И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 50

В.В.Соколов

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Новосибирск
1978

В.В. СОКОЛОВ

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

А Н Н О Т А Ц И Я

Обсуждается влияние на нелинейный квантовый осциллятор гармонического резонансного внешнего поля. В резонансном приближении получено уравнение для спектра квазиэнергий. Рассмотрен процесс многоквантового возбуждения низколежащих уровней осциллятора с большой по сравнению с полевым уширением уровней нелинейностью, когда неприменимо квазиклассическое приближение. Вычислено время резонансного многоквантового возбуждения и ширина резонанса в зависимости от амплитуды внешнего поля и числа поглощаемых квантов. Рассмотрен также резонанс высоколежащих уровней и прослежен переход к квазиклассическому приближению в уравнении Шредингера и гейзенберговских уравнениях движения.

I. Введение

Появление мощных когерентных источников электромагнитного излучения стимулировало интерес к влиянию переменного внешнего поля на атомные и молекулярные системы. Последние I5 лет принесли весьма существенный прогресс как в экспериментальном изучении, так и теоретической интерпретации явлений, сопровождающих действие лазерного излучения на атомы и молекулы. Среди этих явлений большое практическое значение имеет, в частности, лазерное возбуждение молекулярных колебаний, позволяющее управлять течением химических реакций /I/, а также эффективно осуществлять разделение изотопов /2,3/. В ряде работ /4,5/ была обнаружена быстрая радиационная диссоциация молекул под действием лазерного излучения. К сожалению, до сих пор не существует полного теоретического объяснения этих важных результатов, хотя и имеется значительное число работ, посвященных указанному кругу вопросов.

Уже в первых теоретических работах /6,7/ были рассмотрены процессы возбуждения и диссоциации молекул в результате последовательности одноквантовых переходов при поглощении лазерного излучения с частотой ω много большей частоты молекулярных колебаний ω_0. Моделью молекулы служил в этих работах одномерный нелинейный осциллятор, описываемый потенциалом Морса /8/. В последующем были предприняты попытки вычислить вероятность многоквантового возбуждения, а также учесть вращение молекулы /9,I0/. Эти вычисления основаны на теории возмущений по лазерному полю. Полученные выражения содержат поэтому обычные в теории возмущений резонансные знаменатели, делающие их непригодными непосредственно в области резонанса. Ясно, что рассмотрение резонансного возбуждения требует выхода за рамки обычной теории возмущений.

В настоящей работе рассматривается возбуждение одномерного нелинейного квантового осциллятора при наличии резонанса между лазерным излучением и собственными колебаниями. Необходимость такого рассмотрения специально подчеркивалось в /2,3/. Следует отметить, что уже в одномерном случае задача о резонансном возбуждении не является при наличии нелинейности тривиальной. Поэтому многие оценки часто основывались на модели линейного осциллятора в надежде на "компенсацию" ангармонизма полевым уширением уровней. Такая компенсация, однако, наверняка не происходит в реальных условиях экспериментов[2-5] и нелинейность является в них весьма существенным фактором. В связи с этим в ряде работ[II-I6] было проведено классическое и квазиклассическое рассмотрение резонансного возбуждения нелинейного осциллятора. Квазиклассический подход позволяет учесть многие качественные стороны нелинейного резонанса, но его применимость для рассмотрения возбуждения из основного состояния существенно нелинейного осциллятора сравнительно слабым полем вызывает сомнения. На самом деле, как будет видно из дальнейшего /см. раздел Ш/, квазиклассическое рассмотрение в этом случае незаконно и возбуждение носит существенно квантовый характер. Следует отметить, что в работе[I7] было получено точное формальное решение задачи о возбуждении n-уровневого нелинейного квантового осциллятора. Однако громоздкость приведенных в[I7] общих выражений чрезвычайно затрудняет получение качественных физических выводов.

В разделе П проведено общее рассмотрение нелинейного квантового резонанса. Это рассмотрение основано на выборе переменных, родственных переменным действие – угол классической теории. Как и в классическом случае, в резонансном приближении задача сводится к стационарной путем введения приближенного "резонансного гамильтониана"[I8], спектр которого совпадает со спектром квазиэнергий[I2]. Получено уравнение для этого спектра. В разделе Ш рассмотрено возбуждение из основного состояния осциллятора с большой по сравнению с полевым уширением уровней λ нелинейностью γ. При расстройке частот $\delta=(k-1+\Delta)\gamma$, где $\delta=\omega_0-\omega-2\gamma$, $k=1,2,3,\dots$, $|\Delta|<1$, при достаточно малом $|\Delta|$ основным процессом является поглощение k квантов лазерного поля с переходом в k-тое возбужденное состояние. Такой процесс обусловлен нелинейностью и не имеет аналога в линейном приближении. Вычислено время возбуждения, по истечении которого осциллятор с близкой к единице вероятностью оказывается в k-том состоянии. Это время растет с ростом k и при $k\gg1$ становится экспоненциально большим. Одновременно с этим уменьшается резонансная область k-квантового возбуждения. Средняя скорость резонансных переходов

пропорциональна, в отличие от результата теории возмущений, k-той степени амплитуды, а не интенсивности внешнего поля. Отметим, что квазиклассическое рассмотрение[I2-I3] предсказывает экспоненциально малую примесь возбужденных уровней, отвечающих верхней ветви резонансной кривой[I9], в результате "тунелирования в фазовом пространстве". Поэтому квазиклассические оценки сильно занижают вероятность возбуждения низколежащих уровней.

Вряд ли можно надеяться, что рассматриваемая одномерная модель является хорошим приближением для описания возбуждения колебаний многоатомной молекулы. Поэтому приводимые ниже численные оценки носят, в основном, иллюстративный характер. Они проводились для следующих значений параметров: $\gamma\approx2{,}5\,см^{-1}$, $\lambda\approx1\,см^{-1}$. Время возбуждения уровней с $k=3,4,5$ в этом случае равно соответственно: $0{,}5\cdot10^{-9}$сек. ; $0{,}6\cdot10^{-8}$сек.; $1\cdot10^{-8}$сек., причем условие резонанса имеет вид: $|\Delta|<0{,}2$; $0{,}01$; $0{,}6\cdot10^{-3}$. Ясно, что уже резонансный захват пяти квантов практически невозможен из-за конечности спектральной ширины лазерной линии. Вне указанных областей значений $|\Delta|$ вероятность возбуждения k-того уровня быстро падает с ростом k и при больших k экспоненциально мала в соответствии с квазиклассическим результатом. Полученные значения времени возбуждения согласуются по порядку величины с наблюдавшимся в[2-5] временем радиационной диссоциации молекул. Отметим в этой связи, что общепринята точка зрения, согласно которой возбуждение молекулы до 3-4ого уровня достаточно для ее последующей диссоциации. Рассмотрение этого дальнейшего этапа наверняка требует, однако, выхода за рамки одномерной модели. Связь механизма диссоциации с многоатомностью молекулы отмечалась, в частности, в[3].

Раздел IУ посвящен рассмотрению резонанса высоколежащих уровней в случае умеренной нелинейности. Получен квантовый аналог известного приближения маятника[I8] и прослежен переход к квазиклассическому приближению. Наконец, в разделе У анализируются гейзенберговские уравнения движения в резонансном приближении и их связь с классическими уравнениями для медленных переменных.

П. Общее рассмотрение; резонансное приближение

Рассмотрим нелинейный осциллятор с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\hat{x}^2 + \mathcal{U}(\hat{x}) \qquad (1)$$

/выбраны единицы $m = \hbar = 1$ /, на который действует гармоническая внешняя сила $\mathcal{E}(t) = 2\mathcal{E}_0\cos\omega t$. Уже при классическом рассмотрении такого осциллятора возникают, как известно, значительные трудности. Тем не менее, существуют мощные общие методы ее решения в практически важном случае малых по сравнению с линейной силой нелинейной и внешней сил [19]. Наиболее удобными для изучения резонансных явлений оказываются при этом переменные действие – угол I, θ. Т.к. в отсутствие внешнего поля их зависимость от времени носит тривиальный характер, использование таких переменных позволяет полностью сосредоточить внимание на влиянии этого поля.

Квантовомеханическим аналогом переменной действия служит номер n энергетического уровня осциллятора, что ясно хотя бы из правил квантования Бора – Зоммерфельда. В случае линейного осциллятора он является собственным значением оператора $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$. Однако введение канонически сопряженной с $\hat{n}$ угловой переменной наталкивается на трудности, обусловленные ограниченностью снизу спектра оператора $\hat{n}$ [20,21]. Лишь для сильно возбужденных состояний $n \gg 1$ эта ограниченность становится несущественной и можно ввести каноническую пару операторов θ и $\hat{n} = -i\frac{\partial}{\partial\theta}$. Рассмотрение неизбежно оказывается при этом квазиклассическим. В то же время, существуют квантовые аналоги связанной с переменными действие – угол пары канонических переменных $a = \sqrt{I}e^{i\theta}$, $ia^* = i\sqrt{I}e^{-i\theta}$ и ими являются, конечно, операторы $\hat{a}$, $i\hat{a}^+$.

В классической механике всегда можно найти каноническое преобразование $I^{(0)}, \theta^{(0)} \to I, \theta$ от переменных действие – угол гармонического осциллятора к аналогичным переменным осциллятора с нелинейностью. Видимо, менее известно, что аналогичное преобразование $\hat{a}^{(0)}, \hat{a}^{(0)+} \to \hat{a}, \hat{a}^+$ существует и в квантовой механике, где оно может быть построено с помощью адиабатической теории возмущений [22]. Это преобразование осуществляется унитарным оператором

$$\hat{U} = \lim_{\varkappa \to 0} S_\varkappa(0,-\infty)\, e^{i\lambda_\varkappa(\hat{n}^{(0)})}$$

$$S_\varkappa(0,-\infty) = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{0} dt\, e^{\varkappa t}\,\mathcal{U}[\hat{x}(t)]\right\}$$

$$\lambda_\varkappa(n) = \langle\psi_n^{(0)}|\lambda_\varkappa(\hat{n}^{(0)})|\psi_n^{(0)}\rangle = -\operatorname{Im}\ln\langle\psi_n^{(0)}|S_\varkappa(0,-\infty)|\psi_n^{(0)}\rangle,$$

переводящим состояние линейного осциллятора $|\psi_n^{(0)}\rangle$ в точное состояние $|\psi_n\rangle \equiv |n\rangle$ с энергией E_n.

Введем операторы

$$\hat{a} = \hat{U}\hat{a}^{(0)}\hat{U}^+, \quad \hat{a}^{(0)} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\omega_0}}\,\hat{p}$$

$$\hat{a}^+ = \hat{U}\hat{a}^{(0)+}\hat{U}^+, \quad \hat{a}^{(0)+} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\omega_0}}\,\hat{p} \qquad (2)$$

$$\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a} = \hat{U}\hat{n}^{(0)}\hat{U}^+$$

В силу унитарности $\hat{U}$ между операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ и $\hat{n}$ имеют место те же перестановочные соотношения, что и в случае линейного осциллятора. Ясно поэтому, что операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ имеют в базисе собственных векторов оператора $\hat{n}$ обычные матричные элементы операторов уничтожения и рождения. Далее очевидно, что собственными векторами оператора $\hat{n}$ являются точные состояния $|n\rangle$. А поскольку операторы $\hat{n}$ и $\hat{H}$ имеют общие собственные функции, гамильтониан (1), выраженный через новые переменные, не должен содержать операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ поотдельности и может выражаться только через $\hat{n}$:

$$\hat{H} = \omega_0(\hat{n} + \tfrac{1}{2}) + \gamma\hat{H}_{н.л.}(\hat{n}),$$

где параметр γ характеризует нелинейность. Для определения явного вида оператора $\hat{H}_{н.л.}(\hat{n})$ необходимо разрешить (2) относительно $\hat{x}$ и $\hat{p}$, что всегда можно сделать по теории возмущений, и подставить полученные выражения в (1).

Предположим, что $\mathcal{U}(x) = \gamma_1 x^3 + \gamma_2 x^4 + \ldots$ и ограничимся, как обычно [23], первым порядком по γ_2 и вторым – по γ_1. Простые, хотя и несколько утомительные вычисления дают

$$\hat{x} = -\frac{3\gamma_1}{\omega_0^3}\left(\hat{n}+\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2\omega_0}}\left\{\left[1+\left(\frac{11}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^5}-\frac{3\gamma_2}{2\omega_0^3}\right)(\hat{n}+1)\right]\hat{a} + \hat{a}^+\left[1+\left(\frac{11}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^5}-\frac{3\gamma_2}{2\omega_0^3}\right)(\hat{n}+1)\right]\right\} +$$

$$+\frac{\gamma_1}{2\omega_0^3}\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}\left(\frac{3\gamma_1^2}{8\omega_0^5}+\frac{\gamma_2}{4\omega_0^3}\right)\left(\hat{a}^3+\hat{a}^{+3}\right) \tag{3}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}\left\{\hat{a}^+\left[1-\left(\frac{19}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^5}-\frac{3\gamma_2}{2\omega_0^3}\right)(\hat{n}+1)\right] - \left[1-\left(\frac{19}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^5}-\frac{3\gamma_2}{2\omega_0^3}\right)(\hat{n}+1)\right]\hat{a}\right\} +$$

$$+ i\frac{\gamma_1}{\omega_0^2}\left(\hat{a}^{+2}-\hat{a}^2\right) + i\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}\left(\frac{9\gamma_1^2}{8\omega_0^5}+\frac{3\gamma_2}{4\omega_0^3}\right)\left(\hat{a}^{+3}-\hat{a}^3\right)$$

Эти формулы – операторные аналоги классических выражений для координаты и импульса в переменных действие – угол, причем степень операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ отвечает номеру гармоники классических колебаний. Их подстановка в (1) приводит к гамильтониану

$$\hat{H}(\hat{n}) = \omega_0\left(\hat{n}+\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^4}\left(\hat{n}^2+\hat{n}+\frac{11}{30}\right) + \frac{3\gamma_2}{2\omega_0^2}\left(\hat{n}^2+\hat{n}+\frac{1}{2}\right)$$

В дальнейшем мы будем отсчитывать энергию осциллятора от основного уровня, положив

$$\hat{H}(\hat{n}) = (\omega_0 - 2\gamma)\hat{n} - \gamma\hat{n}(\hat{n}-1), \tag{4}$$

где

$$\gamma = \frac{15}{4}\frac{\gamma_1^2}{\omega_0^4} - \frac{3\gamma_2}{2\omega_0^2}$$

В отсутствие внешнего поля гейзенберговские уравнения движения имеют в новых переменных вид

$$i\frac{d\hat{a}}{dt} = \hat{\omega}(\hat{n})\hat{a} \qquad i\frac{d\hat{a}^+}{dt} = -\hat{a}^+\hat{\omega}(\hat{n})$$

$$i\frac{d\hat{n}}{dt} = 0$$

$$\hat{\omega}(\hat{n}) = \hat{H}(\hat{n}+1) - \hat{H}(\hat{n}) = \omega_0 - 2\gamma - 2\gamma\hat{n},$$

так что

$$\hat{a}(t) = e^{-i\hat{\omega}(\hat{n})t}\hat{a} \qquad \hat{a}^+(t) = \hat{a}^+ e^{i\hat{\omega}(\hat{n})t} \tag{5}$$

Матричные элементы оператора $\hat{\omega}(\hat{n})$ есть расстояния между уровнями. Подстановка (5) в (3) дает зависимость операторов координаты и импульса от времени.

В новых переменных гамильтониан осциллятора во внешнем поле в дипольном приближении имеет вид

$$\hat{H}(\hat{n},\hat{a},\hat{a}^+;t) = \hat{H}(\hat{n}) - e\mathcal{E}(t)\hat{x},$$

причем оператор $\hat{x}$ определяется формулой (3).

Важнейшими характеристиками системы в периодическом внешнем поле являются спектр ее квазиэнергий ε и квазиэнергетические состояния /24,25/

$$|\Psi_\varepsilon(t)\rangle = |\varphi_\varepsilon(t)\rangle e^{-i\varepsilon t}, \quad |\varphi_\varepsilon(t+T)\rangle = |\varphi_\varepsilon(t)\rangle,$$

которые определяются решением задачи на собственные значения

$$\hat{\mathcal{H}}|\varphi_\varepsilon(t)\rangle = \varepsilon|\varphi_\varepsilon(t)\rangle \tag{6}$$

оператора

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{H}(\hat{n}) - e\mathcal{E}(t)\hat{x} - i\frac{\partial}{\partial t}.$$

Сделаем в уравнении (6) унитарное преобразование

$$|\varphi_\varepsilon(t)\rangle \to e^{i\hat{n}\omega t}|\varphi_\varepsilon(t)\rangle = |\chi_\varepsilon(t)\rangle \tag{7}$$

$$\mathcal{H} \to e^{i\hat{n}\omega t}\hat{\mathcal{H}}e^{-i\hat{n}\omega t} = \delta\hat{n} - \gamma\hat{n}(\hat{n}-1) - \lambda(\hat{a}+\hat{a}^+) - i\frac{\partial}{\partial t} +$$

$\lambda\cdot$(члены, явно зависящие от времени)

Здесь $\delta=\omega_0-\omega-2\gamma$, $\lambda=\frac{e\mathcal{E}_0}{\sqrt{2\omega_0}}$, а не выписанные явно зависящие от времени члены содержат его в виде степеней быстро осциллирующей экспоненты $e^{i\omega t}$. При преобразованиях в постоянной части члена взаимодействия с внешним полем в (7) были опущены малые нелинейные поправки.

Предположим, что выполняется условие резонанса $|\delta|\ll\omega_0$. Если попытаться вычислить поправки к уровням квазиэнергии с помощью теории возмущений по амплитуде внешнего поля λ, то станет ясно, что только явно выделенная в (7) независящая от времени часть возмущения приводит к вкладам, содержащим малый резонансный знаменатель $\sim\delta$. Вклады же остальных членов возмущения будут содержать в знаменателе большую частоту ω. В главном резонансном приближении такие вклады можно опустить, положив $\hat{\mathcal{H}}\approx \hat H_2 - i\frac{\partial}{\partial t}$, где

$$\hat H_2=\delta\hat n-\gamma\hat n(\hat n-1)-\lambda(\hat a+\hat a^+) \qquad (8)$$

Векторы $|\chi_\varepsilon\rangle$ можно выбрать в этом приближении независящими от времени, так что задача сводится к стационарной

$$\hat H_2|\chi_\varepsilon\rangle=\varepsilon|\chi_\varepsilon\rangle \qquad (9)$$

Оператор $\hat H_2$ по аналогии с классической теорией нелинейного резонанса будем называть резонансным гамильтонианом.

Подстановка в (9) разложения

$$|\chi_\varepsilon\rangle=\sum_{n=0}^{\infty} C_n|n\rangle$$

приводит к трехчленной рекурсивной формуле для коэффициентов суперпозиции C_n.

$$\lambda\sqrt{n+1}\,C_{n+1}+(\varepsilon-\varepsilon_n^{(0)})C_n+\lambda\sqrt{n}\,C_{n-1}=0, \qquad (10)$$

причем невозмущенный спектр резонансного гамильтониана дается формулой

$$\varepsilon_n^{(0)}=E_n-n\omega=\delta n-\gamma n(n-1) \qquad (11)$$

Стандартным способом[26] (10) сводится к содержащим цепные дроби выражениям для отношений C_{n+1}/C_n. Учитывая, в частности, что $C_1/C_0=-\frac{\varepsilon}{\lambda}$, получим уравнение для спектра квазиэнергий

$$g_0 g_1\frac{1}{1-2g_1g_2\frac{1}{1-3g_2g_3\frac{1}{1-\dots}}}=1$$

где $g_n=\frac{\lambda}{\varepsilon-\varepsilon_n^{(0)}}$. Для практических целей, возможно, более удобна несколько иная форма решения соотношения (10). Легко убедиться, что

$$C_n=\frac{(-1)^n}{\lambda^n\sqrt{n!}}\Phi_n(\varepsilon)C_0, \quad n=1,2,3,\dots, \qquad (12)$$

где функции $\Phi_n(\varepsilon)$ определяются трехчленной формулой

$$\Phi_n(\varepsilon)=(\varepsilon-\varepsilon_{n-1}^{(0)})\Phi_{n-1}(\varepsilon)-(n-1)\lambda^2\Phi_{n-2}(\varepsilon), \qquad (13)$$

причем $\Phi_0(\varepsilon)=1$.

Предположим, нас интересует уровень квазиэнергии, получающийся в результате возмущения из исходного уровня $\varepsilon^{(0)}=0$. Т.к. с увеличением n резонансные знаменатели теории возмущений в силу нелинейности осциллятора растут, ясно, что к исходному состоянию заметным образом примешиваются состояния с не слишком большими n. Полагая $\Phi_n(\varepsilon)=0$ и, в силу (12), $C_n=0$, мы получим приближенное алгебраическое уравнение для первых n квазиуровней. После этого определим с помощью (12) отличные от нуля коэффициенты $C_1, C_2,\dots,C_{n-1}$. Такое вычисление будет самосогласованным, если при увеличении номера n, на котором производится обрыв цепочки (10), добавляющиеся коэффициенты оказываются меньше ранее вычисленных, в то время как эти последние меняются мало.

Поляризация осциллятора в состоянии с квазиэнергией ε равна

$$d(t)=\langle\psi_\varepsilon(t)|\hat d|\psi_\varepsilon(t)\rangle=$$
$$=e\langle\chi_\varepsilon|e^{i\hat n\omega t}\hat x\, e^{-i\hat n\omega t}|\chi_\varepsilon\rangle=\sum_s d_s(\mathcal{E}_0)e^{-is\omega t},$$

где $\hat{X}$ определено в (3). Квадрат модуля $|d_s(\mathcal{E}_1)|^2$ определяет сечение рассеяния лазерной волны с умножением частоты $\omega \to s\omega$. Матричные же элементы $\hat{d}$ по состояниям с разными квазиэнергиями содержат дополнительный временной фактор $\exp\{i(\varepsilon'-\varepsilon)t\}$ и дают рассеяние на смещенных частотах [24].

Отметим, что для вычисления поляризации на кратных гармониках достаточно знать лишь спектр квазиэнергий системы. В самом деле, пусть на нее действует периодическое поле $\mathcal{E}(t) = \sum_s \mathcal{E}_s e^{-is\omega t}$. Дифференцируя уравнение (6) по $\mathcal{E}_{-s}$ и учитывая, что

$$\frac{\partial \hat{H}(\hat{n},\hat{a},\hat{a}^+;t)}{\partial \mathcal{E}_{-s}} = -\hat{d}\,e^{is\omega t},$$

легко показать, что

$$d_s(\mathcal{E}) = -\frac{\partial \varepsilon(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}_{-s}}$$

Если внешнее поле содержит конечный набор гармоник, эта формула дает не все Фурье - компоненты дипольного момента, т.к. в нелинейной системе каждая гармоника внешней силы возбуждает колебания и на кратных частотах. Поэтому для определения компоненты d_k при отсутствии во внешней силе k-той гармоники следует добавить к ней эту гармонику с бесконечно малой амплитудой $\mathcal{E}_{-k}$. Тогда

$$d_{\mp k}(\mathcal{E}) = -\frac{\partial \varepsilon(\mathcal{E},\mathcal{E}_{\mp k})}{\partial \mathcal{E}_{\mp k}}\bigg|_{\mathcal{E}_{\mp k}=0}$$

В случаях, когда возможно разложение по степеням внешнего поля,

$$d_s(\mathcal{E}) = \chi(s\omega)\mathcal{E}_s + \sum_{s_1}\chi[(s-s_1)\omega, s_1\omega]\mathcal{E}_{s-s_1}\mathcal{E}_{s_1} + \sum_{s_1,s_2}\chi[(s-s_1-s_2)\omega, s_1\omega, s_2\omega]\,\mathcal{E}_{s-s_1-s_2}\mathcal{E}_{s_1}\mathcal{E}_{s_2} + \cdots,$$

где χ - восприимчивости системы [27]. Отсюда для восприимчивости порядка n получаем

$$\chi(s_1\omega, s_2\omega, \ldots, s_n\omega) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n+1}\varepsilon(\mathcal{E})}{\partial\mathcal{E}_{s_1}\partial\mathcal{E}_{s_2}\cdots\partial\mathcal{E}_{s_n}\partial\mathcal{E}_{-s}}\bigg|_{\mathcal{E}=0} \quad ^{*)}$$

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

Ш. Возбуждение из основного состояния

Как следует из рассмотрения предыдущего раздела, возбуждение внешним полем первоначально невозбужденного нелинейного осциллятора описывается в резонансном приближении возмущением постоянным полем уровня $\varepsilon^{(n)} = 0$ системы со спектром (11). Предположим сначала, что расстройка $\delta = 0$. Анализ (10) показывает, что обрыв можно совершить на номере N, удовлетворяющем условию $N(N+1)N(N-1)\gamma^2 \sim (N+1)\lambda^2$ или

$$N^2(N-1) \sim \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^2.$$

Следовательно, при $\lambda \gg \gamma$ осциллятор возбуждается до уровня $N \sim (\lambda/\gamma)^{2/3}$ в соответствии с классической формой зависимости действия от амплитуды внешнего поля [18]. В обратном пределе $\lambda \ll \gamma$ $N = 1$ и можно ограничиться рассмотрением уравнения $\Phi_2(\varepsilon) = 0$. Решение этого уравнения приводит, разумеется, к результату двухуровневого приближения: $\varepsilon = \pm\lambda$, $C_1 = \pm C_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Это ясно уже из того, что при $\delta = 0$ в спектре (11) имеется двукратно вырожденный уровень с $n = 0$ и $n = 1$. Переход к более точному уравнению $\Phi_3(\varepsilon) = 0$ дает поправки к двухуровневому приближению. Вероятность возбуждения уровня с $n = 2$ оказывается при этом равной $w_2 = (\lambda/2\gamma)^2$ /=0,04 при принятых во введении значениях λ и γ /.

Следует однако подчеркнуть, что условие $\delta = 0$ не приводит, в отличие от случая линейного резонанса, к максимально возможному возбуждению нелинейного осциллятора.

---

*) Эта формула остается, разумеется, справедливой и в трехмерном случае, а также при произвольном числе степеней свободы. Усложнение состоит лишь в появлении тензорных индексов у $\mathcal{E}$ и χ.

В самом деле, как видно из (11) при $\delta=(k-1)\gamma$, где $k=2,3,\ldots$, невозмущенный спектр квазиэнергий содержит несколько пар вырожденных уровней: $\varepsilon_0^{(0)}=\varepsilon_k^{(0)}=0$, $\varepsilon_1^{(0)}=\varepsilon_{k-1}^{(0)}=(k-1)\gamma$ и т.д. В слабом поле $\lambda\ll\gamma$ возмущение будет мало перемешивать между собой разные пары и в первом приближении достаточно ограничиться рассмотрением перемешивания внутри каждой пары в отдельности. Можно убедится, что возмущенные квазиуровни получаются в результате решения уравнения $\Phi_{k+2}(\varepsilon)=0$. Хотя это - алгебраическое уравнение порядка $k+2$, его приближенное решение, если мы интересуемся, например, смещением близкой к нулю пары уровней, не представляет трудностей. Альтернативный способ состоит в использовании теории возмущений для двух вырожденных уровней. Поскольку, однако, возмущение в (8) не вызывает прямых переходов между уровнями 0 и k, следует учесть влияние остальных уровней. Задача в этом случае состоит в диагонализации на паре вырожденных состояний $|0\rangle$ и $|k\rangle$ оператора сдвига квазиуровней $\hat{\Omega}$ /см. Приложение/. Первый неисчезающий вклад в недиагональные матричные элементы $\hat{\Omega}$ легко подсчитать для произвольного k.

$$\Omega_{0k}=\Omega_{k0}=-\lambda\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{k-1}\frac{\sqrt{k}}{[(k-1)!]^{3/2}}$$

Вычисление с той же точностью диагональных элементов более сложно. С точностью до λ^4

$$\Omega_{00}=\Omega_{kk}=-\frac{\lambda^2}{\gamma}\frac{1}{k-1}-\frac{\lambda^4}{\gamma^3}\frac{1}{(k-1)^3(k-2)}$$

Повидимому, равенство диагональных матричных элементов сохраняется и в высших приближениях. Расщепление квазиуровней происходит, следовательно, лишь в k-том порядке по внешнему полю и

$$\varepsilon_k-\varepsilon_0=2\lambda\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{k-1}\frac{\sqrt{k}}{[(k-1)!]^{3/2}}$$

$$C_k=\pm C_0=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (14)$$

Поправки к двухуровневому приближению определяют степень примешивания других уровней. С точностью до λ/γ

$$C_1=\frac{\lambda}{\gamma}\frac{1}{k-1}C_0$$

$$C_{k-1}=\pm\frac{\lambda}{\gamma}\frac{\sqrt{k}}{k-1}C_0 \qquad C_{k+1}=\mp\frac{\lambda}{\gamma}\frac{1}{\sqrt{k+1}}C_0$$

/за исключением случая $k=2$, когда $C_1=\frac{\lambda}{\gamma}(1\pm\sqrt{2})C_0$ /. В порядке $(\lambda/\gamma)^2$ появляется примесь состояний с $n=2$ и $k\pm2$ и т.д.

Таким образом, в состоянии с определенной квазиэнергией осциллятор с равной в первом приближении вероятностью может находиться на нулевом или k-том уровне. Если же в начальный момент времени осциллятор не был возбужден, то в последующем вероятность возбуждения будет испытывать биения с частотой, равной разности квазиэнергий (14). Через половину периода этих биений он с равной единице вероятностью окажется в k-том возбужденном состоянии. На языке квантовой теории электромагнитного поля возбуждение k-того уровня происходит в результате резонансного поглощения k квантов лазерного поля, а формула (14) определяет среднюю скорость поглощения. Благодаря резонансу эта скорость пропорциональна k-той степени амплитуды, а не интенсивности поля.

Поляризация осциллятора на k-той гармонике не содержит в установившемся режиме малости поля. Например, для $k=2$ и 3

$$d_{\pm2}=e\frac{\gamma_1}{2\sqrt{2}\,\omega_0^3}\quad,\quad d_{\pm3}=e\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\omega_0}}\left(\frac{3\gamma_1^2}{8\omega_0^5}+\frac{\gamma_2}{4\omega_0^3}\right),$$

в то время как вычисления по теории возмущений [28] дают дополнительные множители $\sim(\lambda/\gamma)^2$ в первом и $\sim(\lambda/\gamma)^3$ во втором случаях. Поэтому в резонансе происходит весьма значительное усиление сечения рассеяния с преобразованием частоты $\omega\to k\omega$.

В пределе больших k время возбуждения, как это видно из (14), становится экспоненциально большим. Одновременно быстро падает ширина резонанса. Если $\delta=(k-1+\Delta)\gamma$, где $|\Delta|<1$, то

$$\Omega_{kk}-\Omega_{ии}=\frac{\lambda^2}{\gamma}\frac{k(2k-3)}{(k-1)^2}\Delta$$

и условие резонанса выполняется при

$$|\Delta|\ll 2\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{k-2}\frac{\sqrt{k-1}}{(2k-3)\sqrt{k}}\;\frac{1}{[(k-2)!]^{3/2}}$$

В обратном случае примесь возбужденного уровня становится малой

$$C_k=\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{k-2}\frac{\sqrt{k-1}}{(2k-3)\sqrt{k}}\;\frac{1}{[(k-2)!]^{3/2}}\;\frac{1}{\Delta}\,C.\quad (k>2)$$

IУ. Резонанс высоколежащих уровней

Предположим теперь, что $\delta=2\gamma N$, $N\gg 1$, так что вырождены квазиуровни с $n=N$ и $N+1$, и рассмотрим влияние внешнего поля на уровни, лежащие вблизи N -ного. Если $\lambda\sqrt{N}\gg\gamma$, то число смешивающихся уровней велико. Однако влияние нелинейности, характеризуемое параметром $\gamma N/\omega(N)$, при условии $\gamma N/\omega(N)\gg\lambda\sqrt{N}/\varepsilon_N^{(0)}$ /"умеренная нелинейность"/12/ ограничивает это число малыми по сравнению с N значениями. Рекурсивное соотношение (10) в этом случае упрощается. Изменим нумерацию уровней, сделав в (10) сдвиг $n\to N+n$, так что номер $n=-N,-N+1,\dots,0,1,2,\dots$ будет теперь характеризовать отклонение от фиксированного уровня N. Тогда для $\tilde C_n\equiv C_{N+n}$ получим, пренебрегая под корнем малым n по сравнению с N,

$$\tilde C_{n+1}+\frac{\tilde\varepsilon-\frac14\gamma+\gamma(n-\frac12)^2}{\lambda\sqrt{N}}\tilde C_n+\tilde C_{n-1}=0,\qquad (15)$$

где $\tilde\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_N^{(0)}$. Соотношение (15) совпадает с рекурсивной формулой теории функций Матье/26/, а спектр квазиэнергий $\tilde\varepsilon$ связан со спектром собственных значений этого уравнения. Смысл такого результата становится ясным, если совершить в резонансном гамильтониане (8) преобразование операторов

$$\hat{\hat a}=\frac{\hat n-N+1}{\hat n+1}\left(1+i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\hat n-N+1}}\right)\hat a$$

$$\hat{\hat a}^+=\hat a^+\left(1-i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\hat n-N+1}}\right)\frac{\hat n-N+1}{\hat n+1}$$

Легко убедиться, что операторы $\hat{\hat a}$, $\hat{\hat a}^+$ и $\hat{\hat n}=\hat{\hat a}^+\hat{\hat a}=\hat n-N$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и $\hat a$, $\hat a^+$ и $\hat n$. Вновь введенные операторы следующим образом действуют на состояния:

$$\hat{\hat n}|N+n\rangle=n|N+n\rangle$$

и /при $n\ll N$/

$$\hat{\hat a}|N+n\rangle=i\sqrt{n}\,|N+n-1\rangle$$

$$\hat{\hat a}^+|N+n\rangle=-i\sqrt{n+1}\,|N+n+1\rangle.$$

Обратные преобразования имеют вид

$$\hat a=\left(1-i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}\right)\hat{\hat a}$$

$$\hat a^+=\hat{\hat a}^+\left(1+i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}\right),$$

так что в новых переменных операторная часть гамильтониана (8) равна

$$\hat H_2=-\gamma\hat{\hat n}(\hat{\hat n}-1)+i\lambda\sqrt{N}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}\hat{\hat a}-\hat{\hat a}^+\frac{1}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}\right)$$

Теперь можно пренебречь ограниченностью спектра оператора $\hat{\hat n}$, что делает возможным введение эрмитовского оператора фазы $\hat\varphi$

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}\hat{\hat a}=i\,e^{i\hat\varphi}\qquad \hat{\hat a}^+\frac{1}{\sqrt{\hat{\hat n}+1}}=-i\,e^{-i\hat\varphi}$$

В φ – представлении $\hat{\hat n}=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и /14/

$$\hat H_2=-\gamma\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac12\right)^2+\frac14\gamma-2\lambda\sqrt{N}\cos\varphi$$

Этот оператор с помощью простых переобозначений приводится к оператору уравнения Матье. Гамильтониан (16) описывает ротатор с моментом инерции $-\frac{1}{2\gamma}$ и соответствует "приближению маятника" классической теории[18]. Спектр оператора (16) подробно обсуждается в[29], а его квазиклассическое квантование описано в[12].

У. Гейзенберговские уравнения движения и представление когерентных состояний

Как и в случае линейного осциллятора, полезно ввести состояния, являющиеся собственными векторами оператора $\hat{a}$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

Ясно, что

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (17)$$

и эти состояния имеют те же свойства полноты и то же скалярное произведение, что и когерентные состояния линейного осциллятора. /Состояния (17) были постулятивно введены в[16] при "полуквантовом" рассмотрении нелинейного резонанса/.

Известно[21], что при $\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \equiv I \gg 1$ состояния $|\alpha\rangle$ минимизируют соотношение неопределенностей действие – угол и поэтому с максимально допустимой точностью задают начальное положение осциллятора на фазовой плоскости. Для линейного осциллятора усреднение операторов $\hat{x}(t)$ и $\hat{p}(t)$ по состояниям $|\alpha\rangle$ приводит к классическим выражениям для координаты и импульса в момент времени t. Однако при наличии нелинейности это уже не так, причем наиболее существенной является обусловленная нелинейностью зависимость $\hat{\omega}(\hat{n})$ от оператора $\hat{n}$. Пренебрегая для простоты нелинейными добавками в (3), получим в результате усреднения

$$\langle\alpha|\hat{x}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}}\, e^{-(1-\cos 2\gamma t)I}\cos\Theta$$

$$\langle\alpha|\hat{p}(t)|\alpha\rangle = -\sqrt{2I\omega_0}\, e^{-(1-\cos 2\gamma t)I}\sin\Theta,$$

где

$$\Theta = (\omega_0 - 2\gamma)t - I\sin 2\gamma t - \Theta_0$$

а Θ_0 – фаза величины α.

Влияние нелинейности не сводится, следовательно, к изменению, как в классическом случае, частоты колебаний. Зависящие от I поправки к амплитуде и фазе флюктуируют с частотой 2γ. В обычных единицах $\gamma = \hbar\gamma_{кл}$, откуда видно что лишь в формальном пределе $\hbar \to 0$ флюктуации амплитудных значений исчезают, а в фазе возникает линейная по времени добавка $-2\gamma_{кл}\hbar I t = -2\gamma_{кл} I_{кл} t$. Среднеквадратичные размеры пакета в координатном и импульсном пространствах испытывают аналогичные флюктуации.

Во внешнем поле зависимость операторов от времени описывается в резонансном приближении уравнениями

$$i\frac{d\hat{a}}{dt} = [\hat{a}, \hat{H}_2] = (\delta - 2\gamma\hat{n})\hat{a} - \lambda$$

$$i\frac{d\hat{a}^+}{dt} = [\hat{a}^+, \hat{H}_2] = -\hat{a}^+(\delta - 2\gamma\hat{n}) + \lambda \qquad (18)$$

$$i\frac{d\hat{n}}{dt} = [\hat{n}, \hat{H}_2] = \lambda(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

Усредним эти уравнения по когерентным состояниям (17) и введем функции $a(\alpha^*,\alpha;t) = \langle\alpha|\hat{a}(t)|\alpha\rangle$ и $I(\alpha^*,\alpha;t) = \langle\alpha|\hat{n}(t)|\alpha\rangle$, удовлетворяющие при $t=0$ начальным условиям $a = \alpha = \sqrt{I_0}\,e^{i\theta_0}$, $I = I_0$. Пользуясь полнотой системы когерентных состояний, легко видеть, что

$$\langle\alpha|\hat{n}(t)\hat{a}(t)|\alpha\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2\beta\, \langle\alpha|\hat{n}(t)|\beta\rangle\langle\beta|\hat{a}(t)|\alpha\rangle = I(\alpha^*,\alpha;t)\,\hat{Q}\,a(\alpha^*,\alpha;t),$$

где оператор $\hat{Q} = \exp\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \alpha^*}\right)$ /стрелки указывают направление действия производных/. Следовательно,

$$i\frac{da}{dt} = (\delta - 2\gamma I\hat{Q})a - \lambda \qquad i\frac{da^*}{dt} = -a^*(\delta - 2\gamma\hat{Q}I) + \lambda$$

$$i\frac{dI}{dt} = \lambda(a - a^*) \tag{19}$$

Если в этих уравнениях заменить оператор $\hat{Q}$ единицей, они перейдут в уравнения для медленных переменных классической теории нелинейного резонанса. Ясно, что оператор $\hat{Q}$ описывает квантовые флюктуации медленных переменных. В частности, учет второго члена в разложении $\hat{Q}$ приводит к уравнениям, эквивалентным уравнениям "полуквантовой теории" работы /I6/. Априори можно было бы ожидать, что квантовые поправки малы при достаточно большом I_0. На самом деле допустимость замены оператора $\hat{Q}$ единицей зависит, конечно, от плавности изменения I и a как функций α и α^* или, иными словами, начальных значений I_0 и θ_0. Поэтому учет квантовых флюктуаций может стать существенным даже при $I_0 \gg 1$ в случае начальных данных, лежащих вблизи сепаратрисы, разделяющей области фазового пространства с качественно различным характером изменения медленных переменных. В частности, как было впервые отмечено в работе Шуряка /I2/, учет квантовых эффектов необходим при рассмотрении вопросов устойчивости движения нелинейных систем.

Представляет интерес также другой аспект представления когерентных состояний. Т.к. резонансный гамильтониан не зависит от времени, в коммутаторах в правых частях (18) его можно взять в момент времени $t=0$. Матричные элементы $\langle\alpha|\hat{H}_2(0)|\alpha\rangle = H_2(\alpha^*, \alpha)$ можно тогда вычислить явно, после чего из (18) для любого оператора $\hat{F}(t)$ получим

$$i\frac{\partial}{\partial t}F(\alpha^*,\alpha;t) = \left[H_2\left(\alpha^* + \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \alpha}, \alpha\right) - H_2\left(\alpha^*, \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right)\right]F(\alpha^*,\alpha;t)$$

/Стрелки над операторами дифференцирования здесь означают, что производные следует брать лишь от функции F, игнорируя собственную зависимость H_2 от α и α^* /. В отличие от (19), полученное уравнение линейно относительно неизвестной функции. В частности, в случае гамильтониана (8) его можно свести к

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Big[(\delta + \gamma - 2\gamma I_0)\frac{\partial}{\partial \theta_0} - 2\gamma I_0 \frac{\gamma}{\partial I_0 \partial \theta_0} -$$

$$- 2\lambda\sqrt{I_0}\left(\sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial I_0} + \frac{\cos\theta_0}{2I_0}\frac{\partial}{\partial \theta_0}\right)\Big]F$$

Решение этого уравнения с заданными начальными условиями позволило бы непосредственным образом получить нормальную форму оператора $\hat{F}(t)$. К сожалению, при одновременном действии нелинейности и внешнего поля получение решения сопряжено с большими трудностями.

В заключение приношу искреннюю благодарность С.А. Хейфецу и Э.В. Шуряку за ценные советы и критику.

Приложение

В этом приложении приводятся в справочных целях использованные в тексте формулы теории возмущений в случае вырождения при отсутствии прямых переходов между вырожденными состояниями. В общем случае оператор $\hat{\Omega}$ сдвига уровней под действием возмущения $\hat{V}$ определяется формулой /3I/

$$\hat{\Omega} = \frac{i}{2}\lim_{\varkappa\to 0}\varkappa\lambda\, S_\varkappa^+(+\infty,-\infty)\frac{\partial}{\partial\lambda}S_\varkappa(+\infty,-\infty),$$

где

$$S_\varkappa(+\infty,-\infty) = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{-\varkappa|t|}\hat{V}(t)\right\}$$

Положение возмущенных уровней получается в результате диагонализации оператора $\hat{\Omega}$ в подпространстве вырожденных состояний. Выпишем матричные элементы $\hat{\Omega}$ в исходном базисе. Пусть k нумерует вырожденные, а m – все остальные состояния. Тогда

$$\Omega_{kk'} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} \Omega_{kk'}^{(\nu)}$$

$$\Omega_{kk'}^{(1)} = V_{kk'} , \quad \Omega_{kk'}^{(2)} = \sum_{m} \frac{V_{km} V_{mk'}}{\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_m^{(0)}} ,$$

$$\Omega_{kk'}^{(3)} = \sum_{m,m'} \frac{V_{km} V_{mm'} V_{m'k'}}{(\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_m^{(0)})(\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_{m'}^{(0)})} - \sum_{m,k''} \frac{V_{km} V_{mk''} V_{k''k'}}{(\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_m^{(0)})^2}$$

и т.д.

Поправки к волновым функциям от состояний, не принадлежащих вырожденной группе:

$$C_m = \frac{1}{\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_m^{(0)}} \sum_k B_{mk} C_k , \quad B_{mk} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} B_{mk}^{(\nu)}$$

$$B_{mk}^{(1)} = V_{mk} , \quad B_{mk}^{(2)} = \sum_{m'} \frac{V_{mm'} V_{m'k}}{\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_{m'}^{(0)}} - \frac{1}{\varepsilon_k^{(0)} - \varepsilon_m^{(0)}} \sum_{k'} V_{mk'} V_{k'k}$$

и т.д.

В случае двукратного вырождения /23/

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \frac{1}{2} \left[\Omega_{kk} + \Omega_{00} \pm \sqrt{(\Omega_{kk} - \Omega_{00})^2 + 4|\Omega_{0k}|^2} \right]$$

и

$$C_k = \frac{1}{2\Omega_{0k}} \left[\Omega_{kk} - \Omega_{00} \pm \sqrt{(\Omega_{kk} - \Omega_{00})^2 + 4|\Omega_{0k}|^2} \right]$$

Вероятность перехода из состояния $|0\rangle$ в состояние $|k\rangle$ к моменту времени t равна

$$w_{k0}(t) = \frac{2|\Omega_{0k}|^2}{(\Omega_{kk} - \Omega_{00})^2 + 4|\Omega_{0k}|^2} \left[1 - \cos \sqrt{(\Omega_{kk} - \Omega_{00})^2 + 4|\Omega_{0k}|^2}\, t \right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R.L. Hall, G.C. Pimental. J.Chem.Phys., 38, 1089, 1963.
2. Р.В. Амбарцумян, В.С. Должиков, В.С. Летохов, Е.А. Рябов, Н.В. Чекалин. ЖЭТФ, 69, 72, 1975.
3. Р.В. Амбарцумян, Ю.А. Горохов, В.С. Летохов, Г.Н. Макаров. ЖЭТФ, 69, 1956, 1975.
4. N.R. Isenor, M.C. Richardson. Appl.Phys.Lett., 18, 224, 1971.
5. V.S. Letokhov, E.A. Ryabov, O.A. Tumanov. Optics Comm., 5, 168, 1972.
6. Г.А. Аскарьян. ЖЭТФ, 46, 403, 1964; 48, 666, 1965.
7. Ф.В. Бункин, Р.В. Карапетян, А.М. Прохоров ЖЭТФ, 47, 216, 1965.
8. P.M. Morse. Phys.Rev., 34, 57, 1929.
9. Ф.В. Бункин, И.И. Тугов. ЖЭТФ, 58, 1987, 1970.
10. G.J. Pert. IEEE J.Quantum Electron. QE-9, 435, 1973.
11. В.И. Горчаков, В.Н. Сазонов. ЖЭТФ, 70, 467, 1976.
12. Э.В. Шуряк. ЖЭТФ, 71, 2038, 1976.
13. В.Н. Сазонов, В.Ю. Финкельштейн. ДАН СССР, 231, 78, 1976.
14. G.P. Berman, G.M. Zaslavsky. Phys. Lett., 61A, 295, 1977.
15. В.М. Акулин, С.С. Алимпиев, Н.В. Карлов, Б.Г. Сартаков. ЖЭТФ, 72, 88, 1977.
16. М.В. Кузьмин, В.Н. Сазонов. ЖЭТФ, 73, 422, 1977.
17. В.А. Кравченко, А.С. Простнев. ДАН СССР, 211, 73, 1973.
18. Б.В. Чириков. Нелинейный резонанс. Новосибирск, НГУ, 1-82, 1977.
19. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. "Наука", 1974.
20. L. Susskimd, J. Glogover. Physics, 1, 49, 1964.
21. P. Carruthers, M. Nieto. Rev.Mod.Phys., 40, 411, 1968.
22. M. Gell-Mann, F. Low. Phys.Rev., 84, 350, 1951.
23. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. "Наука", 1974.
24. Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ, 51, 1492, 1966.
25. В.И. Ритус. ЖЭТФ, 51, 1544, 1966.
26. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. "Наука", 1967.
27. Н. Бломберген. Нелинейная оптика. "Мир", 1966.

28. J.A. Armstrong, N. Blombergen, J. Ducuing, P.S. Pershan. Phys.Rev., 127, 1918, 1962.
29. Н.Л. Манаков, Л.П. Рапопорт, А.Г. Файнштейн. ТМФ, 30, 395, 1977.
30. Э.В. Шуряк. Препринт ИЯФ СОАН 76-55, Новосибирск, 1976.
31. В.В. Соколов. ТМФ, 35, 339, 1978.

Работа поступила - 24 мая 1978 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 1.VI-1978 г. МН 07459
Усл. 1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 50.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР