

25^a

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 56

Э.А.Кураев, В.С.Фадин

**ПРОЦЕССЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНА-
МИКИ ВО ВСТРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИ-
ТРОННЫХ ПУЧКАХ НА МАЛЫЕ УГЛЫ**

Новосибирск

1978

Известно [1], что дифференциальные и полные сечения процессов квантовой электродинамики (КЭД) идущих при столкновении высокоэнергетических e^+e^- пучков не падают с ростом энергии пучков, если среди диаграмм Фейнмана, описывающих данный процесс, имеются диаграммы, содержащие в перекрестном канале чисто фотонные состояния. К таким процессам относятся процессы однократного и двойного тормозного излучения, электрообразования электронных и мюонных пар. Некоторые из этих процессов детально обсуждались в литературе — однократное тормозное излучение [2,3], двойное тормозное излучение в разные стороны [4], двухфотонный и тормозной механизмы образования пар e^+e^- , $\mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$, [5,6]. Двойное тормозное излучение в одну сторону, учет тождественности при образовании e^+e^- пар и учет интерференции разных механизмов образования пар рассматривались лишь в главном логарифмическом приближении [6-10] при вычислении энергетических спектров и полных сечений. В настоящей работе мы приводим полностью дифференциальные сечения этих процессов, выраженные в терминах поперечных оси пучка компонент импульсов конечных частиц и их долей энергии. Как отмечалось [11], сечения, выраженные в этих переменных, обладают рядом преимуществ по сравнению с обычным представлением сечений через кинематические инварианты типа квадратов переданных импульсов t , s и т.д.: все сингулярности в сечении выделены явно и не приходится манипулировать с величинами разного порядка. Отмечалось [11], что использование таких переменных более чем на порядок сокращает время расчетов на ЭВМ.

Конечные частицы группируются в две струи (Кинематика, отвечающая образованию "мягких" в с.ц.и. частиц отличается от рассматриваемой здесь "струйной" кинематики и будет рассмотрена более подробно в пункте 5), летящие в конусах $\theta \sim |\vec{k}|^{-1/2}$ вдоль направления импульсов начальных электрона и позитрона в системе их центра инерции (с.ц.и.), где $|\vec{k}|$ — характерная величина поперечной к оси пучка компоненты импульса частицы в струе. Характерная величина поперечных компонент импульсов частиц, приводящая к неубывающему вкладу в полное сечение, имеет порядок масс частиц в струе, однако приводимые нами формулы для дифференциальных сечений являются справедливыми в значительно более широкой области углов вылета конечных частиц θ_i :

$$0 < \theta_i < \sigma, \quad \sigma \ll 1.$$

Точность наших формул определяется отбрасываемыми членами и радиационными поправками:

$$1 + O(\sigma^2, \frac{\alpha}{n} \ln \delta / m_e^2)$$

Отметим, что не рассматриваемые нами диаграммы Фейнмана без чисто фотонных состояний в перекрестном канале приводят к вкладу $\sim m^2/\delta$ в полные сечения по сравнению с рассматриваемыми, также как и интерференция их с диаграммами, содержащими фотоны в t -канале, а следовательно приведут к поправкам $\sim \delta^2$ в дифференциальных сечениях.

1. При описании процессов, идущих при столкновении электрон-позитронных пучков высоких энергий (в с.ц.и. $\Sigma_+ = \Sigma_- = \Sigma \gg m$) удобным оказывается разложить, следуя В.В.Судакову [1], четырехмерные импульсы частиц, участвующих в процессе, на компоненты вдоль 4-импульсов начальных частиц P_1, P_2 и на перпендикулярные им компоненты: $K_i = \beta_i \tilde{P}_1 + \alpha_i \tilde{P}_2 + K_{\perp}^i$, где

$$\tilde{P}_1 = P_1 - \frac{P_2}{2P_1 P_2}, \quad \tilde{P}_2 = P_2 - \frac{P_1}{2P_1 P_2}, \quad K_{\perp}^i P_1 = K_{\perp}^i P_2 = 0, \\ 2P_1 P_2 \approx (P_1 + P_2)^2 = 4s^2, \quad m_e = 1. \quad (I.1)$$

Величины α_i, β_i называются параметрами Судакова, ^(они) тесно связаны, как увидим ниже, с физическими характеристиками процесса. Из определения вектора K_{\perp}^i следует, что он является чисто пространственным вектором в системе центра инерции начальных частиц, расположен в плоскости, перпендикулярной трехмерному импульсу начальных частиц и является т.о. двумерным. Квадрат его (4-мерный) отрицателен $K_{\perp}^i{}^2 = -\vec{K}_i^2$. Далее вектор $\vec{K}_i \equiv K_{\perp}^i$ есть двумерный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси пучков. Если частица с импульсом K_i принадлежит струе летящей вдоль направления \tilde{P}_1 , то компонента её по 4-импульсу P_1 , естественно, порядка P_1 а компонента по P_2 близка к нулю. Судаковский параметр β^i есть при этом просто доля её энергии $0 < \beta_i < 1$. (Сумма долей энергий частиц в данной струе есть единица). Угол, под которым вылетает частица к оси пучка есть $\theta_i \approx |\vec{K}_i|/\beta_i \epsilon$.

Четырехмерные вектора \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 "почти" лежат на световом конусе:

$$\tilde{P}_1^2 = \tilde{P}_2^2 = O(m_e^2/s^2), \quad 2P_1 P_2 = 2\tilde{P}_1 \tilde{P}_2 = 2P_1 \tilde{P}_2 = 2\tilde{P}_1 P_2 = s \gg m_e^2,$$

$$2P_1 \tilde{P}_1 = 2P_2 \tilde{P}_2 = m_e^2.$$

Фазовый объем, соответствующий конечной частице с импульсом

$$K_i, \text{ можно записать в виде:} \\ \frac{d^3 K_i}{2K_{i0}} = d^4 K_i \delta(K_i^2 - m_i^2) \theta(K_{i0}) = \frac{s}{2} d\alpha_i d\beta_i d^2 \vec{K}_i \theta(\beta_i) \theta(1-\beta_i) \delta(3\alpha_i \beta_i - \vec{K}_i^2 - m_i^2). \quad (I.2)$$

Записывая фазовые объемы конечных частиц в виде (I.2), затем проводя интегрирование по параметрам α_i ("чужим" для процессов с образованием струи вдоль \tilde{P}_1) с помощью δ -функций в (I.2) и исключая их затем из матричного элемента, получим дифференциальное сечение процесса в виде распределения по долям энергий частиц в струе и поперечным компонентам их импульсов, или, что то же самое, угловых вылета.

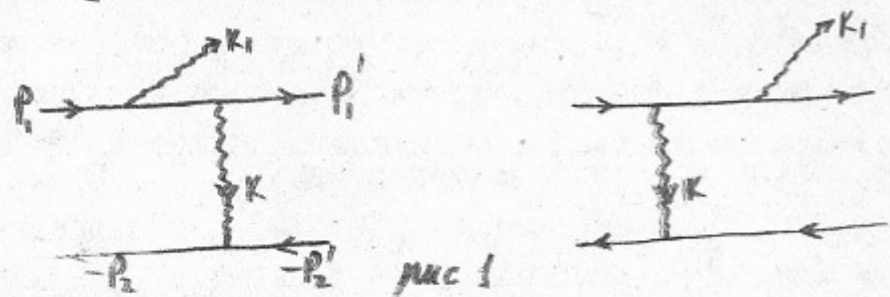
Эта техника, впервые предложенная В.В.Судаковым в 1956, а затем переоткрытая С.Вейнбергом в 1966 г., называется иногда техникой бесконечного импульса.

Структура работы такова: в п.2 мы рассматриваем процесс тормозного излучения при столкновении e^+ и e^- пучков, а также при рассеянии быстрого электрона на тяжелом ядре. Приводим также распределения по углам заряженных частиц и инклюзивное сечение по поперечному импульсу и энергии электрона для $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$. Здесь же рассмотрен процесс двойного тормозного излучения в разные стороны. В п.3 рассмотрен тормозной механизм электророждения электрон-позитронной и μ -онной пары.

В п.4 рассмотрен вклад в сечение электророждения e^+e^- и $\mu^+\mu^-$ пар от зарядово-нечетной интерференции тормозного и двухфотонного механизмов. В п.5 рассмотрен двухфотонный механизм образования $e^+e^- (\mu^+\mu^-)$ пар в кинематике, когда образовавшаяся пара является мягкой и когда она, являясь жесткой, летит вдоль одной из начальных частиц. В п.6 рассмотрены вклады в сечение электророждения e^+e^- пар с учетом тождественности конечных частиц. В п.7 - процесс двойного тормозного излучения в одну сторону. Дифференциальные сечения приведены в п(3-7), насколько нам известно, в таком полном виде в литературе не приводились.

2. Среди ^{диаграмм} фейнмановских, описывающих процесс тормозного излучения $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$, в кинематике, когда фотон летит

вместе с рассеянным электроном вблизи направления начального электрона, а рассеянный позитрон - в направлении, близком к направлению начального, необходимо учесть лишь две, имеющие в канале рассеяния виртуальный фотон, изображенные на рисунке I.



Вклад аннигиляционных диаграмм и их интерференций с приведенными содержит дополнительный подавляющий множитель M_e^2/β (как отмечалось выше). В случае, если конечные частицы летят под углом θ много большим M_e/ϵ , но много меньшим единицы, вклад отброшенных диаграмм составит величину θ^2 по сравнению с единицей. Это, как отмечали, определяет точность нижеследующих распределений. Вклад диаграмм высших порядков теории возмущений (т.в.), содержащих в канале рассеяния обмен одним или двумя виртуальными фотонами, зависит от энергии так же, как и вклад диаграмм, приведенных на рисунке I, но содержит линейный множитель α/π .

Рассмотрим кинематику этого процесса подробнее, поскольку она имеет много общего со всеми одноструйными процессами. Разложим 4-импульс виртуального фотона с помощью переменных Суданова $K = \alpha \tilde{p}_2 + \beta \tilde{p}_1 + K_1$ и выясним физический смысл этих параметров. Из условия реальности рассеянного позитрона находим:

$$p_2'^2 - 1 = (p_2 + K)^2 - 1 = \alpha + 3\beta + 3\alpha\beta - \vec{k}^2 = 0, \quad 3\beta = \frac{\vec{k}^2 - \alpha}{1 + \alpha}$$

Подставляя это выражение в квадрат 4-вектора $K^2 = 3\alpha\beta - \vec{k}^2$ запишем его в виде

$$K^2 = -\frac{1}{1 + \alpha} (\alpha^2 + \vec{k}^2) \quad (2.1)$$

Величина 3α связана с инвариантной массой струи, летящей вдоль \vec{p}_1 :

$$(p_1 - K)^2 = (p_1' + K)^2 = 3_1 = 1 - \beta - 3\alpha(1 + \beta) - \vec{k}^2 \approx 1 - \vec{k}^2 - 3\alpha. \quad (2.2)$$

б.

Из (2.2) и (2.1) видим, что квадрат переданного импульса между заряженными частицами отрицателен, как и должно быть, и ограничен снизу по модулю величиной $\sim (\beta/\alpha)^2 \sim \gamma^{-4}$, $\gamma = M_e/\epsilon$, поскольку инвариантная масса частиц в струе ограничена величинами порядка нескольких масс электрона (в области, дающей главный вклад в сечение).

