

27

И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 78 - 61

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

О ГЕНЕРАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУ-  
ЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ЦИКЛОТРОННОГО  
РЕЗОНАНСА

Новосибирск

1978

О ГЕНЕРАЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
ВБЛИЗИ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено усиление и генерация электромагнитных волн пучком электронов произвольной энергии, движущихся по винтовой линии в магнитном поле в окрестности циклотронного резонанса. Сформулированы уравнения задачи и в области слабого сигнала найдено их решение. Получен коэффициент усиления и форма спектральной линии. Обсуждается возможность создания генератора СВЧ на электронной системе с рекуперацией.

ON GENERATION OF COHERENT RADIATION  
NEAR CYCLOTRON RESONANCE

V.N. Baier, A.I. Milstein

A b s t r a c t

Consideration is given of amplification and generation of electromagnetic waves by the beam of arbitrary energy electrons traveling along a helical line in a magnetic field in the vicinity of cyclotron resonance. The equations of the problem are formulated and solved. In the weak signal region the gain and the shape of spectrum line are obtained. The possibility to create a VHF generator on the basis of electron system with recuperation is discussed.

В последние годы был достигнут существенный прогресс в генерации когерентного излучения пучком электронов, проходящим через магнитную решетку (лазер на свободных электронах) (1,2). Как показано в работе авторов (3), действие лазера на свободных электронах основано на автомодуляции распределения электронов по фазе в процессе взаимодействия пучка электронов с электромагнитной волной в магнитной решетке. В данной работе мы хотим обратить внимание на то, что аналогичный эффект имеет место при взаимодействии пучка электронов, движущихся по винтовой линии в магнитном поле, с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль магнитного поля, вблизи циклотронного резонанса.

Рассмотрим электрон, движущийся в монохроматической плоской волне, распространяющейся вдоль магнитного поля  $H$ . Тензор электромагнитного поля волны (рассматривается случай циркулярной поляризации) представим в виде:

$$f^{\mu\nu} = \alpha^\mu \dot{a}^\nu - \alpha^\nu \dot{a}^\mu, \quad a = \frac{\vec{e}}{\sqrt{2}} (e e^{i\varphi} - e^* e^{-i\varphi}) \quad (1)$$

где  $\varphi = \frac{\omega x^k}{c} = \frac{\omega}{c} (x^0 - x^3)$ ; введем вектора  $\alpha^\mu = g_0^\mu + g_3^\mu$ ,  $n_1^\mu = g_1^\mu, n_2^\mu = g_2^\mu$ , где  $g^\mu$  - компоненты метрического тензора;  $e, e^*$  - спиральные орты:  $e^\mu = \frac{n_1^\mu + i n_2^\mu}{\sqrt{2}}$ ,  $\dot{a} = \frac{\omega da}{c d\varphi}$  (4).

Как легко показать из уравнений движения (см. напр., (4)), при движении частицы в поле указанной конфигурации сохраняется величина  $\lambda \equiv \alpha u = u^0 - u^3$ , где  $u^\mu$  - 4-скорость частицы. Отсюда  $\varphi = s + \varphi_0$ ,  $s = \frac{\omega \lambda t}{c}$ , где  $t$  - собственное время,  $\varphi_0$  - начальная фаза. Поскольку  $u_\mu^2 = 1$ , то  $u^0 = \frac{\lambda}{2} + \frac{1+u_\perp^2}{2\lambda}$ , так что необходимо решить уравнения только для поперечных компонент вектора 4-скорости  $u_\perp (u^1, u^2)$ . Эти уравнения удобно представить в виде:

$$\frac{d(\epsilon u)}{d\varphi} = -i \frac{\xi}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} - i v (\epsilon u) \quad (2)$$

где  $\xi = \frac{e \vec{e}}{m c^2}$  - параметр интенсивности волны,  $v = \frac{e H}{m \omega \lambda c}$ , в точке  $v = 1$  имеет место циклотронный резонанс. Решение уравнения (2) запишем в форме

$$(\epsilon u) = \left[ \frac{\omega}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^s ds' \xi(s') e^{i\varphi s' - i\varphi_0} \right] e^{-i\gamma s} \quad (3)$$

где  $(\epsilon u)_{s=0} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ ,  $\vartheta = \gamma - 1$ . Здесь мы считали, что параметр интенсивности  $\xi$  является медленной функцией расстояния ( $\xi$  мало изменяется на длине волны). Подставляя (3) в выражение для  $u^0$  имеем

$$u^0 = \gamma + \frac{\omega}{\lambda} \int_0^s \xi(s') \sin(\vartheta s' - \varphi_0) ds' + \frac{1}{2\lambda} \left| \int_0^s \xi(s') e^{i\vartheta s'} ds' \right|^2 \quad (4)$$

где  $u_{s=0}^0 = \gamma$ , напомним, что  $s = \frac{\omega \lambda \tau}{c}$ . Используя этот результат (с учетом того, что  $u^3 = u^0 - \lambda$ ) и закон сохранения энергии можно найти коэффициент усиления электромагнитной волны при взаимодействии с пучком электронов в результате решения самосогласованной задачи.

В дальнейшем мы рассмотрим представляющий в настоящее время наибольший интерес случай, когда изменение импульса, как продольного, так и поперечного, за время взаимодействия электрона с волной много меньше самого импульса, что выражается неравенствами

$$\xi s \ll \omega, \quad \frac{\xi s \omega}{\lambda \gamma v_3} \ll 1 \quad (5)$$

где  $v_3$  — продольная компонента скорости. В этом случае в уравнении для координаты  $x^3$ , получаемом при подстановке (4) в  $u^3 = u^0 - \lambda$ , можно опустить квадратичный по  $\xi$  член, а линейный по  $\xi$  член рассматривать как возмущение. Интеграл этого уравнения при выполнении (5) позволяет определить зависимость набора фаз  $s$  от пройденного продольного расстояния  $x^3$ :

$$s = z - \frac{\omega}{\lambda \gamma v_3} \int_0^z (z-z') \xi(z') \sin(\vartheta z' - \varphi_0) dz' \quad (6)$$

где  $z = \frac{\omega \lambda x^3}{\gamma c v_3}$ . Подставляя выражение (6) в (4) и проводя усреднение по фазе  $\varphi_0$  (это означает, что начальное распределение по фазе было равномерным), имеем

$$\delta u^0 \equiv u_z^0 - \gamma = \frac{1}{\lambda} \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \xi(z') \xi(z'') \cdot \left[ (1-z) \cos \vartheta (z'-z) + z \vartheta (z'-z'') \sin \vartheta (z'-z'') \right] \quad (7)$$

где

$$z = \frac{\omega^2}{2\lambda \gamma v_3} = \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \frac{1+v_3}{2v_3}$$

Подставляя (7) в уравнение баланса энергии

$$\xi^2(z) - \xi^2(0) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} v_3 \delta u^0$$

где  $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{mV}$ ,  $N$  — число электронов в объеме взаимодействия  $V$ , имеем интегральное уравнение для параметра интенсивности. Оно может быть сведено к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Решение последнего имеет вид

$$\mu \equiv \frac{\xi(L)}{\xi(0)} = 1 + \alpha_0 (1-z) \frac{\cos \Lambda_1 - \cos \Lambda_2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} \frac{\alpha_0 (1+z)}{y^2 + \alpha_0 (1+z)} \left[ \frac{\Lambda_2^2 \cos \Lambda_1 - \Lambda_1^2 \cos \Lambda_2}{\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2} + 1 \right] \quad (8)$$

где

$$\Lambda_{1,2}^2 = y^2 + \frac{\alpha_0 (1-z)}{2} \pm \left[ \frac{\alpha_0^2 (1-z)^2}{4} - 2\alpha_0 z y^2 \right]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\alpha_0 = \frac{\omega_p^2 \lambda L^2}{2\gamma^2 c^2 v_3}, \quad y = \vartheta \frac{\omega \lambda L}{\gamma c v_3} \quad (9)$$

здесь  $L$  — длина, на которой происходит взаимодействие электронов с электромагнитной волной. Очевидно, что коэффициент усиления

$$G \equiv \frac{\xi^2(L) - \xi^2(0)}{\xi^2(0)} = \mu^2 - 1 \quad (10)$$

Зависимость  $G$  от  $y$  при фиксированном  $L$  представляет из себя спектральную кривую. На рис. 1 приведены кривые  $G(y)$  для  $L = 200$  см,  $\gamma = 1,2$  (энергия электронов 100 кэВ),  $\frac{N}{V} = 10^{18}$  см<sup>-3</sup> и различных углов  $\vartheta$  между скоростью частицы и направлением магнитного поля ( $\vartheta = 40^\circ$  (1),  $\vartheta = 50^\circ$  (2),  $\vartheta = 60^\circ$  (3)).

Спектральные кривые симметричны относительно оси  $y = 0$ . Видно, что коэффициент усиления сильно зависит от угла влета  $\vartheta$ , однако характер кривых для различных  $\vartheta$  довольно однотипен.

В случае, когда  $x_0 \ll 1$  коэффициент усиления приобретает особенно простой вид

$$G = \frac{\omega_p^2 L^2 \lambda}{\gamma^2 c^2 v_3} R(y) \quad (II)$$

где

$$R(y) = z \frac{\sin y}{y} - (z+1) \frac{1 - \cos y}{y^2}$$

На рис. 2 приведен график функции  $R(y)$  для различных значений  $z$  (кривая 1 -  $z = 1$ , 2 -  $z = 0.5$ , 3 -  $z = 0.1$ ).

Проблема когерентного излучения вблизи циклотронного резонанса многократно обсуждалась в литературе (см. напр. (5,6)). Хорошо известно, что неизохронность орбит электронов, являющаяся проявлением релятивистских эффектов, приводит к появлению автомодуляции по фазе (рассмотрение этого круга вопросов проводилось с использованием разложения по  $v^2/c^2$ ). На этой идее основано действие широкого класса генераторов СВЧ (гиротронов) сантиметрового и миллиметрового диапазонов (см. обзор (7)). Имеется также анализ ультрарелятивистского предела (8,9). Этот предел может быть получен из наших формул, в этом случае  $x_0 \ll 1$  (см. формулу (II)). Если положить здесь также  $z = 1$ , то получившийся результат согласуется с работой (8). Проведенное выше рассмотрение пригодно для любых энергий электронов. Полученный результат показывает, что для релятивистских частиц и больших углов влета возможно получение достаточно большого коэффициента усиления. В последние годы предпринимаются много попыток создания генераторов с использованием релятивистских электронов (см. (10) и цитируемую там литературу). Весьма перспективным здесь является использование электронных систем с рекуперацией. Такого рода система "Эпоха" применена в схеме электронного охлаждения, созданной в Новосибирске (11). Плотность электронов в "Эпохе"  $N/V = 10^8 \text{ см}^{-3}$ , энергия - 100 кэВ, ток 1 а. В магнитном поле  $H = 44 \text{ кЭ}$  при угле влета  $50^\circ + 60^\circ$  резонансная длина волны около 2 мм. Следует иметь в виду, что мы рассматриваем систему с резо-

натором квазиоптического типа. Повидимому в области миллиметровых волн такие системы представляют значительный интерес.

Обсудим теперь требования, которые должна удовлетворять рассматриваемая система. Исходя из спектральной кривой (рис. 1), можно получить следующую оценку на ширину линии

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 3 \frac{\gamma c v_3}{\omega \lambda L}$$

для рассмотренного нами примера в случае  $\vartheta = 60^\circ$ ,  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 2 \cdot 10^{-4}$ . Допустимый разброс скорости оценивается следующим образом

$$\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{(1 - v \cos \vartheta)}{\gamma^2 (v - \cos \vartheta)}$$

Обратим внимание на то, что требование на  $\frac{\Delta v}{v}$  существенно ослабляется, когда  $v \sim \cos \vartheta$ , при выбранной энергии  $\mathcal{E} = 100 \text{ кэВ}$ ,  $\vartheta \approx 56,4^\circ$ , что соответствует как раз углам, при которых имеем большой коэффициент усиления. Допустимый угловой разброс следует из

$$\Delta\vartheta \sim \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{(1 - v \cos \vartheta)}{v \cos \vartheta}$$

В обсуждаемых условиях он составляет  $3 \cdot 10^{-4}$ . Весьма существенным является ограничение, обусловленное сдвигом фазы электрона под действием объемного заряда электронов. Величина этого сдвига фазы  $(\Delta\varphi)_c$  может быть оценена следующим образом

$$(\Delta\varphi)_c \approx \frac{\pi N e^2 R_0^2 L \omega}{\gamma m v_3^3} f\left(\frac{L}{e}\right)$$

где  $e$  - длина прямолинейного участка тока,  $R_0$  - радиус пучка электронов, функция

$$f(z) = 2z - (z+1) \ln(1+z) + (z-1) \ln(1-z),$$

при  $z \ll 1$   $f(z) = z^3/3$ , при  $z = 1$   $f(z) = 2(1 - \ln 2) = 0,61$ . Если принять, что  $L/e = 1/2$ , то в рассматриваемых условиях при  $R_0 = 1 \text{ см}$ ,  $(\Delta\varphi)_c \sim 1$ .

Оценим пороговое значение тока. Для этого используется формула (II), тогда для конфокального резонатора, в котором сечение пучка электромагнитного излучения есть  $e^{\lambda s/4}$  ( $e$  - расстояние между зеркалами,  $\lambda$  - длина волны излучения) имеем

$$\frac{8e^2 H J L^2}{m^2 \gamma^2 v_3^2 e} R > x_{ef}$$

где  $J$  - ток,  $\alpha_{ef}$  - суммарный коэффициент потерь. Если  $\alpha_{ef} \sim 2\%$ , то в описанных выше условиях ( $e/L = 2$ ) имеем  $J > 50$  мА.

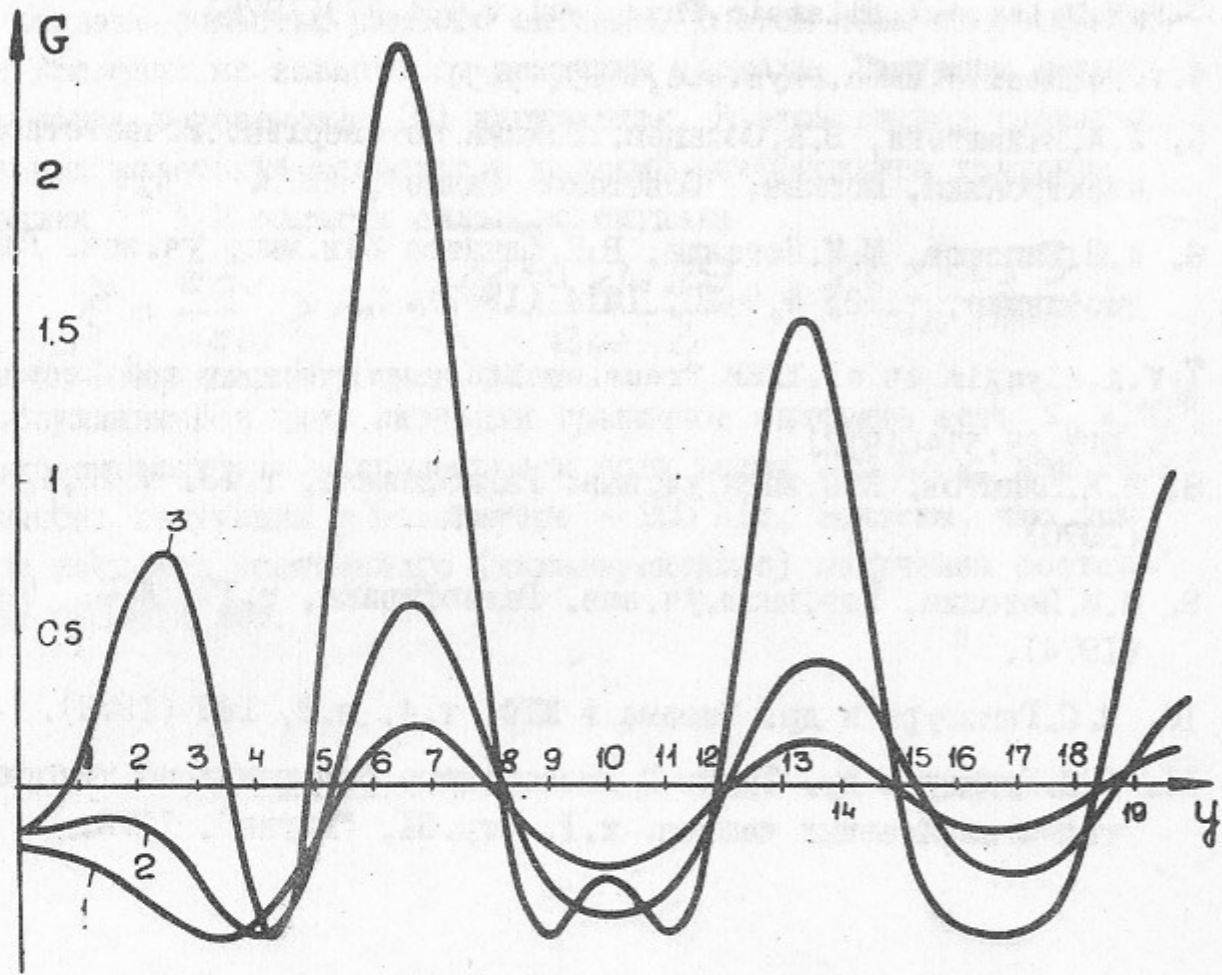
Рассмотренную область значений интенсивности электромагнитного излучения, в которой выполняются неравенства (5), можно назвать областью слабого сигнала. В этой области коэффициент усиления не зависит от величины сигнала. Ситуация меняется, когда неравенства (5) нарушаются. В этом случае развитие фазовых колебаний приводит к падению коэффициента усиления (сравни (3)) в области сильного сигнала

$$\xi = \frac{eE_s}{mc\omega} > \min \left( \frac{\gamma^2 v^2 \sin^2 \theta}{2\omega \lambda L}, \frac{\gamma c v \cos^2 \theta}{\omega L \sin \theta} \right)$$

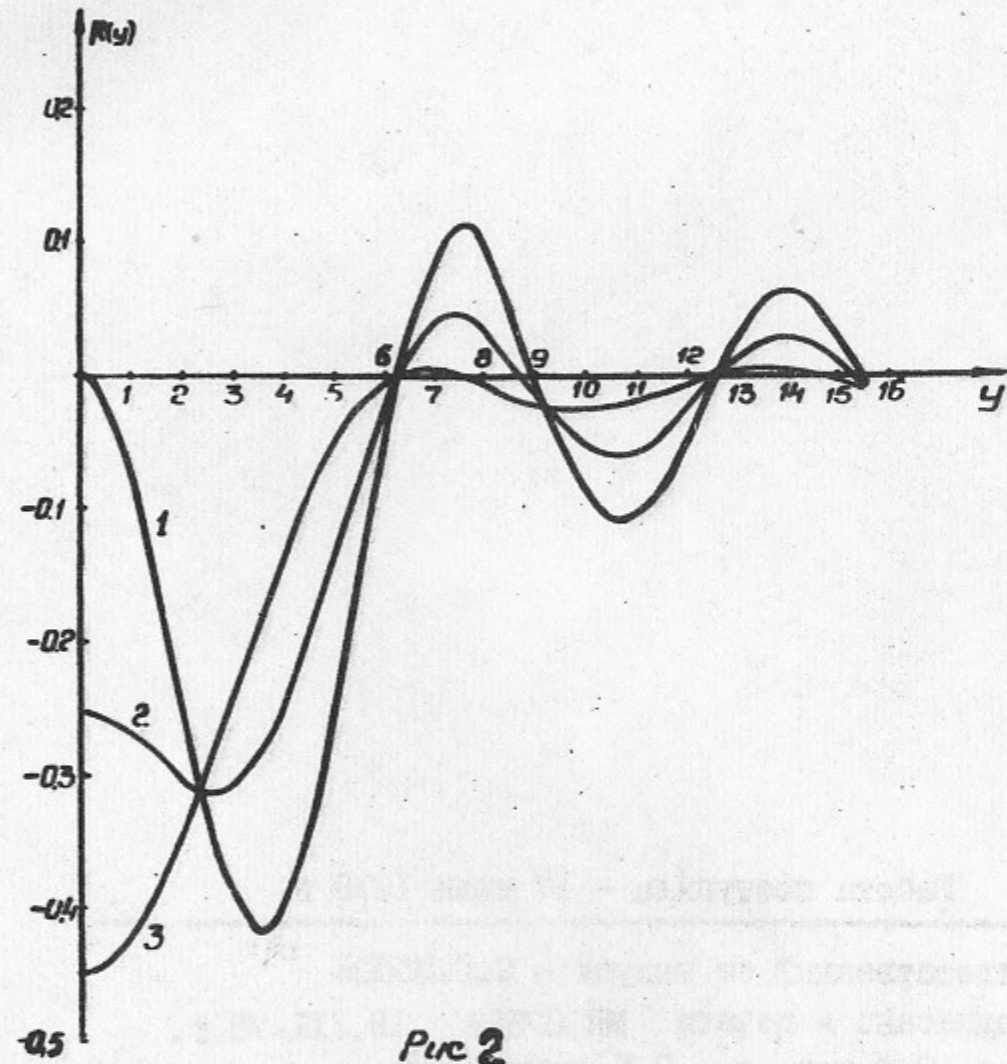
где  $E_s$  - напряженность поля волны. В обсуждавшейся выше ситуации граничное значение есть  $\xi_g = 10^{-4}$ , что соответствует напряженности поля волны 140 В/см, при этом мощность излучения в резонаторе  $\sim 100$  кВт, заметим, что при этом мощность спонтанного (некогерентного) излучения составляет около 2 мВт.

## Л и т е р а т у р а

1. I. R. Elias et al. Phys. Rev. Lett. v. 36, 717 (1976)
2. D. A. Deacon et al. Phys. Rev. Lett. v. 38, 892 (1977)
3. V. N. Baier, A. I. Milstein, Phys. Lett. v. 65A, 319 (1978)
4. P. Redmond. J. Math. Phys. v. 6, 1163 (1965)
5. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев. Лекции по сверхвысокочастотной электронике, Москва, "Советское Радио", 1973.
6. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юпатов Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, т. 10, № 9-10, 1414 (1967).
7. V. A. Flyagin et al. IEEE Trans. on Microwave theory and Techniques v. MTT 25, 514 (1977)
8. В. К. Юпатов. Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, т. 13, № 12, 1784 (1970)
9. М. И. Петелин. Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, т. 17, № 6, 902 (1974).
10. Н. С. Гинзбург и др. Письма в ЖТФ, т. 4, в. 3, 149 (1978).
11. Г. И. Будкер и др. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. т. I, стр. 31, "Наука", 1972.



Puc. 1



Puc. 2

Работа поступила -- 17 июля 1978 г.

---

Ответственный за выпуск -- С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати МН 07588 19.VII-78 г.

Усл. 0,6 печ. л., 0,5 учетно-изд. л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ №61

---

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР