta - \varepsilon\,\mathrm{sh}\,\eta\right]\right\}d\eta \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\nu\left[(\varepsilon-1)\eta+\varepsilon\frac{\eta^3}{6}\right]\right\} d\eta = \frac{2}{i\pi}\sqrt{\frac{2(\varepsilon-1)}{3\varepsilon}}\, K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\nu\left[2(\varepsilon-1)\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\varepsilon}}\right)$$

$$H^{(1)'}_{i\nu}(i\nu\varepsilon) \simeq \frac{1}{\pi}\,\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\, K_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\nu\left[2(\varepsilon-1)\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3\varepsilon}}\right) \qquad (3.3)$$

Из (3.2), (3.3) следует, что основной вклад в dW_ω дают траектории, близкие к параболическим ($\varepsilon-1 \sim \nu^{-2/3} \ll 1$), отвечающие большим орбитальным моментам ℓ .

Для $n, \ell \gg 1$ можно воспользоваться приближенными соотношениями

$$\int d^2\rho \to 2\pi \sum_\ell \left(\frac{\hbar}{mv}\right)^2 \ell\,; \quad d\omega_n \simeq \frac{I_n - I_{n-1}}{\hbar} \simeq \frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{\hbar n^3} \qquad (3.4)$$

Мы учли закон сохранения энергии при рекомбинации: $\hbar\omega_n = \frac{mv^2}{2} + I_n$, где $I_n = (Z\alpha)^2 mc^2/2n^2$ – потенциал ионизации с n -го уровня. Подставляя (3.3) в (3.2) и проводя разложение по ($\varepsilon - 1$), получаем с учетом (3.4) выражение для парциального сечения в состояние с определенными (большими!) значениями n, ℓ

$$\sigma_\ell^{(n)} = (8/9)\alpha \xi^2 \lambda_c^2 (1+n^2/\xi^2)(\ell/n)^5 \cdot \qquad (3.5)$$

$$\cdot\left[K^2_{2/3}\left(\ell^3(1+n^2/\xi^2)/6n^2\right) + K^2_{1/3}\left(\ell^3(1+n^2/\xi^2)/6n^2\right)\right]$$

Из (3.5) следует, что значения ℓ , дающие вклад в сечение, удовлетворяют неравенству $1 \ll \ell \lesssim n^{2/3}$. Суммируя $\sigma_\ell^{(n)}$ из (3.5) по ℓ (эта операция может быть заменена интегрированием), находим:

$$\sigma^{(n)} = \frac{32}{3\sqrt{3}}\pi\alpha\xi^2\lambda_c^2 \frac{1}{n\left(1+\frac{n^2}{\xi^2}\right)} \qquad (3.6)$$

Это выражение, полученное Крамерсом /6/, отвечает первому члену разложения величины $\mathcal{U}(n,\xi)$ в (2.I7) (если в (2.I7) положить $A = B = 0$, то для $\sigma^{(n)}$ получаем выражение (3.6)).

Учтем теперь влияние магнитного поля H , считая, что поправки к движению за счет H малы. Тогда Фурье-компонента скорости, через которую выражается вероятность излучения будет иметь вид:

$$|\vec{v}_\omega| = |\vec{v}_{0\omega} + \frac{i\omega_H}{\omega}[\vec{v}_{0\omega}\times\vec{h}]| \qquad (3.7)$$

где $\vec{v}_{0\omega}$ – соответствующая Фурье-компонента скорости при $H=0$, $\omega_H = eH/mc$; $\omega_H/\omega_n = 2n^2 H/(Z\alpha)^2 H_0(1+n^2/\xi^2)$, $\vec{h}$ – направление магнитного поля. В случае, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости, в которой движется электрон, находим, дейстуя как при выводе формулы (3.6)

$$\sigma_H^{(n)} = \frac{32}{3\sqrt{3}}\,\frac{\pi\alpha\xi^2\lambda_c^2}{n(1+n^2/\xi^2)}\left[1+\left(\frac{\omega_H}{\omega_n}\right)^2\right] \qquad (3.8)$$

Отметим, что линейные по H члены обратились в нуль при интегрировании по азимутальному углу.

Таким образом влияние магнитного поля на процесс радиационной рекомбинации становится существенным при напряженности поля

$$H \sim H_0\left(\frac{Z\alpha}{\xi}\right)^2 = H_0\left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 4H_0\cdot 10^{-6}\, T_{\text{э.в.}}$$

В частности, на установке НАП-М, $H \sim 10^3$ э , $T \sim \frac{1}{6}$ э.в. и влиянием магнитного поля на рассматриваемый процесс можно пренебречь.

4. Коэффициент рекомбинации β_R выражается через известное сечение процесса σ и распределение электронов по скоростям (в системе покоя протона) $f(\vec{v})$ следующим образом:

$$\beta_R = \int \sigma_{rec}(v)\, v\, f(\vec{v})\, d^3v \qquad (4.I)$$

В общем случае для нахождения β_R необходимо проведение численного расчета, который особенно прост, если для $\mathcal{U}(n,\xi)$ использовать приближенное выражение (2.I7), имеющее высокую точность. Если же величина $\xi_T = Z\alpha c/v_T$ ($v_T/c = 2\cdot 10^{-3}\sqrt{T_{\text{э.в.}}}$) велика: $\xi_T \gg 1$, то для σ можно использовать выражение (2.I8). В этом случае удается найти β_R в аналитическом виде.

Так для изотропного распределения по скоростям

$$f_1(\vec{v}) = \frac{1}{(\pi v_T^2)^{3/2}} \exp\left\{-\vec{v}^2/v_T^2\right\} \qquad (4.2)$$

находим

$$\beta_R^{(1)} = \frac{64}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}} Z r_e^2 c \xi_T \Big[\ln \xi_T + b_0 + C/2 + b_1 \Gamma\left(\tfrac{4}{3}\right) \xi_T^{-2/3} + b_2 \Gamma\left(\tfrac{5}{3}\right) \xi_T^{-4/3} + \left(b_3 + b_4 (1-C)/2 - b_4 \ln \xi_T\right) \xi_T^{-2} \Big] \tag{4.3}$$

здесь $r_e = e^2/mc^2$ – классический радиус электрона.

При электронном охлаждении на установке НАП-М разброс продольных (относительно движения протонов) скоростей значительно (на 2÷3 порядка) меньше, чем поперечных, поэтому

$$f_2(\vec{v}) = \frac{1}{\pi v_T^2} \exp\left\{ -\vec{v}_\perp^{\,2}/v_T^2 \right\} \delta(v_\parallel) \tag{4.4}$$

с помощью которой получаем

$$\beta_R^{(2)} \simeq A \Big[\ln \xi_T + b_0 + C/2 + \ln 2 + b_1 \Gamma(5/6)/\xi_T^{2/3}\sqrt{\pi} + b_2 \Gamma(7/6)/\xi_T^{4/3}\sqrt{\pi} + \big(b_3 - b_4 \ln \xi_T + b_4 (1 - \ln 2 - C/2)\big)/2\xi_T^2 \Big]; \quad A = 32 (\pi/3)^{3/2} Z r_e^2 c \xi_T \tag{4.5}$$

При экспериментальном изучении влияния относительных продольных скоростей электронов и протонов на эффекты охлаждения проводилась модуляция продольной скорости (энергии) электронного пучка. Эта ситуация отвечает замене в (4.4)

$$\delta(v_\parallel) \to \delta(v_\parallel - v_0 \cos\psi)$$

Полученное значение коэффициента рекомбинации следует усреднить по ψ. Приведем ответ для случая, когда величина $\gamma = v_0/v_T$ мала: $\gamma \ll 1$

$$\beta_R^{(3)} = \left(1 + \frac{\gamma^2}{2}\right)\beta_R^{(2)} - \frac{4A}{\pi^{3/2}}\gamma \Big[\ln \xi_0 + b_0 + 2 - \ln 2 + b_1 \sqrt{\pi}\, \Gamma(4/3)\, \xi_0^{-2/3}/4\Gamma(5/6)(5/6)^2 + b_2 \sqrt{\pi}\, \Gamma(5/3)\, \xi_0^{-4/3}/4\Gamma(7/6)(7/6)^2 + \ldots \Big]; \quad \xi_0 = \frac{\xi_T}{\gamma} = \xi(v_0) \tag{4.6}$$

Опыты по электронному охлаждению проводятся в присутствии магнитного поля, направленного обычно вдоль протонного пучка.

Электроны при этом движутся по винтовой линии с осью вдоль направления поля. При исследовании (см. /I/) влияния поперечных скоростей электронов на эффекты охлаждения и рекомбинации проводилось либо изменение скорости вращения электронов, либо небольшим поворотом магнитного поля электронному пучку сообщалась систематическая поперечная скорость. В обоих случаях соответствующая функция распределения получается из (4.4) заменой $\vec{v}_\perp \to \vec{v}_\perp - \vec{v}_0$, только в первом случае следует считать вектор $\vec{v}_0$ вращающимся, а во втором – постоянным. Однако после интегрирования по углам вектора $\vec{v}_\perp$ остается зависимость только от $|\vec{v}_0| = v_0$ и коэффициенты рекомбинации в этих двух случаях совпадают*)

$$\beta_R^{(4)} = A \Big\{ \big[\ln \xi_T + b_0 + C/2 + \ln 2 + b_4/2\xi_T^2 \big] \Phi\left(\tfrac{1}{2}, 1, -\gamma^2\right) + \frac{b_1 \Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi}\, \xi_T^{2/3}} \Phi\left(\tfrac{1}{6}, 1, -\gamma^2\right) + \frac{b_2 \Gamma(7/6)}{\sqrt{\pi}\, \xi_T^{4/3}} \Phi\left(-\tfrac{1}{6}, 1, -\gamma^2\right) + \frac{1}{2\xi_T^2}\big[b_3 - b_4 \ln \xi_T - b_4 (C/2 + \ln 2) \big] \Phi\left(-\tfrac{1}{2}, 1, -\gamma^2\right) - \varphi(\gamma^2) \Big\} \tag{4.7}$$

где

$$\varphi(\gamma^2) = e^{-\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma^2}{2}\right)^n \frac{(2n-1)!!}{(n!)^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \right) \left(1 - \frac{b_4}{2\xi_T^2}\right)$$

при $\gamma \ll 1$ из (4.7) находим

$$\beta_R^{(4)} = \beta_R^{(2)} - \frac{A}{2}\gamma^2 \Big\{ \ln \xi_T + b_0 + \frac{C}{2} + \ln 2 + 1 + \frac{b_1 \Gamma(5/6)}{3\sqrt{\pi}\, \xi_T^{2/3}} - \frac{b_2 \Gamma(7/6)}{3\sqrt{\pi}\, \xi_T^{4/3}} + \frac{1}{2\xi_T^2}\big[b_4 \ln \xi_T - b_3 + b_4 (C/2 + \ln 2) \big] \Big\} \tag{4.8}$$

При $\gamma \gg 1$ основной вклад в интеграл (4.I) дают значения $|\vec{v}_\perp| \simeq v_0$ и коэффициент β_R в этом случае отличается от $v_0 \sigma(v_0)$ на величину $\sim 1/\gamma^2$

---

*) Если электронный пучок неоднороден по радиусу, например, v_T зависит от r, то эти коэффициенты будут отличаться, т.к. во втором случае протонный пучок движется под углом к электронному и выражение (4.7) следует усреднить по r.

$$\beta_R^{(4)} = v_0\,\sigma(v_0)\left(1 + 1/4\gamma^2\right) + \\ + \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}\,\frac{Z r_e^2 c\,\xi_0}{\gamma^2}\left(1 - \frac{4b_1}{9\,\xi_0^{2/3}} - \frac{4b_2}{9\,\xi_0^{4/3}} + \frac{b_4}{\xi_0^2}\right) \qquad (4.9)$$

В эксперименте на данный момент нет полной ясности, необходимой для детального сравнения с теорией. Тем не менее, полученные в настоящей работе результаты показывают, что процесс радиационной рекомбинации может эффективно использоваться для мониторирования в различных ситуациях, имеющих место в опытах по электронному охлаждению. В частности, с высокой точностью может быть определена эффективная температура электронного пучка. Если, как это было в /I/, размер протонного пучка значительно меньше электронного, то, перемещая протонный пучок по сечению электронного, можно, в принципе, изучать структуру последнего.

Авторы пользуются случаем поблагодарить Н.С.Диканского и Д.В.Пестрикова, обративших наше внимание на круг вопросов, рассмотренных в настоящей работе, за полезное обсуждение экспериментальной ситуации и В.Н.Байера за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

Литература

I. G.I.Budker et al. Particl Accelerators, Vol.7, 197, 1976.

Г.И.Будкер и др. Труды Международной конференции по ускорителям. Серпухов, TI, 498, 1977 г.
Г.И.Будкер и др. Труды Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, TI, 236, 1977 г.

2. Атомные и молекулярные процессы. Под редакцией Д.Р.Бейтса, Москва, "Мир", 1964 г.

3. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1963 г.

4. Г.Бейтмен и А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции TI. Москва, Физматгиз, 1965 г.

5. Л.Д.Ландау и Е.М.Лившиц. Теория поля. Москва, Физматгиз, 1967 г.

6. H.Kramers. Philos. Mag., 46, 836, 1923.