Из условия реальности тормозного фотона и рассеянного электрона находим

$$K_1^2 = 3\alpha_1\beta_1 - \vec{k}_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3\alpha_1 = \frac{1}{1-x} (\vec{q} - \vec{k})^2$$

$$(p_1 - K_1 - k)^2 - 1 = -\vec{q}^2 - (1-x) - 3x(\alpha_1 + d) = 0 \quad \rightarrow \quad 3(\alpha_1 + d) = -\frac{1}{x} (1-x + \vec{q}^2), \quad (2.3)$$

где $-\vec{q} = -(\vec{K}_1 + \vec{k})$ - поперечный импульс рассеянного электрона, $x = 1 - \beta_1$ - его доля энергии, $0 < x < 1$.

Фазовый объем конечных частиц

$$d\Gamma = \frac{d^3 p_1' d^3 k_1 d^3 p_2'}{2\epsilon_1' 2\omega 2\epsilon_2'} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_1' - p_2' - k_1)$$

с помощью (I.2) перепишем в виде [2]

$$d\Gamma = (2\pi)^{-5} d^4 k d^4 k_1 d^4 p_1' d^4 p_2' \delta(p_1'^2 - 1) \delta(p_2'^2 - 1) \delta(k_1^2 - 1) \delta^{(4)}(p_1 - k - p_1' - k_1) \delta^{(4)}(p_2 + k - p_2')$$

$$= \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 (2\pi)^{-5} d\alpha d\beta d^2 \vec{k} d(\alpha + d) dx d^2 \vec{q} \delta(3\alpha_1(1+x) - (\vec{q} - \vec{k})^2) \cdot \delta(3x(\alpha_1 + d) + 1 - x - \vec{q}^2) \delta(3\beta(1+d) + d - \vec{k}^2).$$

Проводя интегрирование по $\alpha, \beta, \alpha_1 + d$ с помощью δ -функций, преобразуем фазовый объем к виду:

$$d\Gamma = \frac{1}{4\beta} (2\pi)^{-5} \frac{dx d^2 \vec{k} d^2 \vec{q}}{x(1+x)} \quad (2.4)$$

Следующий шаг состоит в нахождении матричного элемента процесса. По правилам Фейнмана из рис. I имеем:

7.

$$M^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma} = \frac{e^3}{k^2} e_\gamma \bar{v}(-p_2) \gamma_\sigma v(-p_2) \cdot \bar{u}(p_1) V_{\gamma\sigma} u(p_1),$$

где

$$V_{\gamma\sigma} = \gamma_\sigma \frac{\hat{p}_1 + 1 - \hat{k}}{(p_1 - k)^2 - 1} \gamma_\sigma + \gamma_\sigma \frac{\hat{p}_1' + 1 + \hat{k}}{(p_1' + k)^2 - 1} \gamma_\sigma,$$

e_γ - вектор поляризации фотона. Просуммированный по спиновым состояниям квадрат матричного элемента $M^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}$ имеет вид

$$\sum_{\text{спин}} |M|^2 = \frac{(4\pi d)^3}{(k^2)^2} (-g_{\lambda\eta}) \text{Sp}(\hat{p}_1' + 1) V_{\lambda\sigma} (\hat{p}_1 + 1) \tilde{V}_{\eta\sigma} \cdot \text{Sp}(-\hat{p}_2 + 1) \gamma_\sigma (-\hat{p}_2' + 1) \gamma_\sigma,$$

где \tilde{V} отличается от V обратным порядком матриц, $-g_{\lambda\eta}$ - поляризационная матрица плотности фотона. Из токового тензора соответствующего позитрону

$$\text{Sp}(-\hat{p}_2 + 1) \gamma_\sigma (-\hat{p}_2' + 1) \gamma_\sigma = 4 [2p_2^\sigma p_2'^\sigma - (p_2 k) g^{\sigma\sigma} + (p_2^\sigma k^\sigma + k^\sigma p_2^\sigma)],$$

первое слагаемое $\sim p_2^\sigma p_2'^\sigma$ дает основной вклад, т.к. оно умножается на соответствующий тензор электрона $\sim p_1^\sigma p_1'^\sigma$ и дает величину $\sim g^2$, в то время, как второе слагаемое даст член $\sim m^4$. Третье слагаемое $\sim k^\sigma, k^\sigma$ вовсе не дает вклада в силу калибровочной инвариантности (сохранения тока) для $V^{\sigma\sigma}$. Это покажем подробнее. Покажем, что $V_{\gamma\sigma} k_1^\sigma = V_{\gamma\sigma} k_2^\sigma = 0$. Это следует из преобразований:

$$-k_1^\sigma V_{\gamma\sigma} = \gamma_\sigma \frac{(\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + 1) [\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - 1 - (\hat{p}_1 - 1)]}{(p_1 - k_1)^2 - 1} + \frac{[(\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - 1) - (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 - 1)] (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + 1)}{(p_1 - k_1)^2 - 1} \gamma_\sigma \equiv$$

$$\equiv - \frac{\gamma_\sigma (\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + 1)}{(p_1 - k_1)^2 - 1} (\hat{p}_1 - 1) + (\hat{p}_1 - 1) \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + 1}{(p_1 - k_1)^2 - 1} \gamma_\sigma.$$

Правая часть этого равенства дает нуль, поскольку стоящие слева и справа от $V_{\gamma\sigma}$ спиноры удовлетворяют уравнению Дирака

$$(\hat{k} - i) u(p_1) = \bar{u}(p_1') (\hat{p}_1' - 1) = 0.$$

Четырехмерный вектор $V_\gamma = p_{2\sigma} V_{\gamma\sigma}$ мы будем далее называть обобщенной вершиной, понимая под этим, что она отвечает не отдельной диаграмме Фейнмана, а их совокупности (рис.1). Отметим, что она удовлетворяет соотношению $V_\gamma k_1^\sigma = 0$. Следующий шаг состоит в построении обобщенной вершины. Для этого сначала преобразуем, пользуясь условием реальности, знаменатели электронных пропагаторов в $V_{\gamma\sigma}$:

$$(p_1 - k)^2 - 1 = -\vec{k}^2 - \beta d = -\vec{k}^2 + \frac{1}{x} (1-x + \vec{q}^2) + \frac{1}{1-x} (\vec{q} - \vec{k})^2 \equiv d/x(x),$$

$$(p_1 - k_1)^2 - 1 = -\vec{k}_1^2 - \beta d_1 x - (1-x) = -(\vec{q} - \vec{k})^2 - (1-x) - \frac{x}{1-x} (\vec{q} - \vec{k})^2 \equiv -d_1/(1-x).$$

Далее, пользуясь тем, что спиноры, соответствующие начальному и конечному электронам, удовлетворяют уравнению Дирака, преобразуем:

$$V_\gamma = \gamma_\sigma \frac{(\hat{p}_1 + 1) - \hat{k}}{(d/x(x))} \hat{p}_2 + \hat{p}_2 \frac{(\hat{p}_1' + 1) + \hat{k}}{(-d_1/(1-x))} \gamma_\sigma = \gamma_\sigma \left[\frac{2p_1 p_2}{d} x(x) - \frac{2p_2 (p_1 - k_1)}{d_1} (1-x) \right] -$$

$$- \gamma_\sigma \hat{k} \hat{p}_2 \frac{x(1-x)}{d} - \hat{p}_2 \hat{k} \gamma_\sigma \frac{(1-x)}{d_1} + (\hat{p}_1' - 1) \frac{\hat{p}_2 \gamma_\sigma}{d_1} (1-x) - \frac{\gamma_\sigma \hat{p}_2}{d} x(1-x) (\hat{p}_1 - 1).$$

Два последние слагаемые в этом выражении нуль, т.к. слева от V_γ стоит спинор $\bar{u}(p_1')$, а справа $u(p_1)$. В результате

$$V_\gamma = - \frac{(1-x)}{d d_1} [\lambda \gamma_\sigma + \alpha \gamma_\sigma \hat{k} \hat{p}_2 + \beta \hat{p}_2 \hat{k} \gamma_\sigma],$$

$$\lambda = 3x(d-d_1), \quad \alpha = x d_1, \quad \beta = d.$$

(2.5)

Дальнейшее вычисление следа при нахождении просуммированного по ^(спин) новым состояниям квадрата модуля матричного элемента

$$\sum_{\text{спин}} |M|^2 = -32 \frac{(4\pi d)^3}{(k^2)^2} g^2 R,$$

$$R = \frac{1}{4g^2} \text{Sp}(\hat{p}_1' + 1) V_\gamma (\hat{p}_1 + 1) \tilde{V}_\gamma$$

(2.6)

с обобщенными вершинами 2.5 не представляет труда, поскольку след в величине R надо вычислить, удерживая лишь члены $\sim g^2$, а 4-импульс k , входящий в V_γ , чисто поперечен.

В результате сечение тормозного излучения вдоль начального электрона

$$d\sigma_1 = \frac{2d^3 d\vec{q}_1 d^2 \vec{k} dx}{\pi^2 (k^2 + d^2)^2} \cdot \frac{(1-x)}{d^2 d_1} [\vec{k}^2 d_1 d_1 (1-x)^2 - 2x(d-d_1)^2],$$

$$\alpha = - \frac{(1-x)^2 + \vec{q}^2}{4\varepsilon^2 x(1-x)}, \quad d = (1-x)^2 + (\vec{q} - \vec{k})^2, \quad d_1 = (1-x)^2 + (\vec{q} - \vec{k})^2, \quad m_e = 1.$$

(2.7)

В случае тормозного излучения на тяжелом ядре \vec{k} есть переданный ядру ^(им) импульс в системе, где оно покоилось, величина же α есть

$$\alpha = - \frac{(1-x)^2 + \vec{q}^2}{2\varepsilon^2 x(1-x)}$$

Дифференциальное сечение тормозного излучения (2.7) удобно как для численного, так и для аналитического интегрирования. Интегрирование по d^2k при фиксированном χ , d^2k_1 даст угловое распределение тормозного излучения вдоль импульса начального электрона [2]

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma} = \frac{2d^3}{\pi} dx d^2k_1 \frac{(1-x)}{c^2} \left\{ 2 \left[1+x^2 - \frac{4x(1-x)^2}{c} + \frac{4x(1-x)^4}{c^2} \right] \ln \left(\frac{\beta x}{1-x} \right) - \right. \\ \left. - (1+x)^2 + \frac{16x(1-x)^2}{c} - \frac{16x(1-x)^4}{c^2} \right\}, \quad \chi = 1 - \frac{w}{\varepsilon}, \quad c = (1-x)^2 + \vec{k}_1^2.$$

Совершенно такой же вид имеет распределение излучения вдоль импульса начального позитрона. Полный спектр тормозного излучения получается интегрированием приведенного выражения по d^2k_1 и удвоением [2]

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}}{dx} = \frac{4d^3}{1-x} \left(\frac{4}{3}x + (1-x)^2 \right) \left(2 \ln \frac{\beta}{m_e^2} + 2 \ln \frac{x}{1-x} - 1 \right), \quad \beta = 4\varepsilon^2.$$

Интегрирование (2.7) по \vec{k} -импульсу, переданному позитрону, дает инклюзивное распределение по доле энергии χ и поперечному импульсу \vec{q} конечного электрона [3]:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}}{dx d^2q} = \frac{4d^3(1-x)}{\pi \alpha^2} \left\{ \left[1+x^2 - \frac{4x(1-x)^2 q^2}{\alpha^2} \right] \left(\ln \frac{\beta}{m_e^2} + \ln x \right) + \frac{x \ln x}{1-x} \left[1+x^2 + \frac{4x^2(3-x)q^2}{\alpha^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{(1+x)^2}{2(1-x)^2} + \frac{8x(1-x+x^2)q^2}{\alpha^2} - \frac{x\alpha(1+x^2 + \frac{4x^2}{\alpha^2})}{(1-x)^2 \sqrt{\alpha(\alpha+4x)}} \ln \frac{x[2(1-x)-\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4x)}]}{2x(1-x) + \alpha + \sqrt{\alpha(\alpha+4x)}} \right\},$$

где $\alpha = (1-x)^2 + q^2$, $m_e = 1$; в случае рассеяния на ядре $\frac{\beta}{m_e^2} \rightarrow \frac{2\varepsilon}{m_e}$. Эта формула упрощается для углов $\theta = q/\varepsilon x \gg \delta^{-1}$ (2.8)

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}}{dx d\theta^2} = \frac{4d^3(1-x^2)}{x^2 \theta^4 \varepsilon^2 (1-x)} \left[(1+x^2) \ln \left(\frac{4\varepsilon^2}{m_e^2} \right) + \ln x - \frac{1}{2}(1+x^2) + x \ln \frac{\theta^2}{4} \right],$$

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}}{dx d\theta^2} = \frac{4d^3(1-x^2)}{x^2 \theta^4 \varepsilon^2 (1-x)} \left[(1+x^2) \left(\ln \left(\frac{2\varepsilon}{m_e} \right) - \frac{1}{2} \right) + \ln x + x \ln \frac{\theta^2}{4} \right]. \quad (2.8a)$$

(2.8b)

Приведем также распределение по углам электрона и позитрона, получающиеся из (2.7) интегрированием по доле энергии χ :

$$\frac{d\sigma}{d\theta_+^2 d\theta_-^2 d\varphi} = \frac{4d^3 [F(\beta, c) + F(\beta^{-1}, c)]}{\pi \beta \theta_+^2 \theta_-^2 (\theta_+^2 + \theta_-^2 + 2\theta_+ \theta_- c)}, \quad \beta = \frac{\theta_+}{\theta_-}, \quad c = \cos \varphi, \quad (2.8b)$$

φ - угол между плоскостями, содержащими ось пучков и каждую из заряженных частиц, $\varphi = (\vec{p}_-, \vec{p}'_+) \wedge (\vec{p}_- \vec{p}'_+)$,

$$F(\beta, c) = \frac{1}{2} + 2\chi + \frac{1}{2}(1+\beta^2 - 2\chi - 4\chi^2) \ln \frac{\beta^2 + 2\chi + 1}{\beta^2} + (1+\chi + 2\chi^2 + 4\chi^3 - \beta^2 - 3\beta^2 \chi) \frac{\text{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{\beta+c} \right)}{\beta \sqrt{1-c^2}},$$

$\chi = \beta c$.

Проведенные вычисления для однократного тормозного излучения позволяют без дополнительных вычислений получить сечение для двойного тормозного излучения в разные стороны [4]. Этот процесс описывается диаграммами рис. 2.

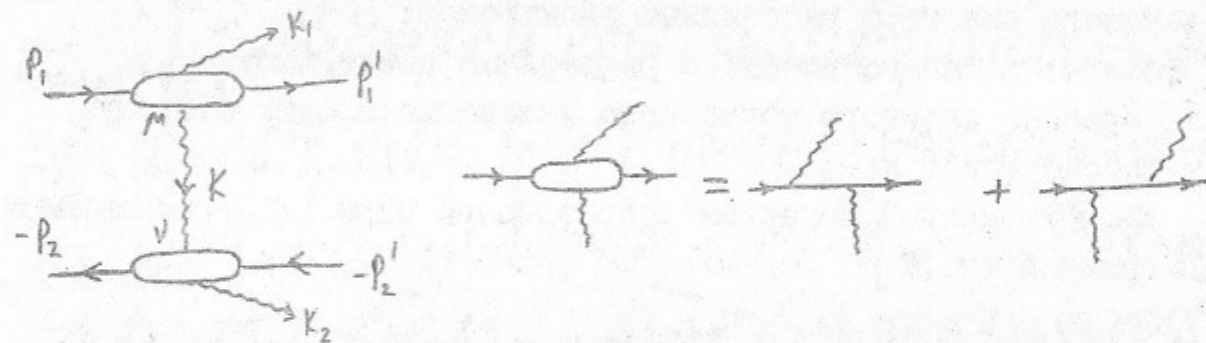


Рис. 2.

Для этого, замечая, что вектора $\frac{1}{2\varepsilon}(p_1+p_2)$ и $\frac{1}{2\varepsilon}(p_1-p_2)$ в с.ц.и. направлены по t и z соответственно, представим поляризационную матрицу плотности виртуального фотона на рис. 2 в виде [1]

$$g^{\mu\nu} = g_1^{\mu\nu} + \frac{1}{4\varepsilon^2} [(p_1+p_2)^\mu (p_1+p_2)^\nu - (p_1-p_2)^\mu (p_1-p_2)^\nu] = g_1^{\mu\nu} + \frac{2p_1^\mu p_2^\nu + 2p_1^\nu p_2^\mu}{\beta} \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что основной вклад будет происходить от свертки тензора, соответствующего электрону и имеющего большую компоненту по p_1 , с 4-импульсом позитрона p_2 и тензора, соответствующего позитрону, с p_1 ; т.е. (см. рис. 2)

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \frac{2p_2^\mu p_1^\nu}{\beta}, \quad (2.10)$$

вклады остальных структур в (2.9) подавлены в $(\beta/m_e^2)^{-1}$ раз по сравнению с (2.10). Следы, возникающие при суммировании по спиновым состояниям квадрата модуля матричного элемента, тождественны таковым для однократного тормозного излучения. В ре-

зультате для сечения имеем:

$$d\sigma = \frac{(4\pi d)^4}{2 \cdot 4 \cdot 3} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \pi^3 \frac{d^2 \vec{q}_1 d^2 \vec{q}_2 d^2 \vec{k}}{\pi^3 (\vec{k}^2)^2} \frac{dx dy}{8^4 x(1-x)y(1-y)} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 R_1 \cdot 3^2 R_2,$$

что можно переписать в виде:

$$\frac{d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma \gamma}}{d^2 \vec{k} d^2 \vec{q}_1 d^2 \vec{q}_2 dx dy} = \frac{\alpha^4 (1-x)(1-y)}{\pi^4 (\vec{k}^2)^2} \frac{[\vec{k}^2 d_1 d_2 (1+x^2) - 2x(d_1 - d_2)^2] [\vec{k}^2 \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 (1+y^2) - 2y(\tilde{d}_1 - \tilde{d}_2)^2]}{d_1^2 d_2^2 \tilde{d}_1^2 \tilde{d}_2^2},$$

$$d_1 = (1-x)^2 + (\vec{q}_1 - \vec{k})^2, d_2 = (1-x)^2 + (\vec{q}_2 - \vec{k})^2, \tilde{d}_1 = (1-y)^2 + (\vec{q}_2 + \vec{k})^2, \tilde{d}_2 = (1-y)^2 + (\vec{q}_1 + \vec{k})^2, m_e = 1. \quad (2.11)$$

Здесь χ , $-\vec{q}_1$ — доля энергии и поперечный импульс рассеянного электрона, угол его вылета к оси пучка (\vec{p}) есть $\theta = |\vec{q}_1|/\chi \varepsilon$

y , $-\vec{q}_2$ — аналогичные величины для рассеянного позитрона; угол его вылета по отношению к направлению начального позитрона $\theta_+ = |\vec{q}_2|/y \varepsilon$;

$(1-x)$, $\vec{q}_1 - \vec{k}$ — доля энергии и поперечный импульс фотона, летящего вместе с рассеянным электроном; $(1-y)$, $\vec{q}_2 + \vec{k}$ — для фотона, летящего вместе с рассеянным позитроном.

Процесс двойного тормозного излучения в одну сторону будет рассмотрен в п.7.

3. "Тормозной механизм" образования пары [5,6] описывается диаграммой рис.3

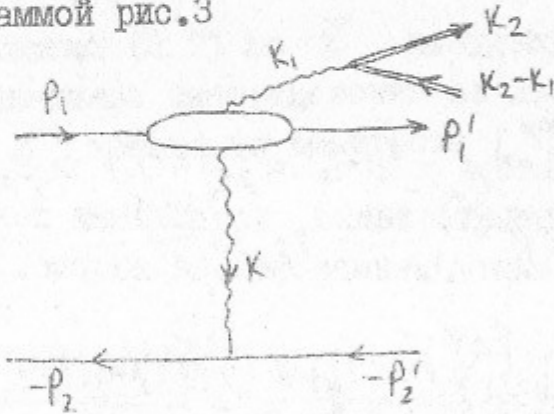


Рис. 3.

Условия реальности конечных частиц $k_2^2 = (k_2 - k_1)^2 = m^2$, $p_1'^2 = p_2'^2 = 1$:

$$\beta(\alpha + \alpha) = -\frac{1}{\chi_1} (1 - \chi_1 + \vec{q}_1^2), \beta d_2 = \frac{1}{\chi_2} (m^2 + \vec{q}_2^2), \beta(\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{1}{\Delta} (m^2 + \vec{q}^2),$$

$$\beta\beta = \frac{1}{1+\alpha} (\vec{k}^2 - \alpha), \Delta = \beta_1 - \beta_2, \chi_1 = 1 - \beta_1, \chi_2 = \beta_2, 0 < \chi_1, \chi_2, \Delta < 1, \quad (3.1)$$

где $\vec{q}_1 = -\vec{p}_1'$, $\vec{q}_2 = -\vec{k}_2$, $\vec{q} = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)_\perp = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}$,
 позволяют записать инварианты задачи в виде

$$(p_1 - k_1)^2 - 1 = -\frac{1}{\chi_2 \Delta} [d_0 - 2\vec{k} \vec{q}_2 \chi_1 \chi_2 + (\vec{k}^2 - 2\vec{k} \vec{q}_1) \chi_2 (1 - \chi_2)] \equiv -d_1 / \chi_2 \Delta,$$

$$(p_1 - k_1)^2 - 1 = \frac{1}{\chi_1 \chi_2 \Delta} [d_0 - 2\chi_1 \chi_2 (\vec{k} \vec{q}_1 + \vec{k} \vec{q}_2) + \vec{k}^2 \chi_1 \chi_2 (1 - \Delta)] \equiv d_2 / \chi_1 \chi_2 \Delta, \quad (3.2)$$

$$d_0 = m^2 \chi_1 (1 - \chi_1) + \chi_2 \Delta (1 - \chi_1) + \vec{q}_1^2 \chi_2 (1 - \chi_2) + \vec{q}_2^2 \chi_1 (1 - \chi_1) + 2\vec{q}_1 \vec{q}_2 \chi_1 \chi_2,$$

$$\chi_1^2 = \frac{1}{\chi_2 \Delta} [m^2 (1 - \chi_1)^2 + \vec{k}^2], \quad 2p_1 k_2 = \frac{1}{\chi_2} [m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2], \quad 2p_1 (p_1 - k_1) = \frac{1}{\chi_1} (1 + \chi_1^2 +$$

$$+ \vec{q}_1^2), \quad 2k_2 (p_1 - k_1) = \frac{1}{\chi_1 \chi_2} [m^2 \chi_1^2 + \chi_2^2 + \vec{p}^2],$$

$$\vec{k} = \chi_2 (\vec{q}_1 - \vec{k}) + (1 - \chi_1) \vec{q}_2, \quad \vec{p} = \chi_1 \vec{q}_2 - \chi_2 \vec{q}_1, \quad \vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k},$$

обобщенная вершина имеет вид:

$$V_g = -\frac{\chi_2 \Delta}{d_1 d_2} [3\chi_1 (d_1 - d_1') \chi_g + d_1 \hat{p}_2 \hat{k} \chi_g + d_1' \chi_1 \chi_g \hat{k} \hat{p}_2]. \quad (3.3)$$

Вычисление следов приводит к дифференциальному сечению:

$$d\sigma_{\text{торм}}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma \gamma} = -\frac{2\alpha^4}{\pi} \frac{d^2 \vec{q}_1 d^2 \vec{q}_2 d^2 \vec{k} dx_1 dx_2}{\pi^3 (\vec{k}^2 + \alpha^2)^2} \frac{\chi_2^3 \Delta^3 R_{\text{торм}}}{\chi_1 d_1^2 d_2^2 [m^2 (1 - \chi_1)^2 + \vec{k}^2]^2}, \quad d = -\frac{d_0}{5\chi_1 \chi_2 \Delta},$$

$$R_{\text{торм}} = \frac{1}{2\chi_2 \Delta} [m^2 (1 - \chi_1)^2 + \vec{k}^2] [\chi_1^2 (d_1 - d_1')^2 (4 - \frac{1}{\chi_1} (1 + \chi_1^2 + \vec{q}_1^2)) + 2\chi_1 (\vec{k} \vec{q}_1) (d_1 - d_1') (d_1 - \chi_1 d_1') -$$

$$- \vec{k}^2 \chi_1 (d_1^2 + \chi_1^2 d_1'^2)] + \chi_1^2 (d_1' - d_1)^2 [m^2 (2 - \frac{1}{\chi_1} (1 + \chi_1^2 + \vec{q}_1^2)) + \frac{1}{\chi_1 \chi_2} (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) (m^2 \chi_1^2 + \chi_2^2 + \vec{p}^2)] -$$

$$- 2\chi_1 d_1 (d_1' - d_1) [m^2 (\vec{k} \vec{q}_1) + \frac{1}{\chi_2} (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) (\vec{k} \vec{p})] - 2\chi_1^2 d_1' (d_1' - d_1) [-m^2 (\vec{k} \vec{q}_1) + \frac{\vec{k} \vec{q}_2}{\chi_1 \chi_2} (\chi_2^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{p}^2)] +$$

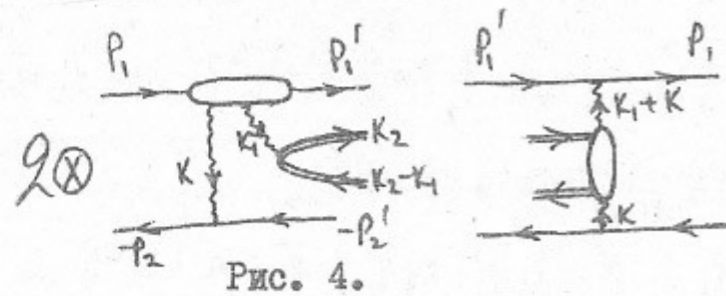
$$+ \vec{k}^2 \chi_1 d_1^2 (\chi_2^2 + \vec{q}_2^2) + \vec{k}^2 \chi_1 d_1'^2 (\chi_2^2 + \vec{p}^2) + \chi_1 d_1 d_1' [-2\vec{k}^2 \chi_2^2 - 4\chi_2 (\vec{k} \vec{q}_1) (\vec{k} \vec{q}_2) + 4\chi_1 (\vec{k} \vec{q}_2)^2 +$$

$$+ 2\chi_2 \vec{k}^2 (\vec{q}_1 \vec{q}_2) - 2\chi_1 \vec{k}^2 \vec{q}_2^2]. \quad (3.4)$$

В этом выражении все обозначения

приведены в (3.2), χ_1 , $-\vec{q}_1$ — доля энергии и поперечный импульс рассеянного электрона, χ_2 , $-\vec{q}_2$ — доля энергии и поперечный импульс отрицательно заряженной частицы (массы m) из образовавшейся пары; $\Delta = 1 - \chi_1 - \chi_2$, \vec{q} — соответствующие величины для положительно заряженной частицы из пары; $1, \vec{k}$ — доля энергии и поперечный импульс позитрона. Выражение (3.4) описывает случай, когда образовавшаяся пара летит вдоль направления движения начального электрона. Такое же выражение справедливо и для случая пары летящей вдоль позитрона с точностью до очевидных замен. Если образовавшаяся пара e^+e^- , то $m = 1$.

4. Рассмотрим вклад в дифференциальное сечение процесса электророзрождения $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma \gamma$ от зарядово-нечетной интерференции тормозного и двухфотонного механизмов образования, представленной на рис.4 [5] :



Условия реальности конечных частиц совпадают с приведенными в (3.1): имеются другие варианты: $(k_2+k)^2 - m^2 = -d'_2/\chi_1 \Delta$, $(k_2-k_1-k)^2 - m^2 = -d_2/\chi_1 \chi_2$, $(k+k_1)^2 = -[(\chi_1)^2 + \vec{q}_1^2]/\chi_1$.
Обобщенная вершина V_{10} соответствующая левому (тормозному) блоку совпадает с приведенной в (3.3), правому же соответствует

$$\tilde{V}_2^{\sigma} = -\frac{\chi_1}{d_2 d'_2} [8\chi_2 \Delta (d_2 - d'_2) \gamma^{\sigma} - d'_2 \chi_2 \hat{p}_2 \hat{k} \gamma^{\sigma} + d_2 \Delta \gamma^{\sigma} \hat{k} \hat{p}_2] \quad (4.1)$$

где $d'_2 = d_0 - 2\vec{k}\vec{q}_1 \chi_1 \chi_2 + (\vec{k}^2 - 2\vec{k}\vec{q}_2) \chi_1 (\chi_1)$, $d_2 = d_0$.

Дальнейшие вычисления следов дают

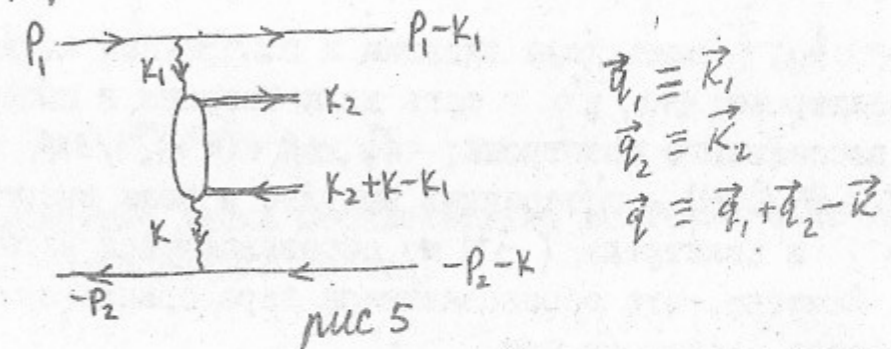
$$d\sigma_{\text{odd}}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- q^+q^-} = \frac{\alpha^4}{\pi} \frac{d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 k dx_1 dx_2 \cdot \chi_1 \chi_2 \Delta R_{\text{odd}}}{\pi^3 [\vec{k}^2 - m^2]^2 [(\chi_1)^2 + \vec{q}_1^2] [m^2 + (\chi_1)^2 + \vec{z}^2]} d_1 d'_1 d_2 d'_2, \quad \beta \alpha = -\frac{d_0}{\chi_1 \chi_2 \Delta},$$

$$R_{\text{odd}} = 2(d_1 - d'_1)(d_2 - d'_2) [8m^2 \chi_1 \chi_2 \Delta + 2\chi_1 (m^2 (\chi_2^2 + \Delta^2) + \vec{z}^2) - 2m^2 \chi_2 \Delta (1 + \chi_1^2 + \vec{q}_1^2) - (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) (\Delta^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{z}_1^2) - (m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2) (\chi_2^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{p}^2)] + 2\chi_1 \Delta d_2 (d_1 - d'_1) \left[\frac{1}{\Delta} (\vec{k}\vec{p}) (m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2) + \frac{\vec{k}\vec{q}_2}{\chi_1 \Delta} (\Delta^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{z}_1^2) - 2\vec{k}\vec{z} \right] - 2\chi_1 \chi_2 d'_2 (d_1 - d'_1) \left[-\frac{\vec{k}\vec{z}_1}{\chi_2} (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) - \frac{\vec{k}\vec{q}}{\chi_1 \chi_2} (\chi_2^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{p}^2) + 2\vec{k}\vec{z} \right] + 2\chi_2 \Delta \cdot d_1 (d_2 - d'_2) \left[\frac{\vec{k}\vec{z}_1}{\chi_2} (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) - \frac{\vec{k}\vec{p}}{\Delta} (m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2) + 2m^2 \vec{k}\vec{q}_1 \right] + 2\chi_1 \chi_2 \Delta d'_1 (d_2 - d'_2) \left[\frac{\vec{k}\vec{q}}{\chi_1 \chi_2} (\chi_2^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{p}^2) - \frac{\vec{k}\vec{q}_2}{\chi_1 \Delta} (\Delta^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{z}_1^2) - 2m^2 \vec{k}\vec{q}_1 \right] + (d_1 + \chi_1 d'_1) (d_2 \Delta - \chi_2 d'_2) \vec{k}^2 [2m^2 \chi_1 - 2\Delta \chi_2 + \frac{\chi_1}{\chi_2 \Delta} (m^2 (\chi_2^2 + \Delta^2) + \vec{z}^2) + \frac{\Delta \chi_2}{\chi_1} (1 + \chi_1^2 + \vec{q}_1^2)] + (d_1 + \chi_1 d'_1) (d_2 \Delta - \chi_2 d'_2) (-4\chi_1) (\vec{k}\vec{q}_1) (\vec{k}\vec{q}_2) - \vec{k}^2 (d_1 d'_2 \chi_2 + \chi_1 \Delta \cdot d_2 d'_1) \left[\frac{\chi_1 \Delta}{\chi_2} (m^2 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2) - \frac{\chi_2}{\chi_1 \Delta} (\Delta^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{z}_1^2) \right] + \vec{k}^2 (d_1 d_2 \Delta + \chi_1 \chi_2 d'_1 d'_2) \left[\frac{\chi_1 \chi_2}{\Delta} (m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2) - \frac{\Delta}{\chi_1 \chi_2} (\chi_2^2 + m^2 \chi_1^2 + \vec{p}^2) \right] + 4\chi_2 (\vec{k}\vec{q}_1) (\vec{k}\vec{q}_2) (d'_1 d_2 \chi_1 \Delta - d_1 d'_2 \chi_2) + 4\Delta (\vec{k}\vec{q}_2) (\vec{k}\vec{q}_1) (d'_2 d'_1 \chi_1 \chi_2 - d_1 d_2 \Delta).$$

Здесь оправдены все замечания, приведенные в конце п.3 и те же обозначения; кроме того $\vec{z}_1 = \chi_1 \vec{q}_1 + \Delta \vec{q}_1$.

Заметим, что величина R_{odd} меняет знак при замене $\chi_2 \leftrightarrow \Delta, \vec{q}_2 \leftrightarrow -\vec{q}$

5. Рассмотрим двухфотонный механизм в процессе $e^+e^- \rightarrow e^+e^- q^+q^-$ [5,6]. Этот механизм описывается диаграммой рис. 5.



Здесь следует отметить, что кинематика, дающая основной вклад в сечение в случае двухфотонного механизма, существенно отличается от рассматриваемой ранее "струйной", хотя и имеет с ней общие черты. Общим является то, что перпендикулярные компоненты импульсов в области основного вклада имеют порядок массы, так же как и инвариантная масса рожденной пары. Однако продольные компоненты импульсов рожденной пары не обязательно велики. Более того, логарифмически большой вклад в сечение дает как раз область "мягких" частиц, т.е. таких, энергия которых в с.ц. и. много меньше энергии сталкивающихся пучков. При этом судакоские параметры α, β для рожденных частиц много меньше 1 и много больше m/β . Удобно отдельно рассматривать область "мягких" рожденных частиц, область, когда рожденные частицы летят в струе вдоль \vec{p}_1 , и область вдоль \vec{p}_2 . Мы будем рассматривать только первые две, т.к. последняя получается из второй заменами.

Условия реальности конечных частиц имеют вид

$$\beta \alpha_1 = -\frac{1}{1-\beta_1} (\beta_1 + \vec{q}_1^2), \quad \beta \alpha_2 = \frac{1}{\beta_2} (m^2 + \vec{q}_2^2), \quad \beta (\alpha_2 + d - d_1) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} (m^2 + \vec{q}_2^2), \quad (5.1)$$

$$\beta \beta = \frac{k^2 - d}{1 + \alpha}, \quad 0 < \beta_1 < 1, \quad \beta_2 > 0, \quad \beta_1 - \beta_2 > 0.$$

Инварианты, необходимые для построения обобщенной вершины:

$$(k_2 - k_1)^2 - m^2 = -d_2/\chi_1 \chi_2, \quad (k_2 + k)^2 - m^2 = -d'_2/\Delta \chi_1. \quad (5.2)$$

Обобщенная вершина:

$$V_{\alpha} = \frac{\chi_1}{d_2 d'_2} [3\Delta \chi_2 (d'_2 - d_2) \gamma^{\sigma} + \chi_2 d'_2 \gamma^{\sigma} \hat{p}_2 \hat{k} - \Delta d_2 \hat{p}_2 \hat{k} \gamma^{\sigma}] \quad (5.3)$$

Сечение в кинематической области, когда образовавшаяся пара в с.п.и. является мягкой, имеет вид

$$d\sigma_{\text{млк}}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-q\bar{q}} = \frac{2\alpha^4}{\pi} \frac{d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2 d^2\vec{k}}{\pi^3} \frac{d\beta_1}{\beta_1} \frac{dx}{(\vec{q}_1^2 + \beta_1^2)(\vec{k}^2 + d^2)} \left\{ \frac{\vec{k}^2 \vec{q}_1^2}{c} - \frac{\chi(1-\chi)}{c^2 c_1} [(\vec{q}_1^2 + 2\vec{q}_1 \vec{q}_2)(\vec{k}^2 - 2\vec{k} \vec{q}_2) + 2\vec{k} \vec{q}_1 (m^2 + \vec{q}_2^2)]^2 \right\}, \beta d = -\frac{c}{\beta \chi(1-\chi)} \quad (5.4)$$

$$\chi = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad 0 < \chi < 1, \quad \beta_1 \ll 1, \quad c = m^2 + \vec{q}_2^2 + \vec{q}_1^2 \chi + 2\vec{q}_1 \vec{q}_2 \chi, \\ c_1 = m^2 + (\vec{q}_2 - \vec{k})^2 + \vec{q}_1^2 \chi + 2\vec{q}_1 (\vec{q}_2 - \vec{k}) \chi.$$

Здесь $\chi_1 = 1 - \beta_1$, $-\vec{q}_1$ есть доля энергии и поперечный импульс рассеянного электрона; $1 + d$, \vec{k} есть доля энергии и поперечный импульс рассеянного позитрона; $-\vec{q}_2$, $\chi\beta_1 + (m^2 + \vec{q}_2^2)/3\chi\beta_1$ и $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}$, $\beta_1(1-\chi) + (m^2 + \vec{q}_2^2)/3\beta_1(1-\chi)$ — поперечный импульс и доля энергии электрона (m^-) и позитрона (m^+) из образовавшейся пары соответственно. Заметим, что образовавшаяся пара принадлежит струе, летящей вдоль электрона при

$$\sqrt{(m^2 + \vec{q}_2^2)/3} \ll \chi\beta_1 < 1, \quad \sqrt{(m^2 + \vec{q}_2^2)/3} \ll \beta_1(1-\chi) < 1 \quad (5.5)$$

$$(m^2/3) < \chi\beta_1 \ll \sqrt{(m^2 + \vec{q}_2^2)/3}, \quad (m^2/3) < (1-\chi)\beta_1 \ll \sqrt{(m^2 + \vec{q}_2^2)/3} \quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь кинематику, когда образовавшаяся пара является жесткой и летит вдоль направления начального электрона:

$\chi_1, 1 - \chi_1 \sim 1$. В этом случае сечение имеет вид:

$$d\sigma_{\text{жесткая}}^{e^+e^- \rightarrow e^+e^-q\bar{q}} = \frac{\alpha^4}{\pi} \frac{d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2 d^2\vec{k}}{\pi^3 (\vec{k}^2 + d^2)^2} \frac{\chi_1^3 dx_1 dx_2}{d_2^2 d_2^2 [(1-\chi_1)^2 + \vec{q}_1^2]^2} \left\{ \frac{1}{\chi_1} [(1-\chi_1)^2 + \vec{q}_1^2] [(d_2' - d_2)^2 (4m^2 \chi_2 \Delta + m^2(\chi_2^2 + \Delta^2) + \vec{\Sigma}^2) + 2(d_2' - d_2)(\chi_2 d_2' + \Delta d_2)(\vec{k} \vec{\Sigma}) + \vec{k}^2 (\chi_2^2 d_2'^2 + \Delta^2 d_2^2)] - \frac{9}{2} (d_2' - d_2)^2 [2m^2 \Delta \chi_2 - (\chi_2^2 + m^2 + \vec{q}_2^2)(m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2) + m^2(\chi_2^2 + \Delta^2) + \vec{\Sigma}^2] - 4(\vec{k} \vec{\Sigma})(d_2' - d_2)(\chi_2 d_2' + \Delta d_2) + 2\vec{k}^2 d_2'^2 (m^2 + \vec{q}_2^2) + 2\vec{k}^2 d_2^2 (m^2 + \vec{q}_2^2) + 4(d_2' - d_2)[d_2'(\vec{k} \vec{q}_1)(\chi_2^2 + m^2 + \vec{q}_2^2) + d_2(\vec{k} \vec{q}_2)(m^2 + \Delta^2 + \vec{q}_2^2)] + 4d_2' d_2 [-m^2 \vec{k}^2 + 2(\vec{k} \vec{q}_1)(\vec{k} \vec{q}_2) - \vec{k}^2(\vec{q}_1 \vec{q}_2)] \right\}. \quad (5.7)$$

Поясним смысл входящих величин: $\chi_1, -\vec{q}_1$ соответствуют рассеянному электрону; $1 + d$, \vec{k} — позитрону; Δ, \vec{q} — m^+ мезону (позитрону) из образовавшейся пары; $\chi_2, -\vec{q}_2$ — m^- мезону (электрону) из пары. Остальные обозначения приведены в п. 3 и п. 4.

6. Учет тождественности при электрообразовании e^+e^- пары [7]: $e^+e^- \rightarrow 2e^+2e^-$ сводится к вычислению вкладов следующих диаграмм для сечения (в кинематике, когда образовавшаяся пара летит по направлению начального электрона)

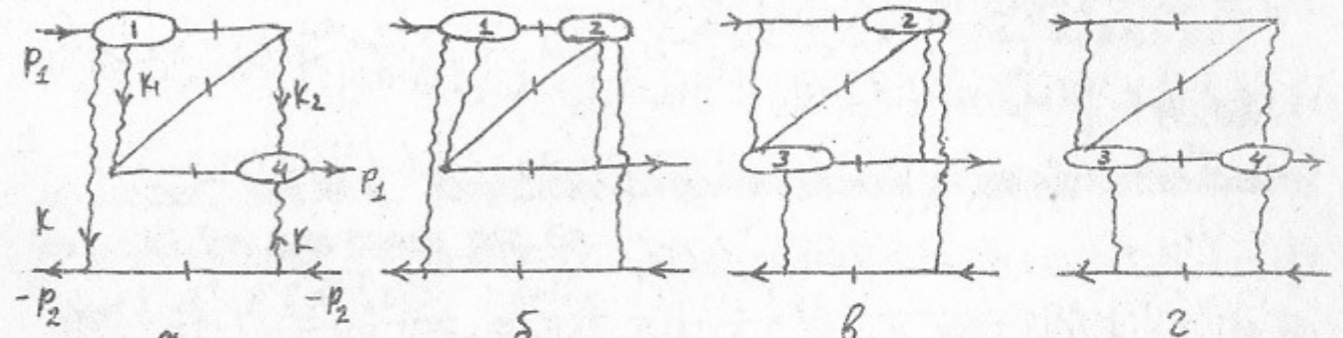


Рис. 6

Здесь перечеркнутые линии соответствуют конечным частицам. Условия реальности конечных частиц

$$\beta(d_1 + d) = -\frac{1}{\chi_1} (1 - \chi_1 + \vec{q}_1^2), \quad \beta(d_1 + d_2 + d) = \frac{1}{\Delta} (1 + \Delta + \vec{q}^2), \quad \beta(d_2 + d) = -\frac{1}{\chi_2} (1 - \chi_2 + \vec{q}_2^2), \quad \beta\beta = \frac{\vec{k}^2 - d}{1 + d}, \quad \Delta = 1 - \chi_1 - \chi_2, \quad 0 < \chi_1, \chi_2, \Delta < 1, \quad (6.1)$$

позволяют выразить кинематические инварианты в виде:

$$(P_1 - k)^2 - 1 = d/\Delta\chi_1\chi_2, \quad (P_1 - k_1)^2 - 1 = -d_1/\Delta\chi_2, \quad (P_1 - k_2)^2 - 1 = -d_2/\Delta\chi_1, \\ 2P_1(P_1 - k_1 - k) = \frac{1}{\chi_1} (1 + \chi_1^2 + \vec{q}_1^2), \quad 2P_1(P_1 - k_2 - k) = \frac{1}{\chi_2} (1 + \chi_2^2 + \vec{q}_2^2), \quad 2P_1(P_1 - k_1 - k_2 - k) = -\frac{1}{\Delta} (1 + \Delta^2 + \vec{q}^2); \\ 2(P_1 - k_1 - k)(P_1 - k_2 - k) = \frac{1}{\chi_1\chi_2} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \vec{p}^2); \quad 2(P_1 - k_1 - k)(P_1 - k_1 - k_2 - k) = -\frac{1}{\Delta\chi_1} (\Delta^2 + \chi_1^2 + \vec{\Sigma}^2), \quad (6.2)$$

$$d = (1 - \chi_1)(1 - \chi_2)(1 - \Delta) + \vec{q}_1^2 \chi_2 (1 - \chi_2) + \vec{q}_2^2 \chi_1 (1 - \chi_1) + \chi_1 \chi_2 (\vec{k}^2 (1 - \Delta) + 2\vec{q}_1 \vec{q}_2 - 2\vec{k}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)), \\ d - d_1 = 2\vec{k} \vec{q}_1 \cdot \chi_2 \Delta - \vec{k}^2 \chi_2 \Delta (1 + \chi_1), \quad d - d_2 = 2\vec{k} \vec{q}_2 \cdot \chi_1 \Delta - \vec{k}^2 \chi_1 \Delta (1 + \chi_2).$$

Построение вершин

$$V_{\sigma}^1 = -\frac{\Delta\chi_2}{dd_1} [3\chi_1(d - d_1)\delta_{\sigma} + \chi_1 d_1 \delta_{\sigma} \hat{k} \hat{P}_2 + d \hat{P}_2 \hat{k} \delta_{\sigma}]$$

$$V_{\rho}^4 = -\frac{\Delta\chi_1}{dd_2} [3\chi_2(d - d_2)\delta_{\rho} + \chi_2 d_2 \hat{P}_2 \hat{k} \delta_{\rho} + d \delta_{\rho} \hat{k} \hat{P}_2]$$

и последующее вычисление следов приводит к следующему вкладу в дифференциальное сечение от диаграммы рис. 6а

$$d\sigma_{14}^{e^+e^- \rightarrow 2e^+2e^-} = \frac{\alpha^4}{2\pi} \frac{d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2 d^2\vec{k}}{\pi^3(\vec{k}^2 + \alpha^2)^2} \frac{dx_1 dx_2 \Delta \cdot R_{14}}{[(1-x_1)^2 + \vec{z}^2][(1-x_2)^2 + \vec{z}^2]}, \quad \alpha = \frac{-d}{3X_1 X_2 \Delta},$$

$$R_{14} = \frac{\Delta^2 X_1 X_2}{d^2 d_1 d_2} \left\{ \frac{2}{\Delta} (d-d_1)(d-d_2) [\vec{q}^2 + \vec{q}^2 (x_1-x_2)^2 + \vec{p}^2 (1+\Delta) + \vec{k}^2 X_1 X_2 \Delta + 4\Delta(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) + (x_1^2 - x_2^2)^2] + \right. \\ \left. + 2X_1 X_2 d_1 (d-d_2) [3(\vec{k}\vec{q}_1)(1-x_2) + (\vec{k}\vec{q}_2)(1+3x_1) - \vec{k}^2(1+x_1-x_2)] + 2X_1 X_2 d_2 (d-d_1) [(\vec{k}\vec{q}_1)(1+3x_2) + 3(\vec{k}\vec{q}_2) - \right. \\ \left. (1-x_1) - \vec{k}^2(1+x_2-x_1)] - 2(\vec{k}\vec{q}) (dd_1 + dd_2 - 2d_1 d_2) (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}^2) + 2X_2 d (d-d_2) [(\vec{k}\vec{q}_1)(1-x_2) + (\vec{k}\vec{q}_2)(3+ \right. \\ \left. + x_1) - \vec{k}^2(2-\Delta)] + 2X_1 d (d-d_1) [(\vec{k}\vec{q}_1)(3+x_2) + (\vec{k}\vec{q}_2)(1-x_1) - \vec{k}^2(2-\Delta)] + \frac{2}{\Delta} (\vec{k}\vec{p}) (1+\Delta^2 + \vec{q}^2) (X_2 d \cdot \right. \\ \left. \cdot (d-d_2) - X_1 d (d-d_1)) + 2X_1 X_2 d_1 d_2 \vec{k}^2 (1-2\Delta + \frac{\Delta}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}^2)) + 2\vec{k}^2 d^2 (-1 - \frac{X_1 X_2}{\Delta} (1+ \right. \\ \left. + \Delta^2 + \vec{q}^2)) + 4d(X_1 d_1 - X_2 d_2) (\vec{k}\vec{p}) (\vec{k}\vec{q}) + 2\vec{k}^2 d d_2 X_2 (X_1 \Delta - X_2 \Delta - X_1 X_2) + \right. \\ \left. + 2\vec{k}^2 d d_1 X_1 (X_2 \Delta - X_1 \Delta - X_1 X_2) + 2\vec{k}^2 (\vec{q}\vec{p}) (X_2 d d_2 - X_1 d d_1) \right\}, \quad (6.3)$$

где $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}$, $\vec{p} = X_1 \vec{q}_2 - X_2 \vec{q}_1$; d, d_1, d_2 определены в (6.2).

Поясним связь входящих в (6.3) величин с наблюдаемыми характеристиками частиц: $X_1, -\vec{q}_1$ и $X_2, -\vec{q}_2$ — доли энергии и поперечные импульсы электронов; Δ, \vec{q} и $1, \vec{k}$ — соответствующие величины для позитронов.

Аналогичное вычисление для диаграмм рис.6б и 6г приводит к вкладу в дифференциальное сечение

$$d\sigma_{12} + d\sigma_{34} = \frac{\alpha^4}{2\pi} \frac{d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2 d^2\vec{k}}{\pi^3(\vec{k}^2 + \alpha^2)^2} \frac{dx_1 dx_2}{X_1 X_2 \Delta} \left\{ \frac{-X_2 \Delta R_{12}}{[(1-x_1)^2 + \vec{z}^2][(1-x_2)^2 + \vec{z}^2]} + \left[\begin{array}{l} \vec{q}_1 \leftrightarrow \vec{q}_2 \\ X_1 \leftrightarrow X_2 \end{array} \right] \right\},$$

$$R_{12} = \frac{X_2 \Delta}{d^2 d_1 d_2} \left\{ 2 \frac{X_1}{X_2} (\tilde{d}-\tilde{d}_1)(\tilde{d}-\tilde{d}_2) [\vec{p}^2 + \vec{p}^2 (1+\Delta) + \vec{q}^2 (x_1-x_2)^2 + \vec{k}^2 X_1 X_2 \Delta + 4\Delta(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) + (x_1^2 - x_2^2)^2] - \right. \\ \left. - 2X_1 \Delta d_1 (\tilde{d}-\tilde{d}_2) [(\vec{k}\vec{q}_1)(1-3x_2) - 3(\vec{k}\vec{q}_2)(1-x_1) + \vec{k}^2(1+x_2-x_1) + \frac{\vec{k}\vec{p}}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}^2)] - 2X_1 \Delta d_2 (\tilde{d}-\tilde{d}_1) [(\vec{k}\vec{q}_1)(1-x_2) + \right. \\ \left. + (\vec{k}\vec{q}_2)(3+x_1) - \vec{k}^2(2-\Delta) + \frac{\vec{k}\vec{p}}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}^2)] + 2X_1^2 \tilde{d} (\tilde{d}-\tilde{d}_2) [(\vec{k}\vec{q}_1)(-3-x_2) - (\vec{k}\vec{q}_2)(1-x_1) + \vec{k}^2(2-\Delta) + \right. \\ \left. + \frac{\vec{k}\vec{q}}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}^2)] - 2X_1^2 \tilde{d} (\tilde{d}-\tilde{d}_1) [3(\vec{k}\vec{q}_1)(1-x_2) + (\vec{k}\vec{q}_2)(1+3x_1) + \vec{k}^2(x_2-1-x_1) - \frac{\vec{k}\vec{q}}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}^2)] + \right. \\ \left. + 2\vec{k}^2 \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \Delta [X_1^2 + 2X_1 X_2 + \frac{X_1 X_2}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}^2)] + 2\vec{k}^2 \tilde{d}^2 X_1^2 [X_1^2 + \frac{\Delta}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}^2)] - 2\tilde{d} \tilde{d}_2 X_1 [\vec{k}^2 (X_2 + \Delta + \right. \\ \left. + \Delta X_2) + 2(\vec{k}\vec{q}) (\vec{k}\vec{p}) - \vec{k}^2 (\vec{q}\vec{p})] + 2X_1 \Delta \tilde{d} \tilde{d}_1 [\vec{k}^2 (\Delta - X_2 - X_2 \Delta) - 2(\vec{k}\vec{q}) (\vec{k}\vec{p}) + \right. \\ \left. + \vec{k}^2 (\vec{q}\vec{p})] \right\}, \quad (6.4)$$

где $\vec{q} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}$, $\vec{p} = X_1 \vec{q}_2 - X_2 \vec{q}_1$ и связь q_i, X_i с характеристиками частиц та же, что и в случае $d\sigma_{14}$; $\alpha = -d/3X_1 X_2 \Delta$,

$$\tilde{d} = (1-x_1)(1-x_2)(1-\Delta) + \vec{q}_1^2 X_1(1-x_1) + (\vec{q}_1 - \vec{k})^2 X_2(1-x_2) + 2\vec{q}_2 (\vec{q}_1 - \vec{k}) X_1 X_2,$$

$$\tilde{d} - \tilde{d}_1 = X_2(1-x_2) (\vec{k}^2 - 2\vec{k}\vec{q}_1) - 2\vec{k}\vec{q}_2 X_1 X_2, \quad \tilde{d} - \tilde{d}_2 = \vec{k}^2 X_2 \Delta (1+x_1) - 2\vec{k}\vec{q}_1 X_2 \Delta.$$

(6.5)

Приведем, наконец, результат расчета вклада в дифференциальное сечение от диаграммы рис.6в.

$$d\sigma_{23} = \frac{\alpha^4}{2\pi} \frac{d^2\vec{q}_1 d^2\vec{q}_2 d^2\vec{k}}{\pi^3(\vec{k}^2 + \alpha^2)^2} \frac{dx_1 dx_2}{X_1 X_2 \Delta} \cdot \frac{X_1 X_2 R_{23}}{[(1-x_1)^2 + \vec{q}_1^2][(1-x_2)^2 + \vec{q}_2^2]}, \quad \alpha = -d'/3X_1 X_2 \Delta,$$

$$R_{23} = \frac{X_1 X_2}{(d')^2 d'_1 d'_2} \left\{ 2\Delta (d'-d'_1)(d'-d'_2) [\vec{p}'^2 + \vec{p}'^2 (1+\Delta) + \vec{q}'^2 (x_1-x_2)^2 + \vec{k}'^2 X_1 X_2 \Delta + 4\Delta(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) + (x_1^2 - x_2^2)^2] + \right. \\ \left. + 2\Delta^2 X_2 d' (d'-d'_1) [-(1+3x_2)(\vec{k}'\vec{q}'_1) - 3(1-x_1)(\vec{k}'\vec{q}'_2) + \vec{k}'^2(1+x_2-x_1) + \frac{\vec{k}'\vec{p}'}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}'^2)] + 2\Delta^2 X_1 d' (d'-d'_2) [-3(1-x_2) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\vec{k}'\vec{q}'_1) - (1+3x_1)(\vec{k}'\vec{q}'_2) + \vec{k}'^2(1+x_1-x_2) - \frac{\vec{k}'\vec{p}'}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}'^2)] - 2\Delta X_1 X_2 d'_2 (d'-d'_1) [-(3+x_2)(\vec{k}'\vec{q}'_1) - (1-x_1)(\vec{k}'\vec{q}'_2) + \right. \\ \left. + \vec{k}'^2(2-\Delta) + \frac{\vec{k}'\vec{q}}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}'^2)] - 2\Delta X_1 X_2 d'_1 (d'-d'_2) [-(1-x_2)(\vec{k}'\vec{q}'_1) - (3+x_1)(\vec{k}'\vec{q}'_2) + \vec{k}'^2(2-\Delta) + \frac{\vec{k}'\vec{q}}{X_1 X_2} \cdot \right. \\ \left. \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}'^2)] + 2\Delta^2 \vec{k}'^2 d'^2 [-\Delta^2 - \frac{X_1 X_2}{\Delta} (1+\Delta^2 + \vec{q}'^2)] + 2\vec{k}'^2 d'_1 d'_2 X_1 X_2 [\Delta^2 - 2\Delta + \frac{\Delta}{X_1 X_2} (x_1^2 + x_2^2 + \vec{p}'^2)] - \right. \\ \left. - 2\Delta X_2 d'_1 d'_2 [\vec{k}'^2 (X_2 - X_1 - X_1 X_2) + 2(\vec{k}'\vec{q}') (\vec{k}'\vec{p}') - \vec{k}'^2 (\vec{q}'\vec{p}')] - 2\Delta X_1 d'_1 d'_2 [\vec{k}'^2 (X_1 - X_2 - X_1 X_2) - \right. \\ \left. - 2(\vec{k}'\vec{q}') (\vec{k}'\vec{p}') + \vec{k}'^2 (\vec{q}'\vec{p}')] \right\} \quad (6.6)$$

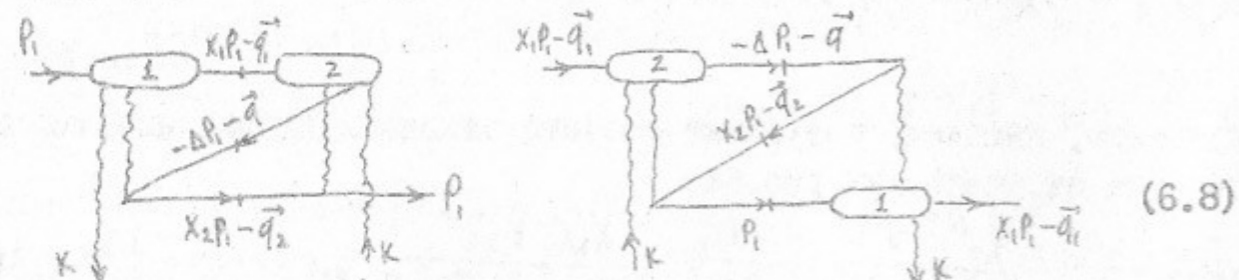
где $\vec{q}' = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}'$, $\vec{p}' = X_1 \vec{q}'_2 - X_2 \vec{q}'_1$; $X_1, -\vec{q}'_1$ и $X_2, -\vec{q}'_2$ — доли энергии и поперечные импульсы электронов, Δ, \vec{q}' и $1, \vec{k}'$ — позитронов,

$$d' = (1-x_1)(1-x_2)(1-\Delta) + \vec{q}'_1^2 X_2(1-x_2) + \vec{q}'_2^2 X_1(1-x_1) + 2\vec{q}'_1 \vec{q}'_2 X_1 X_2,$$

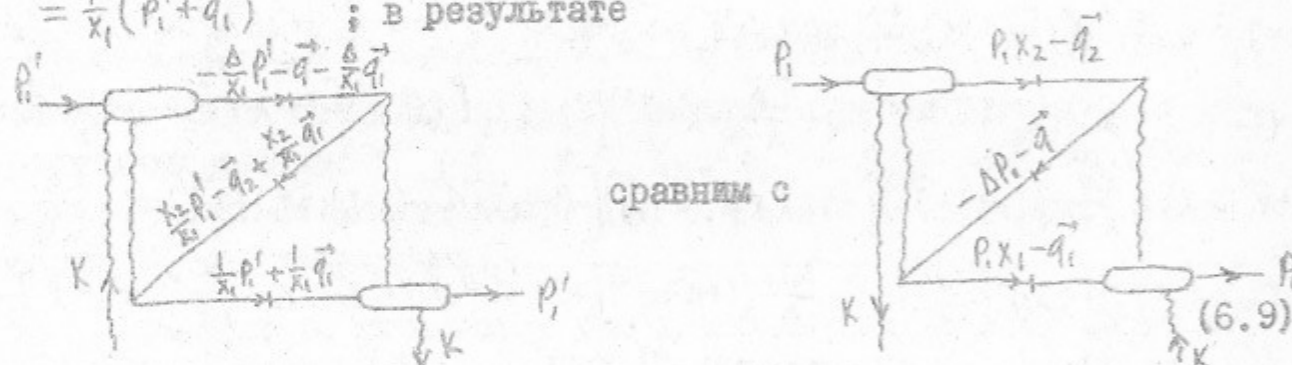
$$d' - d'_1 = 2X_1 X_2 \vec{k}'\vec{q}'_1 + (2\vec{k}'\vec{q}'_2 - \vec{k}'^2) X_1(1-x_1), \quad d' - d'_2 = 2\vec{k}'\vec{q}'_2 X_1 X_2 + (2\vec{k}'\vec{q}'_1 - \vec{k}'^2) X_2(1-x_2). \quad (6.7)$$

В заключение этого пункта заметим, что величины R_{14}, R_{12}, R_{23} связаны между собой в силу "правила подстановки" [8,9]. Эта связь следует из того, что R_i являются следами произведения матриц, могут быть переписаны, пользуясь инвариантностью сле-

да относительно циклических перестановок матриц, в одинаковой форме. Произведем над диаграммой рис.6б следующую графическую операцию: "разорвем" электронную линию, соединяющую блоки I и 2 и перерисуем диаграмму так, чтобы первым по ходу электронной линии был блок 2; Концы электронной линии с импульсом P_1 "сошьем" (при этом R_{12} не меняется, т.к. это след)



Следующий шаг состоит в переобозначении импульсов и сравнении с диаграммой рис.6а. Обозначим $P_1' = x_1 P_1 - q_1$, тогда $P_1 = \frac{1}{x_1}(P_1' + q_1)$; в результате



Из сравнения правой и левой диаграмм (6.9) находим

$$R_{12}(x_1, x_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}, \vec{k}) = x_1^2 R_{14} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow \frac{1}{x_1}, \vec{q}_1 \rightarrow -\frac{1}{x_1} \vec{q}_1, \vec{k} \rightarrow -\vec{k} \\ x_2 \rightarrow -\frac{\Delta}{x_1}, \vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_2 + \frac{\Delta}{x_1} \vec{q}_1 \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

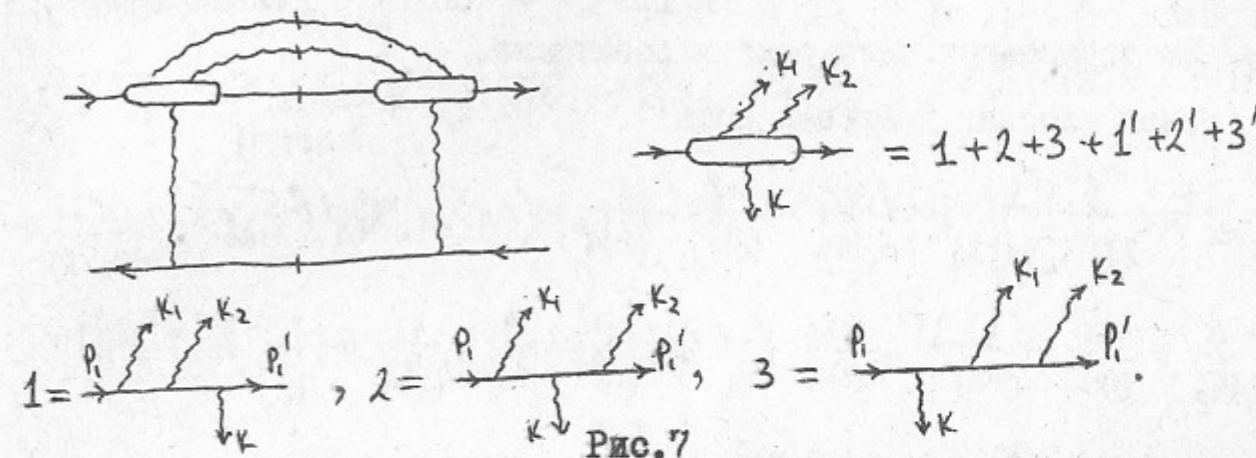
При этой замене $\Delta \rightarrow -\frac{x_2}{x_1} \Delta$, $\vec{q} \rightarrow \vec{q}_2 - \frac{x_2}{x_1} \vec{q}_1$; общий множитель отражает тот факт, что след матриц пропорционален δ^2 , а при замене (6.10) инвариант $\delta \rightarrow \delta x_1$.

Аналогичная процедура может быть проведена и с диаграммой (6.в), в которой необходимо "разорвать" линию, соединяющую блоки 2 и 3 и "сшить" начальную и конечную электронные линии. Перерисовав её затем в виде рис.6а найдем

$$R_{23}(x_1, x_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}, \vec{k}) = \Delta^2 R_{14} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow -\frac{x_2}{\Delta}, \vec{q}_1 \rightarrow \vec{q}_2 + \frac{x_2}{\Delta} \vec{q}, \vec{k} \rightarrow \vec{k} \\ x_2 \rightarrow -\frac{x_1}{\Delta}, \vec{q}_2 \rightarrow \vec{q}_1 + \frac{x_1}{\Delta} \vec{q} \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

Читатель в качестве упражнения может проверить, что результат прямого вычисления R_{12} (6.4) и R_{23} (6.6) удовлетворяет соотношениям (6.10) и (6.11).

7. Рассмотрим процесс двойного тормозного излучения в одну сторону [10]. Мы рассмотрим кинематику, когда фотоны летят в направлении начального электрона. Соответствующая диаграмма Фейнмана для сечения изображена на рис.7



На рис.7 цифрами 1, 2, 3 обозначены диаграммы, получающиеся из I, 2, 3 перестановкой импульсов реальных фотонов. Каждый из наборов I, 2, 3 и I', 2', 3' является калибровочно-инвариантным относительно фотона k , что отражается в обращении в нуль при $\vec{k} = 0$ обобщенной вершины (или же суммы амплитуд I, 2, 3). При возведении модуля матричного элемента в квадрат (или же расшифровки диаграммы для сечения рис.7) возникнет два набора диаграмм: Плоским ~~отвечает~~ отвечает $(1+2+3)(\bar{1}+\bar{2}+\bar{3}) + (1'+2'+3')(\bar{1}'+\bar{2}'+\bar{3}')$. Пример этих диаграмм приведен на рис.8а. Неплоским (рис 8б) отвечает $(1+2+3)(\bar{1}'+\bar{2}'+\bar{3}') + (1'+2'+3')(\bar{1}+\bar{2}+\bar{3})$.

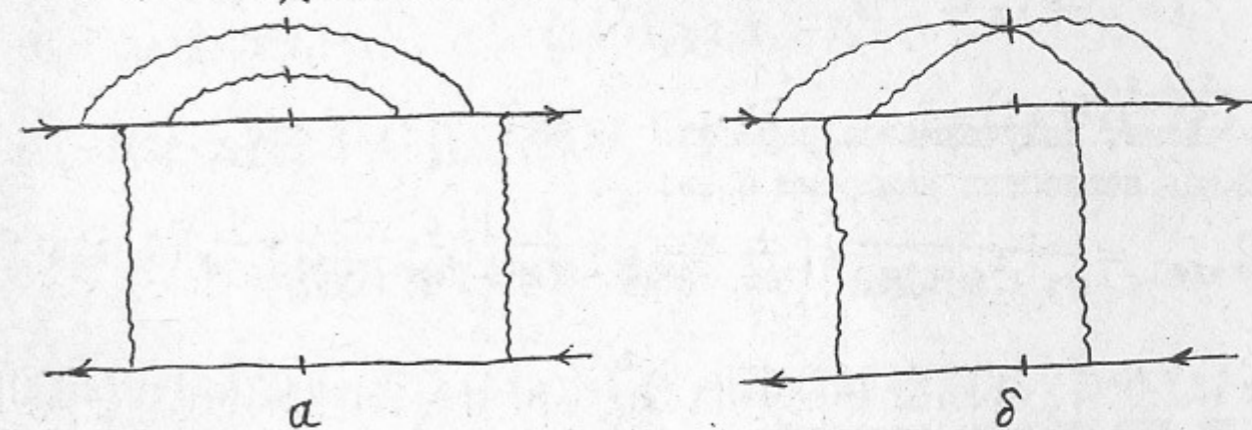


Рис.8

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражение для сечения:

$$d\sigma^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma\gamma} = \frac{\alpha^4}{2! \cdot 2\pi^4} \frac{d^2\vec{k}_1 d^2\vec{k}_2 d^2\vec{k} dx_1 dx_2}{x_1 x_2 \Delta (\vec{k}^2 + \alpha^2)^2} (R_{плоск.} + R_{нелоск.}) \quad (7.1)$$

Множитель $2!$ соответствует учету тождественности фотонов; x_1, \vec{k}_1 и x_2, \vec{k}_2 - доли энергий и поперечные импульсы фотонов; $\Delta = 1 - x_1 - x_2, -\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}$ и I, \vec{k} - соответствующие величины для рассеянных электрона и позитрона.

Вклад плоских диаграмм есть:

$$R_{плоск.} = \frac{1}{2x_1^2 x_2^2 \Delta (1+x_1)^2} \left\{ \left(\frac{\Delta}{(1)d} - \frac{1-x_1}{(1)(2')} + \frac{1}{(2')d'} \right)^2 (\alpha \vec{k}_1^2 + 2x_1^4) (\beta \vec{z}_2^2 + 2x_2^4) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\Delta}{(1)d} - \frac{1-x_1}{(1)(2')} + \frac{1}{(2')d'} \right) \left[-\frac{\Delta x_2}{(1)d} \beta (\vec{k}_2^2) (\alpha \vec{k}_1^2 + 2x_1^4) + \frac{x_1}{(2')d'} \alpha (\vec{k}_1^2) (\beta \vec{z}_2^2 + 2x_2^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4x_1 x_2 \Delta \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) (\Delta \vec{k}_1 \vec{z}_2 - x_1^2 x_2^2) \right] + \frac{x_2^2 \Delta^2}{(1)^2 d'^2} \beta \vec{k}^2 (\alpha \vec{k}_1^2 + 2x_1^4) + \right. \\ \left. + \frac{x_1^2}{(2')^2 d'^2} \alpha \vec{k}^2 (\beta \vec{z}_2^2 + 2x_2^4) - \frac{2x_1 x_2 \Delta}{(1)(2')d'd} \left[\alpha \beta (\vec{k}_1 \vec{k}_2) (\vec{k}_1 \vec{z}_2) + 4x_1 x_2 (2-x_1)(2\Delta+x_2) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (\vec{k}^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) - (\vec{k}_1 \vec{k}_2) (\vec{k}_1 \vec{z}_2)) + 4x_1^2 x_2^2 \Delta \vec{k}^2 \right] + 4x_1^2 x_2^2 \Delta^2 \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2x_1 x_2 \Delta \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) \left(-\frac{4x_2 \Delta^2 (\vec{k}_1 \vec{k}_2)}{(1)d} + \frac{4x_1 \Delta (\vec{k}_1 \vec{z}_2)}{(2')d'} \right) \right\} +$$

+ члены, получающиеся заменой $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2, x_1 \leftrightarrow x_2$.

Вклад неплюских диаграмм есть:

$$R_{нелоск.} = \frac{1}{2x_1^2 x_2^2 \Delta (1+x_1)(1+x_2)} \left\{ \left(\frac{\Delta}{(1)d} - \frac{1-x_1}{(2')(1)} + \frac{1}{(2')d'} \right) \left[\left(\frac{\Delta}{(2)d} - \frac{1-x_2}{(2)(1')} + \frac{1}{(1')d'} \right) (\alpha_3 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2)) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 ((\vec{k}_1 \vec{z}_2) (\vec{z}_2 \vec{z}_2) - (\vec{k}_1 \vec{z}_2) (\vec{k}_2 \vec{z}_1)) + 4x_1^2 x_2^2 ((\vec{k}_1 \vec{z}_2) + \Delta^2 (\vec{z}_2 \vec{z}_2) - (1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) - (1+x_2)^2 (\vec{k}_2 \vec{z}_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4(1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) \right] + \frac{x_1 x_2 \Delta^2}{(1)(2)d'^2} \left[\alpha_3 (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_1 \vec{z}_1) + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 (\vec{k}^2 (\vec{z}_1 \vec{z}_2) - (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2)) + 4x_1^2 x_2^2 \vec{k}^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{8x_1^2 x_2 \Delta}{(2')d'} \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) (1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) \right\} +$$

$$+ 2x_1^4 \alpha_2 (\vec{k}_2 \vec{z}_2) + 2x_2^4 \alpha_1 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) - \frac{2x_1 \Delta}{(2)d} (\alpha_3 (\vec{k}_2 \vec{z}_2) (\vec{k}_1 \vec{z}_1) + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 ((\vec{k}_1 \vec{z}_2) (\vec{k}_2 \vec{z}_2) - (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2))) + \\ + 4x_1^2 x_2^2 (\Delta^2 (\vec{k}_2 \vec{z}_2) - (1+x_2)^2 (\vec{k}_2 \vec{z}_2)) + 2x_2^4 \alpha_1 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) + \frac{2x_2}{(1')d'} (\alpha_3 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2) + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 \cdot \\ \cdot ((\vec{z}_2 \vec{z}_2) (\vec{k}_1 \vec{z}_1) - (\vec{k}_1 \vec{z}_2) (\vec{k}_2 \vec{z}_1)) + 4x_1^2 x_2^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2 - (1+x_2)^2 (\vec{k}_2 \vec{z}_1)) + 2x_1^4 \alpha_2 (\vec{k}_2 \vec{z}_2) + 2x_1 x_2 \Delta \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) \cdot \\ \cdot 4(1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) \right] + \frac{x_1 x_2 \Delta^2}{(1)(2)d'^2} \left[\alpha_3 (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_1 \vec{z}_1) + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 (\vec{k}^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) - (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2)) + 4x_1^2 x_2^2 \cdot \right. \\ \left. \cdot \Delta^2 \vec{k}^2 \right] - \frac{2x_2^2 \Delta}{(1)(1')d'd'} \vec{k}^2 (\alpha_3 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) + 2x_1^4 \alpha_2) - \frac{2x_1 x_2 \Delta^2}{(1)d} \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) \cdot 4(1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) + \\ + \frac{x_1 x_2}{(2')(1')d'^2} \left[\alpha_3 (\vec{k}_1 \vec{z}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2) + 4x_1 x_2 (1+\Delta)^2 (\vec{k}^2 (\vec{z}_1 \vec{z}_2) - (\vec{k}_2 \vec{k}_1) (\vec{k}_2 \vec{z}_2)) + 4x_1^2 x_2^2 \vec{k}^2 \right] + \\ + \frac{8x_1^2 x_2 \Delta}{(2')d'} \left(\frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d} \right) (1+x_1)^2 (\vec{k}_1 \vec{z}_2) \right\} +$$

+ члены, получающиеся заменой $\vec{k}_1 \leftrightarrow \vec{k}_2, x_1 \leftrightarrow x_2$.

Здесь использованы обозначения:

$$(1) = \frac{1}{x_1} (x_1^2 + \vec{k}_1^2), (2) = \frac{1}{x_2} (x_2^2 + \vec{k}_2^2), (1') = \frac{1}{x_1 \Delta} (x_1^2 + \vec{z}_1^2), (2') = \frac{1}{x_2 \Delta} (x_2^2 + \vec{z}_2^2), \\ d' = \frac{1}{x_1 x_2 \Delta} [x_1 x_2 (1+\Delta) + x_1 (1+x_1) \vec{k}_2^2 + x_2 (1+x_2) \vec{k}_1^2 + 2x_1 x_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2 + \vec{k}^2 x_1 x_2 (1+\Delta) + 2\vec{k} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) x_1 x_2], \\ d = \frac{1}{x_1 x_2} [x_1 x_2 (1+\Delta) + x_1 (1+x_1) \vec{k}_2^2 + x_2 (1+x_2) \vec{k}_1^2 + 2x_1 x_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2], \\ \vec{z}_1 = (1-x_2) \vec{k}_1 + x_1 (\vec{k}_2 + \vec{k}), \vec{z}_2 = (1-x_1) \vec{k}_2 + x_2 (\vec{k}_1 + \vec{k}), \alpha = d / 8\Delta, \\ \alpha_1 = (2\Delta + x_1)(2-x_1) - x_1^2, \alpha_2 = (2\Delta + x_2)(2-x_2) - x_2^2, \alpha = (2-x_1)^2 + x_1^2, \\ \alpha_3 = [(2\Delta + x_2)(2-x_2) + x_2^2] [(2\Delta + x_1)(2-x_1) + x_1^2], \beta = (2\Delta + x_2)^2 + x_2^2,$$

$$(1)+(2)+(1')+(2') = d+d' \quad (7.4)$$

Отметим, что $R_{плоск.}$ и $R_{нелоск.}$ обращаются в нуль при малых \vec{k} как $|\vec{k}|^2$. Это легко установить из (7.2)-(7.4), замечая, что при $\vec{k} \rightarrow 0$ обращаются в 0 следующие комбинации

$$\frac{\Delta}{(1)d} - \frac{1-x_1}{(1)(2')} + \frac{1}{(2')d'}, \frac{\Delta}{(2)d} - \frac{1-x_2}{(2)(1')} + \frac{1}{(1')d'}, \frac{1}{d'} - \frac{\Delta}{d}.$$

Авторы благодарны Владимиру Николаевичу Байеру за интерес и прочтение рукописи, Александру Бондарю, проверившему вычисления, связанные с применением закона "подстановки". Один из авторов (Э.А.К.) благодарен участникам теоретического семинара ЛФТИ-ЛИЯФ, плодотворные дискуссии с которыми помогли в формировании точки зрения на физику процессов при больших энергиях, Станиславу Яковлевичу Гузенко, Николаю Петровичу Меренкову.

ЛИТЕРАТУРА

- I. В.Г.Горшков, УФН ИЮ, вып. I, стр.45 (1973).
2. Altarelli G. and Buchella F. *Nuovo Cimento*, 34, 1337, (1964).
В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе, ЖЭТФ, 51, 1135 (1966).
3. Altarelli G. and Stella B. *Nuovo Cimento Letters*, 9, 416, (1974).
4. В.Н.Байер, В.М.Галицкий, Письма ЖЭТФ 2, 259 (1965).
В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе, ЖЭТФ 50, 1611 (1966).
В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин "Излучение релятивистских электронов", Москва, Атомиздат (1973).
5. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, Н.П.Меренков, М.И.Стрикман, ЯФ, 23, 163 (1976).
6. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, ЯФ 16, 1060 (1972).
В.Н.Байер, В.С.Фадин, ЖЭТФ, 61, 476 (1971).
В.М.Буднев, И.Ф.Гинзбург, Г.В.Меледин, В.Г.Сербо. *Phys. Reports* 15, 181.
7. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, М.И.Стрикман, ЯФ 18, 1270, (1973).
8. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, М.И.Стрикман, ЖЭТФ, 66, 838 (1974).
9. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, М.И.Меренков, *Phys. Letters*, 47B, 33, (1973).
10. Э.А.Кураев, Л.Н.Липатов, Н.П.Меренков, В.С.Фадин, В.А.Хозе, ЯФ 19, 331 (1974).
- II. S.J. Brodsky and R. Roskies *Phys. Lett.* 41B p 517 (1972).

Работа поступила - 15 июня 1978 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 26.6.1978г. МН 07 521
Усл. 1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 56

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР