

30

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

Б.В.Чириков

**ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ  
РЕЗОНАНСНОЙ ДИФФУЗИИ  
ЧАСТИЦ В ОТКРЫТОЙ  
МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ**

ПРЕПРИНТ ИЯФ 78 - 67

Новосибирск

ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОЙ ДИФФУЗИИ  
ЧАСТИЦ В ОТКРЫТОЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ

Б. В. Чириков

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена простая модель поперечной диффузии частиц в аксиально несимметричной открытой ловушке, удобная как для аналитического исследования, так и для численного счета. Модель учитывает динамику движения отдельной частицы, а также её многократное рассеяние на неподвижных центрах заданной плотности. На основе однородной модели выяснен механизм резонансной диффузии в различных областях значений параметров и получены простые оценки для скорости диффузии.



## I. ВВЕДЕНИЕ

Устойчивость движения отдельной заряженной частицы в магнитной ловушке определяется резонансами между её колебаниями по трем степеням свободы с частотами  $\omega$  (ларморовское вращение),  $\Omega$  (продольные колебания) и  $\Omega_g$  (дрейфовое вращение). Резонансы приводят к изменению соответствующих переменных действия, или адиабатических инвариантов:  $\mu$  (магнитный момент частицы);  $\mathcal{J}$  (продольный инвариант);  $\Phi$  (угловой момент, или потоковый инвариант). Так как обычно колебания по всем трем степеням свободы являются нелинейными, т.е. их частоты зависят от переменных действия, то отдельный нелинейный резонанс вызывает лишь ограниченные колебания последних (см. например, /1, 13/). Однако взаимодействие нескольких нелинейных резонансов приводит к стохастической неустойчивости /1, 13/ и, как следствие, выходу частиц из ловушки.

Примером такого процесса являются резонансы вида ( $n$  — целое):

$$\omega = n\Omega \quad (I.1)$$

между ларморовским вращением и продольными колебаниями частицы, приводящие к изменению  $\mu$  и  $\mathcal{J}$ . Теория этого процесса рассмотрена в /2/.

Недавно Рютов обратил внимание, что в длинных амбиполярных ловушках, исследованию которых уделяется сейчас значительное внимание /3, 4/, существенную роль играют резонансы между продольными колебаниями и дрейфовым вращением:

$$n\Omega = m\Omega_g \quad (I.2)$$

где  $m$ ,  $n$  — целые числа. Изменение углового момента частицы  $\Phi$  под действием этих резонансов может значительно увеличить радиальные потери частиц. Различные режимы диффузии в этих условиях проанализированы Рютовым и Ступаковым /5-7/ методом кинетического уравнения. В настоящей работе механизм такой резонансной диффузии исследуется с точки зрения динамики отдельных частиц на простой модели, описанной в /8/. Как отмечено в /7/ резонансная диффузия похожа на так называемую "неоклассическую"

диффузию в замкнутых магнитных ловушках, которая была впервые рассмотрена Будкером /9/ и теория которой была развита Пфиршем и Шлютером /10/ для плотной плазмы и Галеевым и Сагдеевым для разреженной плазмы /11/ (см. также /12/).

Продольно-дрейфовые резонансы становятся особенно существенными, когда отношение частот  $\Omega_g / \Omega$ , или "угол прокручивания" /5/ частицы между пробками

$$\Delta\varphi = \pi \frac{\Omega_g}{\Omega} \quad (1.3)$$

становится  $\gg 1$ . Такое необычное соотношение между частотами возможно по двум причинам: во-первых, из-за большой длины ловушки, что приводит к уменьшению  $\Omega$ , в особенности, для частиц с малой продольной скоростью и, во-вторых, из-за появления радиального электрического поля /5/, которое увеличивает  $\Omega_g$ .

Удобной моделью для изучения радиальной динамики частиц в длинных ловушках с аксиально несимметричными пробками\* является отображение вида /5-8/:

$$\tilde{r} = r + a \cdot \sin(2\varphi); \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \Delta\varphi + \frac{\pi}{2} \quad (1.4)$$

где  $r$  - расстояние частицы от оси ловушки, а  $\varphi$  - фаза, или азимутальный угол частицы в пробке (см. рис. I, предполагается также, что длина пробки много меньше длины ловушки). Отображение (1.4) является частным случаем так называемого отображения Пуанкаре для системы с двумя степенями свободы\*\* и описывает изменение состояния частицы в переменных  $r, \varphi$  ( $r, \varphi \rightarrow \tilde{r}, \tilde{\varphi}$ ) за полупериод продольных колебаний  $t_{||}$  (время пролета частицы вдоль ловушки).

Первое из уравнений (1.4) описывает "толчок", или "реакцию" пробки, дрейф в которой и приводит собственно к интересующему нас радиальному смещению частицы. Амплитуда смещения  $a(v, \varphi, r, \theta)$  зависит, вообще говоря, от скорости частицы  $v$ , её ларморовского радиуса  $\varrho$ , расстояния  $r$  и угла

\* Асимметрия пробки необходима для обеспечения гидродинамической устойчивости плазмы.

\*\* Принимается, что полная энергия частицы и её магнитный момент сохраняются.

наклона скорости к магнитной линии  $\theta$ . Само смещение  $(\tilde{r} - r)$  зависит также от фазы  $\varphi$ , динамика которой описывается вторым уравнением (1.4). Угол прокручивания  $\Delta\varphi(\tilde{r}, v, \theta)$  также зависит от скорости, угла  $\theta$  и, что особенно важно, от  $\tilde{r}$ . Именно последняя зависимость делает колебания системы (1.4) нелинейными со всеми вытекающими отсюда последствиями /1, 13/.

Разумеется, конкретный вид отображения (1.4) является весьма специфичным и приближенным. В частности, учитывается только основная азимутальная гармоника возмущения (для остальных амплитуда  $a$  относительно мала, см. /7/), пренебрегается изменением  $\varphi$  в самой пробке и подразумевается определенная конструкция асимметричных пробок: обе пробки идентичны, имеют по две взаимно перпендикулярных плоскости симметрии и повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$  по азимуту. Настолько же повернуты и линии нулевого возмущения радиуса, от которых производится отсчет фазы  $\varphi$  в каждой из пробок (подробнее см. /3-8/, а также рис. I). Тем не менее общая структура отображения (1.4) оказывается весьма типичной для многих задач об устойчивости нелинейных колебаний. Например, изменение магнитного момента частицы в ловушке также описывается отображением вида (1.4) /2/ (другие примеры см. в /13/).

## 2. ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ

Система резонансов отображения (1.4) определяется условием  $\Delta\varphi + \frac{\pi}{2} = \pi m$ , или:

$$\Delta\varphi = \pi \left( m - \frac{1}{2} \right) \quad (2.1)$$

которое, в свою очередь, определяет резонансные значения  $r = r_m(v, \theta)$ . Если  $|\Delta\varphi| \gg 1$ , то расстояние между соседними резонансами малы, и уравнение для  $\varphi$  (1.4) можно линеаризовать по  $r$ :

$$\Delta\varphi(r) \approx \Delta\varphi(r_m) + \Delta\varphi'(r - r_m) \quad (2.2)$$

где штрих означает полную производную по  $r$  ( $\Delta\varphi' \equiv d(\Delta\varphi)/dr$ ).



Вводя новые переменные:

$$\rho = 2(r - r_m) \Delta\varphi'(r_m); \quad \psi = 2\varphi \quad (2.3)$$

и опуская член  $2\Delta\varphi(r_m) + \pi = 2\pi m$ , получим из (1.4):

$$\tilde{\rho} = \rho + K \cdot \sin \psi; \quad \tilde{\psi} = \psi + \tilde{\rho} \quad (2.4)$$

где параметр

$$K = 2a(r_m) \cdot \Delta\varphi'(r_m) \quad (2.5)$$

Систему (2.4) будем называть однородной моделью, так как её резонансы ( $\rho_m = 2\pi m$ ) расположены эквидистантно (по  $\rho$  и, следовательно, по  $r$  (2.3)) в отличие от резонансов (2.1). Можно сказать также, что однородная модель (2.4) описывает локальные (по  $r$  и  $\theta$ ) свойства исходной модели (1.4). Разумеется, такое локальное описание имеет смысл, если резонансов достаточно много, т.е. если  $|\Delta\varphi| \gg 1$ .

Преимуществом однородной модели является её предельная простота, в частности, все её свойства зависят от единственного параметра (2.5). По этой причине отображение (2.4) называется иногда стандартным /2, 13/. Заметим, что оно является каноническим.

Свойства стандартного отображения хорошо известны /13/, в частности, граница устойчивости соответствует

$$K = K_1 \approx 1 \quad (2.6)$$

При  $K < 1$  колебания  $\rho$  строго ограничены ( $|\rho| \lesssim \sqrt{K}$ ), тогда как при  $K > 1$  для некоторых начальных условий) имеет место диффузия по  $\rho$  со скоростью /2, 13/:

$$D_\rho \equiv \frac{\langle (\Delta\rho)^2 \rangle}{N} \approx \frac{(K-1)^2}{2} \rightarrow \frac{K^2}{2} \quad (2.7)$$

где  $N = t/t_{II}$  — число итераций отображения (2.4). Последнее значение в (2.7) соответствует случаю больших  $K \gg 1$ .

Будем называть эту скорость диффузии предельной<sup>\*</sup>). Из первого уравнения (2.4) видно, что в этом случае движение частицы происходит таким образом, что последовательные значения фазы  $\psi$  являются как бы случайными и независимыми (см. раздел 6 ниже).

Применительно к плазменным ловушкам модель (2.4) является, однако, слишком упрощенной, так как она описывает движение лишь отдельной частицы. Следующим шагом был бы учет многократного рассеяния при заданной частоте столкновений  $\nu_s$ . Рассеяние приводит, вообще говоря, к изменению как направления скорости частицы, так и её величины. Ниже мы ограничимся учетом только первого из этих эффектов, т.е. будем считать, что рассеяние происходит на неподвижных центрах. Тогда скорость частицы  $v = \text{const}$ , а

$$\langle (\Delta\theta_s)^2 \rangle = \frac{\nu_s t}{2} (\ll 1) \quad (2.8)$$

Усреднение производится здесь по реализации случайного процесса (фазовое среднее), а множитель 1/2 связан с тем, что нас интересует изменение только полярного угла скорости частицы  $\theta$ .

Ниже мы ограничимся случаем, когда средний квадрат угла рассеяния частицы на одном пролете через ловушку мал, т.е. когда  $\nu_s t_{II} \ll 1$  (разреженная плазма). Обратный предельный случай ( $\nu_s t_{II} \gg 1$ ) соответствует гидродинамическому приближению и является аналогом так называемого режима Пфирша-Шлютера в неоклассической теории диффузии /10/.

Комбинация рассеяния и динамического движения (2.4) всегда приводит к некоторой радиальной диффузии частиц, в том числе, и при  $K \ll 1$ , когда в отсутствие рассеяния радиальные колебания частиц строго ограничены. Более того, оценки полученные в /7/, показывают, что скорость диффузии может достигать предельного значения (2.7) даже при относительно малой частоте столкновений  $\nu_s$  (раздел 6).

<sup>\*</sup>) Отметим, что при  $|\Delta\varphi| \ll 1$  скорость поперечной диффузии в ловушке может превышать предельную /6/. Это связано с тем, что при  $|\Delta\varphi| \rightarrow 0$  резонанс становится линейным, и колебания радиуса частицы вблизи резонанса становятся очень большими.

Для системы (I.4) рассеяние приводит к дополнительному изменению фазы  $\varphi$  за счет зависимости  $\Delta\varphi$  от  $\theta$ . Можно сказать также, что рассеяние смещает резонансы системы (I.4) по радиусу, так как  $r_m = r_m(\theta)$ . В результате при любом  $K \rightarrow 0$  происходит случайное прохождение резонансов, что и приводит к радиальной диффузии (раздел 4).

Эффект рассеяния может быть легко учтен в рамках однородной модели. Для этого в разложение (2.2) нужно добавить слагаемое  $\Delta\theta, \partial(\Delta\varphi)/\partial\theta$ . Введем дополнительную переменную

$$q = 2\Delta\theta, \partial(\Delta\varphi)/\partial\theta \quad (2.9)$$

Её изменение определяется законом многократного рассеяния (2.8) и на периоде отображения (2.4) равно:

$$\langle(\Delta q)^2\rangle = 2\nu_s t_{II} \left[ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial\theta} \right]^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon}; \quad \Delta q = \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.10)$$

Здесь  $\varepsilon$  - новый безразмерный параметр модели, а  $\xi$  - случайная величина со средним значением  $\langle\xi\rangle = 0$  и дисперсией  $\langle\xi^2\rangle = 1$ . С учетом рассеяния в принятом приближении однородная модель описывается теперь отображением  $(q, p, \psi \rightarrow \tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{\psi})$ , где:

$$\tilde{q} = q + \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \tilde{p} = p + K \cdot \sin \psi; \quad \tilde{\psi} = \psi + \tilde{p} + \tilde{q} \quad (2.11)$$

Анализ динамики этой системы и является основной задачей данной работы.

### 3. ОДИН РЕЗОНАНС

При  $K \gg 1$  скорость диффузии системы (2.11), также как и (2.4), является предельной (2.7). Это обеспечивается механизмом перекрытия резонансов /1, 2, 13/, который приводит к стохастизации фазы  $\psi$  независимо от частоты столкновений  $\nu_s$ . С другой стороны, при  $\varepsilon \ll 1$  фаза  $\psi$  стохастизируется за одну итерацию отображения (2.11) вследствие рассеяния, и скорость диффузии будет, следовательно, тоже предельной независимо от  $K$ . Рассмотрим поэтому противоположный случай, когда

$$K \ll 1; \quad \varepsilon \gg 1 \quad (3.1)$$

Если, кроме того,  $|p| \ll 1$  и  $|q| \ll 1$ , то разностные уравнения (2.11) можно приближенно заменить дифференциальными:

$$\frac{dq}{dN} \approx \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \frac{dp}{dN} \approx K \cdot \sin \psi; \quad \frac{d\psi}{dN} \approx p + q \quad (3.2)$$

где  $N$  - число итераций - целочисленное время системы (2.11). Заметим, что "непрерывная" система (3.2) имеет всего один резонанс  $p_1 = -q$  вместо бесконечной системы резонансов

$$p_m = 2\pi m - q \quad (3.3)$$

отображения (2.11). Систему (3.2) можно интерпретировать как маятник под действием случайного возмущения. Отметим, что модель маятника оказывается очень удобной для изучения динамики нелинейного резонанса /13/.

Введем новые переменные

$$Q = \frac{q}{\sqrt{K}}; \quad P = \frac{p}{\sqrt{K}}; \quad n = N\sqrt{K} \quad (3.4)$$

При подстановке их в первое уравнение (3.2) следует учесть, что оно описывает диффузионный процесс, для которого  $dq/dN \sim 1/\sqrt{dN}$ , откуда  $dq/\sqrt{K} dN \approx \xi/\sqrt{\varepsilon\sqrt{K}}$ . В результате получаем вместо (3.2):

$$\frac{dQ}{dn} \approx \frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad \frac{dP}{dn} \approx \sin \psi; \quad \frac{d\psi}{dn} \approx P + Q \quad (3.5)$$

В отличие от (2.11) динамика этой системы определяется единственным параметром

$$S = \varepsilon \cdot K^{3/2} \quad (3.6)$$

который описывает, таким образом, некоторую масштабную инвариантность движения в случае одного резонанса.

Параметр  $S$  характеризует соотношение динамического и статистического возмущений в системе (2.11), считая невозмущенным движение с  $K=1/\varepsilon=0$ . Его физический смысл может быть пояснен следующим образом. Динамическое возмущение определяется членом  $K \cdot \sin \psi$  (2.11). Его действие максимально в резонансе



нансе ( $|p+q| \lesssim \sqrt{K}$ ), где колебания  $\Delta p \sim \sqrt{K}$  (см. ниже, раздел 4). Статистическое возмущение (рассеяние) смещает резонанс ( $p_1 = -q$ ), который "диффундирует" со скоростью  $\langle (\Delta p_1)^2 \rangle = \langle (\Delta q)^2 \rangle = 1/\tau$  на одну итерацию. Число итераций, за которое резонанс продиффундирует на свою ширину ( $\sim \sqrt{K}$ ), равно  $\tau_s \sim \tau K$ . С другой стороны, период динамического движения в резонансе (период фазовых колебаний)  $\tau_d \sim 1/\sqrt{K}$  (раздел 4). Отсюда  $S \sim \tau_s / \tau_d$ . При  $S \gg 1$  основным является динамическое возмущение, а при  $S \ll 1$  - рассеяние.

#### 4. БУДКЕРОВСКАЯ ДИФфуЗИЯ ( $S \gg 1$ ): РЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТИЦЫ

При  $\tau_s \gg \tau_d$  форма орбиты частицы определяется приближенно чисто динамическими уравнениями (2.4), рассеяние же вызывает лишь медленную эволюцию орбиты. Увеличение диффузии по сравнению с "классической" связано с тем, что радиальный размер орбиты вообще говоря значительно превышает ларморовский радиус частицы. Именно на это важное обстоятельство и было впервые указано Будкером еще в 1951 году (опубликовано в /9/). Поэтому мы будем называть этот режим диффузии Будкеровским.

Рассмотрим вначале динамику резонансных частиц, т.е. частиц, орбиты которых лежат внутри сепаратрисы резонанса системы (3.2)  $p_1 = -q$  (рис.2). Другое название - захваченные (в резонанс), или запертые частицы. Продолжая аналогию с маятником, о которой упоминалось выше (раздел 3), можно сказать, что движение резонансных частиц соответствует колебаниям маятника, а нерезонансных - его вращению (раздел 5). Уравнение сепаратрисы

$$p_{sx} = -q \pm 2\sqrt{K} \sin \frac{\psi}{2} \quad (4.1)$$

получается непосредственно из гамильтониана системы (3.2):

$$H(p, \psi) = \frac{(p+q)^2}{2} + K(1 + \cos \psi) \approx const \quad (4.2)$$

при  $H = 2K$  в пренебрежении рассеянием ( $q = const$ ).

Основной особенностью движения резонансных частиц, существенной для рассматриваемой задачи, является то, что их средний

(по времени) импульс  $\bar{p} = -q$ . Если  $q$  медленно изменяется с течением времени, то это равенство приближенно сохраняется, т.е. частица следует за резонансом. Такой процесс хорошо известен в теории современных больших ускорителей и является основой их работы. Это - знаменитая автофазировка Векслера-Мак-Миллана. В нашем случае  $q$  изменяется вследствие рассеяния случайно, и резонанс "диффундирует" по  $p$ . В результате за достаточно большое время  $\Delta p \approx \Delta \bar{p} \approx -\Delta q$ , и скорость диффузии резонансных частиц:

$$D_p^{(r)} = \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{N} \approx \frac{\langle (\Delta q)^2 \rangle}{N} = \frac{1}{\tau} \quad (4.3)$$

Но частица не остается все время внутри резонанса (внутри его сепаратрисы), а под действием рассеяния будет время от времени выходить из резонанса и, наоборот, захватываться в резонанс. Вернемся теперь к отображению (2.II), которое имеет однородную систему резонансов (3.3). В силу эргодичности движения, которая обеспечивается случайным процессом рассеяния, доля времени  $\varepsilon_N$ , проводимая частицей внутри резонанса, равна доле площади  $\varepsilon_F$  фазовой плоскости системы (2.II), ограниченной сепаратрисами резонансов. На языке теории вероятностей это утверждение носит название закона больших чисел. Так как расстояние между резонансами по  $p$  равно  $2\pi$  (3.3), то из (4.1) находим:

$$\varepsilon_N = \varepsilon_F = \frac{16\sqrt{K}}{(2\pi)^2} = \frac{4\sqrt{K}}{\pi^2} \quad (4.4)$$

С учетом (4.3) получаем для средней скорости диффузии:

$$\langle D_p^{(r)} \rangle = D_p^{(r)} \cdot \varepsilon_F = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{K}}{\tau} \quad (4.5)$$

Если изобразить орбиты резонансных частиц (рис.2) в полярных координатах  $p, \psi$ , т.е. свернуть ось  $\psi$  на рис.2 в кольцо, то орбиты станут похожи (при известном воображении) на бананы. Отсюда другое название рассмотренного режима диффузии - "банановый" - очень популярное в неоклассической теории.



## 5. БУДКЕРОВСКАЯ ДИФФУЗИЯ: НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Нерезонансными (или пролетными) будем называть частицы, орбиты которых лежат вне сепаратрисы резонанса (рис.2). Движение таких частиц соответствует вращению "маятника" (4.2). Хотя колебания импульса  $p$  для резонансных и нерезонансных частиц вблизи сепаратрисы одного порядка, механизм диффузии у них разный, в частности, для нерезонансных частиц  $\Delta \bar{p} \neq -\Delta q$ .

При  $q = \text{const}$  движение системы (4.2) (маятник) полностью описывается в эллиптических функциях. В дальнейшем нам потребуются следующие соотношения, которые получаются непосредственным интегрированием уравнений движения (3.2) при  $1/\tau = 0$  (см., например, /13/). Введем новый импульс

$$P = p + q \quad (5.1)$$

Тогда:

$$\bar{P} = \omega = \frac{\pi \sqrt{K}}{k F(k)}; \quad k^2 = \frac{2K}{H}$$

$$I = \frac{4\sqrt{K}}{\pi} \cdot \frac{E(k)}{k}; \quad \bar{P}^2 = \omega I = 4K \cdot \frac{E(k)}{F(k) \cdot k^2} \quad (5.2)$$

$$\frac{d\omega}{dI} = \frac{\pi}{4\sqrt{K}} \cdot \frac{k E(k)}{(1-k^2) F^2(k)}; \quad \frac{dI}{dk} = -\frac{4\sqrt{K}}{\pi} \cdot \frac{F(k)}{k^2}$$

где  $F(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно;  $k$  — их аргумент;  $\omega$  — основная частота движения, равная среднему импульсу  $\bar{P}$ , или средней скорости вращения "маятника";  $I$  — действие (адиабатический инвариант).

В отсутствие рассеяния величины  $H$ ,  $I$ ,  $\omega = \text{const}$ . Рассеяние вызывает изменение  $q$  на  $\Delta q = \xi / \sqrt{\tau}$  (на одну итерацию, см. (2.II)), что приводит, в свою очередь, к дополнительному изменению импульса на величину  $\Delta P = \Delta q$ , а, значит, и к изменению энергии (4.2) и частоты:

$$\Delta H \approx P(\Delta P)_{\xi} = P \Delta q; \quad \Delta \bar{P} = \frac{d\omega}{dH} P \Delta q \quad (5.3)$$

Изменение среднего значения старого импульса  $p$ , которое нас как раз и интересует, равно (5.1):

$$\Delta \bar{p} = \Delta \bar{P} - \Delta q = \Delta q \left( P \frac{d\omega}{dH} - 1 \right) \quad (5.4)$$

Так как за достаточно большое время  $\Delta p \approx \Delta \bar{p}$ , то усредненная по периоду невозмущенного (без рассеяния) движения скорость диффузии:

$$\bar{D}_p = (\Delta \bar{p})^2 = \langle (\Delta q)^2 \rangle \left( P \frac{d\omega}{dH} - 1 \right)^2 = \frac{1}{\tau} \left[ 1 + \omega \frac{d\omega}{dH} \left( I \frac{d\omega}{dH} - 2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\tau} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E(k)}{k^2 F^2(k)} \left( \frac{E^2(k)}{k^2 F^2(k)} - 2 \right) \right] \quad (5.5)$$

где  $l^2 = 1 - k^2 = 1 - 2K/H$ . В последнем выражении использованы соотношения (5.2), и мы заменили  $P$  его невозмущенным значением (без рассеяния), так как влияние последнего мало при  $S \gg 1$ .

Коэффициент диффузии  $\bar{D}_p$  зависит от величины  $k$ , которая характеризует расстройку от резонанса (5.2). При  $k \ll 1$ , т.е. вдали от резонанса, скорость диффузии быстро падает:

$$\bar{D}_p \rightarrow \frac{k^4}{32\tau} = \frac{K^2}{8\tau H^2} \quad (5.6)$$

Однако вблизи сепаратрисы ( $k \rightarrow 1$ ,  $l \rightarrow 0$ ) коэффициент диффузии резко возрастает:

$$\bar{D}_p \rightarrow \frac{\pi^2}{4\tau l^4 (\ln \frac{4}{l})^5}; \quad l^2 = 1 - k^2 \approx \frac{H}{2K} - 1 \quad (5.7)$$

Минимальное значение  $l = l_1$  определяется рассеянием на периоде движения  $2\pi/\omega$ . Грубая оценка  $l_1$  может быть получена следующим образом. Из (5.3) и (5.7)  $\Delta l^2 \approx P \Delta q / 2K$  (на одну итерацию). Отсюда:

$$l_1^4 \sim (\Delta l^2)^2 \frac{2\pi}{\omega} = \langle (\Delta q)^2 \rangle \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I}{k^2} \approx \frac{2}{S} \ll 1 \quad (5.8)$$

Скорость диффузии (5.5) зависит от  $k$ , или от  $I(k)$  (5.2), т.е. от начальных условий движения. Изменение импульса  $p$  за достаточно большое время будет определяться, в силу



эргодичности движения, средним значением этой скорости по фазовой плоскости однородной модели (2.II) (ср. раздел 4). Элемент фазовой площади можно записать в виде  $2\pi I$ . Так как скорость диффузии быстро падает с удалением от резонанса, то интегрирование по  $I$  можно распространить до бесконечности, но отнормировать его на систему резонансов (3.3), т.е. на половину площади между соседними резонансами ( $2\pi^2$ ). В результате получаем среднюю скорость диффузии нерезонансных частиц в виде:

$$D_p^{(a)} = \langle \bar{D}_p \rangle = \int_{I_1}^{\infty} \bar{D}_p \frac{2\pi dI}{2\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \bar{D}_p(k) \frac{dI}{dk} dk = \langle D_p^{(r)} \rangle R(k_1) \quad (5.9)$$

где  $\langle D_p^{(r)} \rangle$  - средняя скорость диффузии резонансных частиц (4.5), а  $k_1^2 = 1 - l_1^2$  (5.8);  $I_1 = I(k_1)$ . Интеграл

$$R(k_1) = \int_0^{k_1} \frac{dk F(k)}{k^2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{E(k)}{l^2 F^3(k)} \left( \frac{E^2(k)}{l^2 F^2(k)} - 2 \right) \right] \quad (5.10)$$

определяет относительную добавку к средней скорости Будкеровской диффузии за счет нерезонансных частиц:

$$D_p^{(b)} = \langle D_p^{(r)} \rangle (1+R) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} (1+R) \quad (5.11)$$

Зависимость  $R$  от  $k_1$  приведена в таблице. Значения  $S$  в последней строке таблицы даны по оценке (5.8). Видно, что до  $S \sim 100$  поправка  $R$  мала, и диффузией нерезонансных частиц можно пренебречь.

Однако при очень больших  $S \gtrsim 10^5$  диффузия частиц вблизи сепаратрисы резонанса становится определяющей ( $R \gg 1$ ). Скорость диффузии в этой области можно оценить, используя приближение (5.7):

$$R \approx \frac{\pi^2}{4} \int_{l_1}^{\infty} \frac{dl}{l^3 (\ln \frac{4}{l})^4} \approx \frac{\pi^2}{8 l_1^2 (\ln \frac{4}{l_1})^4} \sim \frac{16 \pi^2 \sqrt{2S}}{[\ln(128S)]^4} \quad (5.12)$$

Точное значение верхнего предела здесь несущественно, так как интеграл определяется областью  $l \sim l_1$ . Последняя оценка в (5.12) написана согласно (5.8), её значения также приведены в

таблице. Видно, что простая оценка (5.12) может быть использована при  $S \gtrsim 1000$ .

Для применимости (5.12) необходимо также, чтобы ширина стохастического слоя вокруг сепаратрисы резонанса была бы меньше  $l_1$ , т.е. чтобы параметр  $K$  был бы достаточно мал (см. /13/).

Таким образом при очень больших  $S$  Будкеровская диффузия определяется, в основном, областью вблизи сепаратрисы, причем скорость диффузии уменьшается с ростом  $\varepsilon$  значительно медленнее, чем для резонансных частиц ( $D_p^{(r)} \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$ ). Похожий режим диффузии в тороидальном стеллараторе был исследован Галеевым, Сагдеевым, Фюртом и Розенблютом /12/.

## 6. РЕЖИМ ГАЛЕЕВА-САГДЕЕВА ( $S \ll 1$ ).

Скорость Будкеровской диффузии (4.5) растет с уменьшением  $\varepsilon$  и при  $S \sim 1$  достигает предельного значения (2.7). Что произойдет дальше, в области  $S \ll 1$ ? В неоклассической теории диффузии частиц в замкнутых магнитных ловушках эта область была впервые исследована теоретически Галеевым и Сагдеевым /11/, которые обнаружили, что скорость диффузии в этой области не зависит от частоты столкновений. Отсюда название - режим плато, принятое в неоклассической теории. Для открытых систем аналогичный результат получен Рютовым и Ступаковым /7/. Из их оценок вытекает также, что скорость диффузии в этом режиме действительно достигает предельной.

С точки зрения движения отдельных частиц механизм диффузии в режиме Галеева-Сагдеева является весьма любопытным. Действительно, с одной стороны, из уравнений движения (2.II) следует, что предельная скорость диффузии соответствует случайным и независимым значениям фазы  $\psi$ . С другой стороны, последовательные значения  $\psi$  явно коррелированы, так как случайное изменение  $\psi$  за одну итерацию (2.II) вследствие рассеяния  $\sim 1/\sqrt{\varepsilon} \ll 1$  в рассматриваемом случае  $\varepsilon \gg 1$  (3.1).

Для выяснения механизма предельной скорости диффузии в режиме Галеева-Сагдеева рассмотрим фазовые корреляции однородной модели (2.II). Введем коэффициенты корреляции



$$\rho_k^-(p) = \overline{\cos(\psi_{n+k} - \psi_n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(\psi_{n+k} - \psi_n) \quad (6.1)$$

$$\rho_k^+(p) = \overline{\cos(\psi_{n+k} + \psi_n)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(\psi_{n+k} + \psi_n)$$

где  $\psi_n$  — значение  $\psi$  после  $n$  итераций. Для невозмущенной системы:

$$\tilde{p} = p; \quad \tilde{\psi} = \psi + p \quad (6.2)$$

и  $p = \text{const}$ ;  $\psi_n = \psi_0 + np$ , полагая  $q = 0$ . В этом случае коэффициент корреляции

$$\rho_k^-(p) = \cos kp \quad (6.3)$$

естественно не обращается, вообще говоря, в нуль, но является периодической функцией  $p$ . Однако нас интересует в первую очередь средняя (по начальным условиям) скорость диффузии (разделы 4, 5), которая определяется средними значениями коэффициентов корреляции:

$$\langle \rho_k^-(p) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos kp \, dp \equiv 0, \quad k \neq 0; \quad \langle \rho_k^+ \rangle \equiv 0 \quad (6.4)$$

Коэффициент корреляции  $\rho_k^+(p)$  зависит от  $p$  более сложным образом, однако, его среднее значение  $\langle \rho_k^+ \rangle$  также обращается в нуль. Это можно получить почленным интегрированием суммы в (6.1). Таким образом, при усреднении по  $p$ , или по начальным условиям движения, фазовые корреляции исчезают.

Это справедливо, однако, только для невозмущенной системы ( $K = 1/\tau = 0$ ). При  $K \neq 0$  динамическое возмущение  $K \cdot \sin \psi$  (2.11) будет изменять  $p$ , а, следовательно, и  $\psi$ . Оценим число итераций, за которое изменение  $\psi$  станет существенным. Изменение

$$\Delta p_j = K \sum_{i=1}^j \sin \psi_i \approx jK$$

а изменение

$$\Delta \psi_n = \sum_{j=1}^n \Delta p_j \sim Kn^2$$

Следовательно, влиянием динамического возмущения на фазовые корреляции можно пренебречь в течение  $n \lesssim 1/\sqrt{K}$  итераций. Если бы рассеяние отсутствовало, то по прошествии этого времени динамическое возмущение полностью изменило бы фазовые соотношения невозмущенной системы, и равенство (6.4) оказалось бы нарушенным. Однако рассеяние, хотя и медленно ( $\tau \gg 1$ ), но стохастизирует фазу  $\psi$ . Более того, при  $S = \tau_s/\tau_d \ll 1$  (раздел 3) такое стохастическое возмущение сильнее динамического и его действие можно рассмотреть, в первом приближении, положив  $K = 0$ . Имеем:

$$q_j = \sum_{i=1}^j \frac{\xi_i}{\sqrt{\tau}}; \quad \psi_m - \psi_0 = \sum_{j=1}^m q_j = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j \xi_i = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{i=1}^m (m+1-i) \xi_i$$

Откуда

$$\langle (\psi_m - \psi_0)^2 \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^m (m+1-i)^2 \approx \frac{m^3}{3\tau} \quad (6.5)$$

Стохастизация фазы наступает, следовательно, через  $m \sim \tau^{1/3}$  итераций. При  $S \ll 1$  время стохастизации фазы  $m$  много меньше времени влияния динамического возмущения  $n$ , оцененного выше:  $m/n \sim \sqrt{K} \tau^{1/3} = S^{1/3} \ll 1$ . Иначе говоря, стохастизация фазы  $\psi$  наступает в режиме Галева-Сагдеева значительно раньше, чем успевает проявиться динамическое возмущение. Но после стохастизации фазовые корреляции, естественно, отсутствуют. Поэтому соотношения (6.4) справедливы в этом режиме для любого  $k \neq 0$ , т.е. в среднем по  $p$  фазовые корреляции всегда равны нулю, и скорость диффузии оказывается предельной:

$$D_p^{(rc)} = \frac{K^2}{2} \quad (6.6)$$

Формально это получается следующим образом:

$$\begin{aligned} D_p &\equiv \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{N} = \frac{1}{N} \langle \left( \sum_{i=1}^N K \cdot \sin \psi_i \right)^2 \rangle = \frac{K^2}{N} \sum_{i,j} \langle \sin \psi_i \cdot \sin \psi_j \rangle = \\ &= \frac{K^2}{2N} \sum_{i,j} \langle (\cos(\psi_i - \psi_j) - \cos(\psi_i + \psi_j)) \rangle = \quad (6.7) \\ &= \frac{K^2}{2} \sum_k \langle (\rho_k^- - \rho_k^+) \rangle \rightarrow \frac{K^2}{2} \end{aligned}$$



При усреднении по  $\rho$  все коэффициенты корреляции обращаются в нуль (6.4) кроме  $\bar{\rho}_0 = 1$ .

### 7. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОБЛАСТЬ ( $S \sim 1$ )

В промежуточной области  $S \sim 1$  не удастся получить аналитическое выражение для скорости диффузии. Однако простейшая интерполяция двух предельных случаев (5.II) ( $R \ll 1$ ) и (6.6):

$$D_p = \frac{K^2/2}{1 + \frac{\pi^2}{8} \tau K^{3/2}}; \quad \frac{1}{D_p} = \frac{1}{D_p^{(B)}} + \frac{1}{D_p^{(rc)}} \quad (7.1)$$

принятая в /8/, хорошо согласуется с результатами численного счета: среднее отношение численных значений  $D_p$  к значениям (7.1) в интервале  $0.0075 < S < 316$  составляет 1,05 /8/. Обследованные численно значения  $S$  недостаточно велики, чтобы проявился "сепаратрисный" режим диффузии (5.I2), так что этот вопрос остается пока открытым.

Приведенные выше оценки получены в приближении одного резонанса (раздел 3):  $K \ll 1$ ;  $\tau \gg 1$ . Как было объяснено в начале раздела 3, при  $\tau < 1$  и/или  $K > 1$  скорость диффузии является предельной. Поэтому в режиме Галева-Сагдеева ограничения  $K \ll 1$ ;  $\tau \gg 1$  отпадают<sup>\*</sup>. Однако для Будкеровской диффузии условие  $K \ll 1$  существенно, в противном случае скорость диффузии возрастет до предельной, хотя конкретный закон этого перехода еще не исследован. Схематически структура резонансной диффузии на плоскости параметров  $K, \tau$  однородной модели изображена на рис. 3.

### 8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ

Скорость радиальной диффузии для исходной системы вида (I.4) может быть найдена (при  $|\Delta\psi| \gg 1$ ) с помощью однородной модели следующим образом. Прежде всего перепишем (7.1) в виде:

<sup>\*</sup> При этом, однако, плазма по-прежнему предполагается достаточно разреженной ( $\nu_s \tau_{||} \ll 1$ , см. раздел 2), что совместимо с  $\tau \lesssim 1$  при  $|\partial(\Delta\psi)/\partial\theta| \gg 1$  (2.10).

$$D_r \equiv \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{t} = \frac{D_r^{(rc)}}{1 + \pi^2 S/8} \rightarrow \frac{a^2/2t_{||}}{1 + \pi^2 S/8} \quad (8.1)$$

В последнем выражении учтено, что предельная скорость диффузии по  $r$  для системы (I.4) равна  $D_r^{(rc)} = a^2/2t_{||}$ . Примем, что время жизни частиц в ловушке много больше времени рассеяния (только такой случай и представляет практический интерес). Тогда коэффициент диффузии как функция радиуса получается усреднением выражения (8.1) по телесному углу и скорости частицы:

$$D(r) = \langle D_r \rangle = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^\infty D_r(\theta, v, r) f(v) v^2 dv \quad (8.2)$$

где  $f(v)$  - функция распределения с нормировкой

$$\int_0^\infty f(v) v^2 dv = 1$$

например,  $\delta$  - функция:

$$f(v) = \frac{\delta(v-v_0)}{v_0^2} \quad (8.3)$$

или максвелловская функция:

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{-v^2/2u_T^2}}{u_T^3}; \quad u_T^2 = \frac{T}{M} \quad (8.4)$$

где  $T, M$  - температура и масса частицы, соответственно. Следует, однако, помнить, что учет рассеяния в однородной модели произведен при упрощающем предположении о рассеянии на неподвижных центрах (раздел 2). Выражение (8.2) является в этом смысле не вполне последовательным.

Рассмотрим простой пример, когда амплитуда "толчка"  $a = \text{const}(\theta, v)$ , а время пролета частицы

$$t_{||} = \frac{L}{v_{||}} = \frac{t_1}{\cos\theta}; \quad t_1 = \frac{L}{v} \quad (8.5)$$

Тогда коэффициент предельной диффузии (в режиме Галева-Сагдеева и при перекрытии резонансов) равен:



$$D^{(rc)} = \frac{a^2}{2L} \langle v_{||} \rangle = \begin{cases} \frac{v_0 a^2}{4L} \\ \frac{u_T a^2}{\sqrt{2} L} \end{cases} \quad (8.6)$$

где два последних выражения относятся к функции распределения (8.3) и (8.4), соответственно. Выражения (8.6) в точности совпадают с результатом работы /7/, полученным из кинетического уравнения. Заметим, что в /7/ влияние рассеяния учитывается полностью (без упрощения неподвижных центров).

Как было отмечено выше, приближение однородной модели справедливо при дополнительном предположении  $|\Delta\varphi| \gg 1$ , где для рассматриваемого примера

$$\Delta\varphi = \Omega_g t_{||} = \frac{L\Omega_g}{v_{||}} = \frac{\varphi_1}{\cos\theta}; \quad \varphi_1 = \frac{L\Omega_g}{v} \quad (8.7)$$

В обратном предельном случае ( $\varphi_1 \ll 1$ ) кинетическое уравнение дает /7/:

$$D \approx \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{v_0 a^2}{L} \cdot \varphi_0^2; & \varphi_0 = \frac{L\Omega_g}{v_0} \\ \frac{4\sqrt{2}}{\pi^{5/2}} \cdot \frac{u_T a^2}{L} \cdot \varphi_T^2; & \varphi_T = \frac{L\Omega_g}{u_T} \end{cases} \quad (8.8)$$

В рамках однородной модели грубая оценка коэффициента диффузии в этом пределе может быть произведена следующим образом. Резонансные значения угла  $\theta$  равны:

$$\cos\theta_m = \frac{2L\Omega_g}{\pi v(2m-1)} \leq 1$$

где  $m \geq 1$  (2.1), (8.7). При  $\varphi_1 \ll 1$  резонансы расположены только в области  $\theta < \theta_1$ ;  $\cos\theta_1 = 2\varphi_1/\pi \ll 1$ . Так как вдали от резонанса скорость диффузии быстро падает (раздел 5), то грубую оценку для  $D$  можно получить, ограничив область интегрирования в (8.2) условием  $\theta < \theta_1$ , или  $v_{||} < v \cos\theta_1 = 2L\Omega_g/\pi$ . В результате находим:

$$D \sim \begin{cases} \frac{v_0 a^2}{\pi^2 L} \cdot \varphi_0^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{\pi^{5/2}} \cdot \frac{u_T a^2}{L} \cdot \varphi_T^2 \end{cases} \quad (8.9)$$

Перейдем теперь к Будкеровскому режиму резонансной диффузии. Прежде всего найдем полную производную  $\Delta\varphi' \equiv d(\Delta\varphi)/dr$  (2.2). В рассматриваемом примере (8.7) она определяется, вообще говоря, как зависимостью  $\Omega_g(r)$ , так и изменением  $v_{||}$  при смещении частицы по радиусу. Примем для простоты, что  $\Omega_g(r) = c E_r(r)/r B_0 = \text{const}$ , т.е. магнитное поле в основной части ловушки  $B_0 = \text{const}$ , а радиальное электрическое поле  $E_r \sim r$ . Что же касается изменения  $v_{||}$ , то при сохранении полной энергии частицы и её магнитного момента это изменение можно определить из соотношения:

$$\frac{M v_{||}^2}{2} + e\phi_0 r^2 = \text{const} \quad (8.10)$$

где  $\phi_0$  - полная разность потенциалов между осью ловушки ( $r=0$ ) и некоторым характерным радиусом (например, апертурой камеры)  $r=1$ . Тогда:

$$\Delta\varphi' = \frac{\varphi_1 \cdot \phi_1 \cdot r}{\cos^3\theta}; \quad \phi_1 = \frac{2e\phi_0}{M v^2} \quad (8.11)$$

Параметры однородной модели равны (см. (2.5), (2.10), (8.7), (3.6)):

$$K = \frac{2a\varphi_1\phi_1 r}{\cos^3\theta}; \quad \tau = \frac{1}{2v_s t_1 \varphi_1^2} \cdot \frac{\cos^5\theta}{\sin^2\theta}$$

$$S = \sqrt{2} \frac{(ar\phi_1)^{3/2}}{v_s t_1 \sqrt{\varphi_1}} \cdot \frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sin^2\theta} \quad (8.12)$$

Из (8.1) находим ( $R \ll 1$ ;  $S \gg 1$ ):

$$D_r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot \frac{v_s \sqrt{a\varphi_1}}{(r\phi_1)^{3/2}} \sqrt{\cos\theta} \sin^4\theta \quad (8.13)$$



Для распределения (8.3) получаем из (8.2):

$$D = \frac{16\sqrt{2}}{21\pi^2} \cdot \frac{v_s \sqrt{a\varphi_1}}{(r\varphi_1)^{3/2}} \quad (8.14)$$

Кинетическое уравнение /7/ дает в этом случае несколько отличный численный множитель: в терминах поправки к скорости диффузии резонансных частиц (5.11)  $R \approx 0.086$  (см. таблицу).

В случае максвелловского распределения (8.4) полагаем:  $\varphi_1(v) = \varphi_T (u_T/v)^2$ ;  $\psi_1(v) = \psi_T u_T/v$ ;  $v_s(v) = v_T (u_T/v)^3$ . Здесь  $u_T$  дается выражением (8.4), а  $v_T = v_s(u_T)$  определяется из (2.8) по рассеянию частицы со скоростью  $v = u_T$  на неподвижных центрах. Из (8.14) следует, что  $D \sim 1/\sqrt{v}$ . Усредняя (8.14) по  $v$  (8.2) получаем:

$$D = \frac{32 \cdot 2^{1/4} \Gamma(5/4)}{21\pi^{5/2}} \cdot \frac{v_T \sqrt{a\varphi_T}}{(r\varphi_T)^{3/2}} \approx 0,0939 \frac{v_T \sqrt{a\varphi_T}}{(r\varphi_T)^{3/2}} \quad (8.15)$$

## 9. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Развитая теория (также как и теория /7/) позволяет рассчитывать скорость поперечной диффузии и в более общем случае, нежели исходная модель (I.4). Можно, например, описывать радиальную динамику частиц в ловушке с помощью следующей приближенной системы дифференциальных уравнений /8/:

$$\dot{r} = \sum_{m,n} A_{mn} \sin \psi_{mn}; \quad \psi_{mn} = m\phi - \frac{2\pi n z}{L_p} + \beta_{mn} \quad (9.1)$$

$$\dot{\psi}_{mn} = m\Omega_g - \frac{2\pi n}{L_p} \cdot v_{||} = m\Omega_g(r) - n\Omega(r) \equiv \Omega_{mn}(r, v, \theta)$$

Здесь  $r, \phi, z$  - цилиндрические координаты частицы, причем ось  $Z$  направлена по оси ловушки\*;  $L_p$  - пространственный период возмущения, равный удвоенному расстоянию между пробка-

\* Напомним, что фаза  $\varphi$  в отображении (I.4) определена по-другому: в каждой из двух пробок она отсчитывается от эквивалентного направления, которые (как и пробки) повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$  (раздел I, рис. I).

ми (движение частицы туда и обратно);  $A_{mn}, \beta_{mn}$  - амплитуды и фазы спиральных гармоник возмущения;  $\Omega$  - основная частота продольных колебаний. Уравнения (9.1) определяют систему резонансов  $\Omega_{mn} = 0$ .

Отображение (I.4) также может быть записано в форме непрерывных уравнений (9.1). Для этого перейдем в (I.4) от фазы  $\varphi$  к обычному азимутальному углу  $\phi$ , тогда:

$$\dot{r} = r \pm a \cdot \sin(2\phi); \quad \dot{\phi} = \dot{\phi} + \Delta\varphi \quad (9.2)$$

где разные знаки соответствуют двум пробкам, т.е. знаки чередуются в процессе движения, что как раз связано с относительным поворотом двух пробок. Отображение (9.2) эквивалентно уравнениям:

$$\dot{r} = a \cdot \sin(2\phi) \cdot \delta_{2t_n}^\pm(t); \quad \dot{\phi} = \frac{\Delta\varphi}{t_n} = \Omega_g \quad (9.3)$$

где  $\delta_{2t_n}^\pm(t)$  - последовательность  $\delta$ -функций чередующегося знака с периодом  $2t_n$  (каждая  $\delta$ -функция описывает "толчок" одной из пробок, см. рис. 4а). Функция  $\delta_{2t_n}^\pm$  может быть формально разложена в ряд Фурье:

$$\delta_{2t_n}^\pm(t) = \frac{1}{t_n} \sum_{n \text{ нечетно}} \cos \frac{2\pi n t}{2t_n}; \quad n - \text{нечетно} \quad (9.4)$$

Амплитуды четных гармоник обращаются в нуль из-за чередования знака функции  $\delta_{2t_n}^\pm(t)$  (рис. 4а), т.е. из-за специфической симметрии системы (раздел I). Подставляя (9.4) в (9.3) и учитывая, что  $t/2t_n = tv_{||}/L_p \approx z/L_p$ , приходим к уравнениям (9.1) с параметрами:

$$\beta_{mn} = 0; \quad A_{2n} = \frac{a}{2t_n} = \frac{av_{||}}{L_p}; \quad n - \text{нечетно} \quad (9.5)$$

С другой стороны, так как скорость резонансной диффузии, а также скорость диффузии при сильном перекрытии резонансов не зависит от фаз возмущения  $\beta_{mn}$ , система уравнений (9.1) может быть "свернута" в отображение, если в возмущении присутствует лишь одна азимутальная гармоника и амплитуды всех (большого числа) продольных гармоник примерно одинаковы:  $A_{mn} \approx A$ . Такое возмущение эквивалентно системе  $\delta$ -функций одного



знака, повторяющихся через  $2t_{II}$  (рис. 4в). Аналогично (9.4) можно написать

$$\delta_{2t_{II}}(t) = \frac{1}{2t_{II}} \left( 1 + 2 \sum_n \cos \frac{2\pi n t}{2t_{II}} \right) \quad (9.6)$$

где  $n > 0$  — любое целое число. Используя это разложение, получим из (9.1):

$$\tilde{r} \approx r + 2At_{II} \cdot \sin(m\phi); \quad \tilde{\phi} = \phi + 2\Delta\varphi \quad (9.7)$$

где угол прокручивания  $\Delta\varphi$  имеет прежний смысл (I.3). Обратим внимание, что в отличие от (I.4) отображение (9.7) относится к периоду  $2t_{II}$ , т.е. к двойному пролету частицы через ловушку (туда и обратно).

Параметр перекрытия резонансов для системы (9.7) равен согласно (2.5):

$$K = 4mAt_{II} \Delta\varphi' \quad (9.8)$$

Он может быть получен и непосредственно из уравнений (9.1)/I, I3/ (напомним, что мы рассматриваем случай единственной азимутальной гармоники  $m$ ). Для этого заметим, что движение вблизи одного из резонансов ( $\Omega_{mn}(r_{mn}) = 0$ ) может быть приближенно описано системой уравнений:

$$\dot{r} \approx A_{mn} \cdot \sin \psi_{mn}; \quad \dot{\psi}_{mn} \approx \Omega'_{mn} \cdot \varrho \quad (9.9)$$

где  $\varrho = r - r_{mn}$ ;  $\Omega'_{mn} = d\Omega_{mn}/dr$ . При малых  $\varrho \ll r_{mn}$  параметры  $A_{mn}$ ;  $\Omega'_{mn}$  можно считать постоянными, и уравнения (9.9) легко интегрируются (опять маятник!). Размах сепаратрисы ( $\varrho_{mn}$ ) равен:

$$\varrho_{mn} = 4 \sqrt{\frac{A_{mn}}{|\Omega'_{mn}|}} \quad (9.10)$$

а расстояние между соседними резонансами ( $\Delta n = 1$ ) определяется из условия  $\Delta r_{mn} : \Omega'_{mn} \approx 2\pi v_{II} / L_p$  (9.1). В результате получаем /I3/:

$$K = \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\varrho_{mn}}{\Delta r_{mn}} \right)^2 = \frac{A_{mn} L_p^2 \Omega'_{mn}}{v_{II}^2} \quad (9.11)$$

что в точности совпадает с (9.8), если учесть, что  $\Delta\varphi' = 2\Omega'_{mn} / 2m v_{II}$ . Численный фактор  $\pi^2/4$  в (9.11) учитывает влияние резонансов высших приближений /I3/.

Предельная скорость диффузии в рассматриваемом случае равна (9.7):

$$D_r^{(rc)} = t_{II} A^2 = \frac{\pi A^2}{\Omega} \quad (9.12)$$

Последнее выражение для скорости диффузии записано через параметры непрерывной системы, где эта скорость пропорциональна спектральной плотности возмущения в резонансе /I4/. Это — так называемое квазилинейное приближение (см., например, /I5/).

Выражение для параметра  $\mathcal{C}$  однородной модели для отображения (9.7) получается аналогично соотношению (2.10) для отображения (I.4):

$$\frac{1}{\mathcal{C}} = 4m^2 v_{II} t_{II} \left[ \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial\theta} \right]^2 \quad (9.13)$$

Скорость диффузии можно оценить теперь по формуле (8.1) с  $D_r^{(rc)}$  из (9.12) и  $K$  из (9.8) или (9.11).

Выражение (9.12) для предельной скорости диффузии можно обобщить и на случай произвольного спектра возмущения в (9.1). Для этого достаточно подчитать спектральную плотность возмущения в некотором интервале частот  $\Omega_{mn}$  вблизи резонанса  $\Omega_{mn} = 0$ . Пусть этот интервал, как и в случае (9.12), будет  $\Delta\Omega_{mn} = \Omega$ . Тогда нужно найти сумму квадратов амплитуд  $A_{mn}^2$  таких гармоник возмущения, номера которых  $m, n$  удовлетворяют неравенству

$$|m\Omega_g - n\Omega| < \frac{\Omega}{2}; \quad \left| \frac{\Omega_g}{\Omega} - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{2m} \quad (9.13)$$

Для каждого  $m$  существует, очевидно, единственное  $n = n'(m)$ , удовлетворяющее этому неравенству. Откуда (ср. (9.12)):



$$D_r^{(ГС)} = \frac{\pi}{\Omega} \sum_m A_{mn}^2 \quad (9.14)$$

Оценку скорости диффузии в Будкеровском режиме для произвольного возмущения (9.1) можно получить следующим образом. В разделе 4 было показано, что основной вклад в диффузию дают резонансные частицы, т.е. частицы, движущиеся в данный момент внутри сепаратрисы одного из резонансов  $\Omega_{mn}(r_{mn})=0$ , или (9.1):

$$\frac{L_p \Omega_a}{2\pi v_{II}} = \frac{\Delta\varphi}{\pi} = \frac{n}{m} \quad (9.15)$$

Скорость диффузии резонансных частиц равна скорости диффузии их резонансов, т.е. радиусов этих резонансов  $r_{mn}(\theta, v)$  (раздел 4):

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta r_{mn})^2 \rangle = \left( \frac{\partial r_{mn}}{\partial \theta} \right)^2 \frac{d}{dt} \langle (\Delta \theta_s)^2 \rangle = \left( \frac{2\pi n v \sin \theta}{L_p \Omega'_{mn}} \right)^2 \frac{v_s}{2} \quad (9.16)$$

где мы использовали соотношения (9.1) и (2.8). Также как и величина  $r_{mn}$  скорость (9.16) зависит только от отношения  $(n/m)$ , т.е. в конечном счете от  $r$  и  $v$  (9.15). Площадь сепаратрисы отдельного резонанса на фазовой плоскости системы  $(r, \phi)$  равна (см. (9.9, 10)):

$$s_{mn} = 4\rho_{mn} = 16 \sqrt{\frac{A_{mn}}{|\Omega'_{mn}|}} \quad (9.17)$$

Расстояние между двумя целыми резонансами ( $m=1; n=n_1, n_1+1$ )  $(\Delta r)_1 = 2\pi v_{II} / L_p |\Omega'_{1n_1}|$  (9.1), а фазовая площадь  $\Delta S_1 = 2\pi \Delta r_1$ . На этой площади расположены резонансы, для которых:

$$n_1 < \frac{n}{m} < n_1 + 1 \quad (9.18)$$

Относительная доля фазовой площади, охваченной сепаратрисами резонансов, равна приблизительно:

$$\sigma \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\Delta S_1} \sum'_{m,n} s_{mn} = \frac{8}{3\pi^2} \cdot \frac{L_p |\Omega'_{1n_1}|}{v_{II}} \sum'_{m,n} \sqrt{\frac{A_{mn}}{|\Omega'_{mn}|}} \quad (9.19)$$

где численный фактор  $2/3$  учитывает долю неприводимых, т.е. несовпадающих по  $r$ , резонансов  $|13|$ , а штрих у суммы означает суммирование по  $m, n$ , удовлетворяющим неравенствам (9.18). Отсюда скорость Будкеровской диффузии равна:

$$D_r^{(Б)} \approx \sigma \cdot \frac{d}{dt} \langle (\Delta r_{mn})^2 \rangle = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \cdot \frac{v_s (\Delta\varphi)^2}{(\Delta\varphi')^{3/2}} \sqrt{\frac{L_p \sin^2 \theta}{v \cos^2 \theta}} \sum'_{m,n} \sqrt{\frac{A_{mn}}{m}} \quad (9.20)$$

Заметим, в заключение, что грубое условие перекрытия резонансов в рассматриваемом случае можно записать в виде:  $\sigma \gg 1$ .

Пользуясь случаем выразить искреннюю благодарность Д.Д.Рютову и Г.В.Ступакову за полезные обсуждения.

Таблица. ПОПРАВКА НА ДИФФУЗИЮ НЕРЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ В БУДКЕРОВСКОМ РЕЖИМЕ

$k_{\perp}$	$R$ (5.10)	$R$ (5.12)	$S$
0.5	$2.55 \times 10^{-3}$	-	3.6
0.6	$5.03 \times 10^{-3}$	-	4.9
0.7	$9.70 \times 10^{-3}$	-	7.7
0.8	$1.97 \times 10^{-2}$	0.26	15
0.9	$5.06 \times 10^{-2}$	0.27	55
0.91	$5.73 \times 10^{-2}$	0.27	68
0.92	$6.56 \times 10^{-2}$	0.28	85
0.93	$7.62 \times 10^{-2}$	0.28	110
0.94	$9.00 \times 10^{-2}$	0.29	150
0.95	0.109	0.30	210
0.96	0.136	0.31	330
0.97	0.179	0.34	570
0.98	0.256	0.38	1300
0.99	0.450	0.50	5100
0.999	2.21	1.51	$5 \times 10^5$

Л и т е р а т у р а

1. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН 105: I (1971) 3.
2. Б.В.Чириков, Физика плазмы 4:3 (1978) 521.
3. Г.И.Димов, В.В.Закайдаков, М.Е.Кишеневский, Физика плазмы, 2, (1976) 597.
4. T.K.Fowler, B.G.Logan, Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion 2 (1977) 167.
5. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Письма в ЖЭТФ, 26 (1977) 186.
6. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Физика плазмы 4:3 (1978) 501.
7. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, ДАН 240:5 (1978) 1086.
8. М.Е.Кишеневский, П.Б.Лысянский, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Б.М.Фомель, Б.В.Чириков, Г.И.Шульженко, Поперечные потери частиц в аксиально-несимметричных магнитных ловушках. Доклад на УП Международной конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу (Инсбрук, 1978).
9. Г.И.Будкер, Вопросы, связанные с дрейфом частиц в тороидальном магнитном термоядерном реакторе, в сб.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций (АН СССР, М., 1958) т.1, с.73.
10. D.Pfirsch, A.Schlüter, Report of the Max-Planck-Institute, Munich, MPI/PA/7/62, 1962.
11. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ 53 (1967) 348; "Неоклассическая" теория диффузии, в сб. Вопросы теории плазмы (Атомиздат, М., 1973), в.7, с.205.
12. A.A.Galeev, R.Z.Sagdeev, H.P.Furth, M.N.Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. 22:11 (1969) 511.
13. Б.В.Чириков, Нелинейный резонанс (НГУ, Новосибирск, 1977); Взаимодействие нелинейных резонансов (НГУ, Новосибирск, 1978).
14. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, препринт № 267, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
15. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, Ядерный синтез 1:2 (1961) 82.



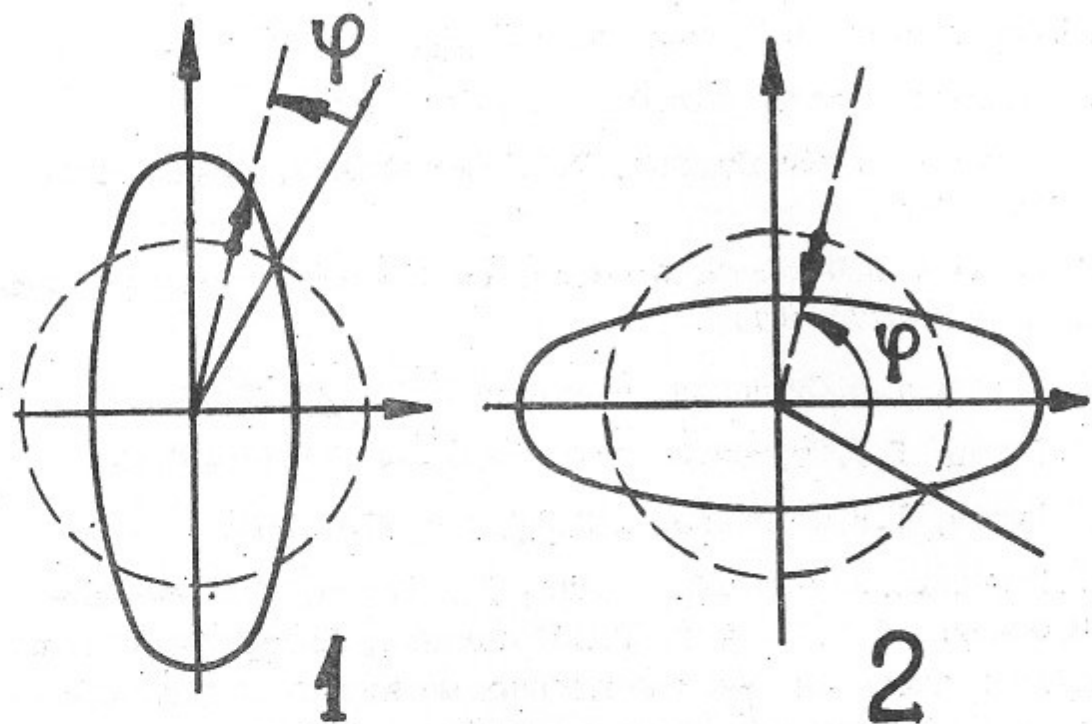


Рис.1. Геометрия асимметричных магнитных пробок 1, 2 на концах ловушки: пунктирные окружности — значение радиуса частицы  $r$  до отражения от пробки; сплошные овалы — после отражения ( $\tilde{r}$ ); стрелки указывают изменение радиуса при отражении ( $\Delta r = \tilde{r} - r = a \cdot \sin(2\varphi)$  (I.4)). Фаза  $\varphi$  отсчитывается от линий нулевого возмущения радиуса ( $\Delta r = 0$ ). Как и сами пробки эти линии повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ , так что зависимость  $\Delta r(\varphi)$  одинакова для обеих пробок.

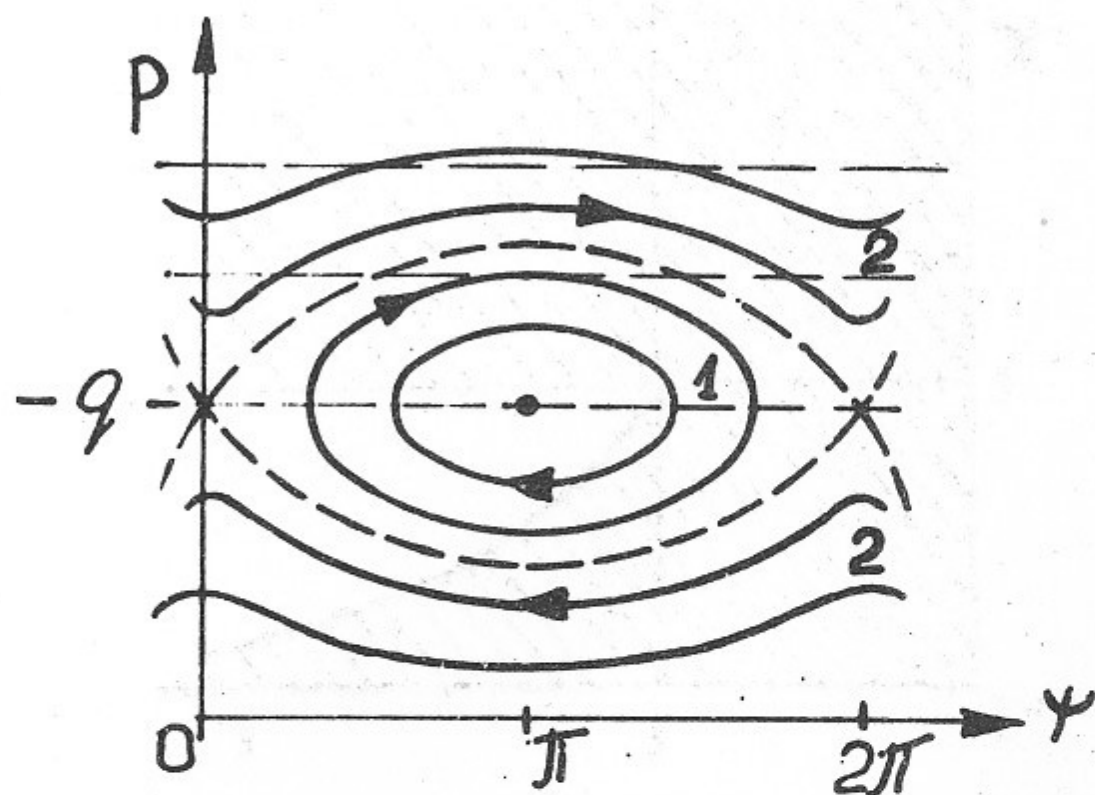


Рис.2. Орбиты частиц в режиме Будкерской диффузии (разделы 4, 5): 1 — резонансные частицы; 2 — нерезонансные частицы; пунктирные кривые — сепаратриса резонанса (4.1); пунктирные прямые — средний импульс частицы  $\bar{p}$  на орбите.



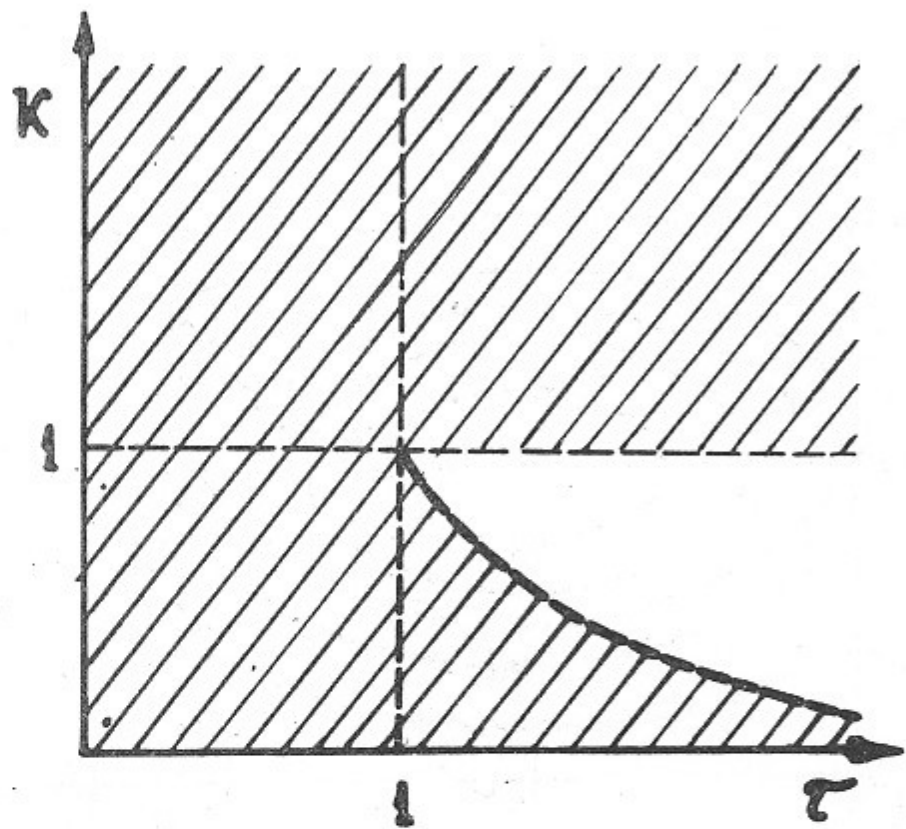


Рис. 3. Структура резонансной диффузии для однородной модели:  
 $K > 1$  - область стохастической неустойчивости;  $K \lesssim \tau^{-2/3}$   
 (пунктирная кривая) - область Галеева-Сагдеева (режим  
 "плато");  $\tau^{-2/3} \lesssim K \lesssim 1$  - Будкеровская область ("ба-  
 нановый" режим). Заштрихована область предельной диффу-  
 зии.

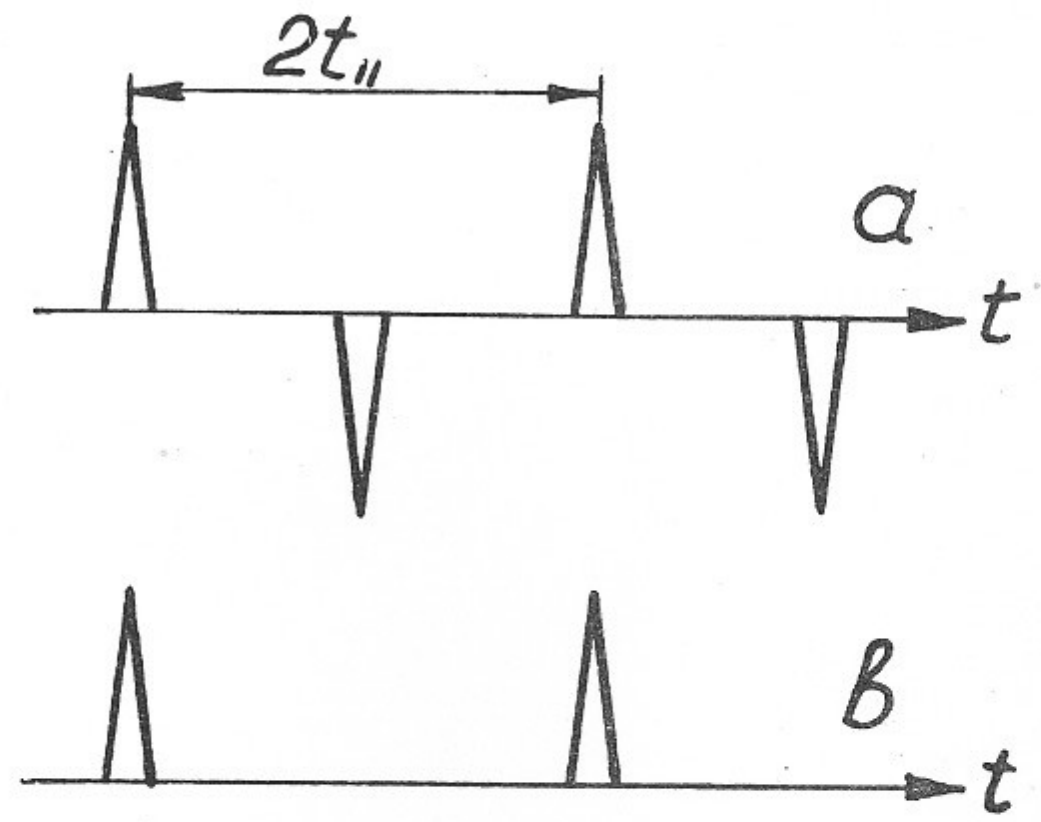


Рис. 4. Периодические  $\delta$ -функции (схема): *a* - с чередова-  
 нием знака ( $\delta_{2t_{||}}^{\pm}$ , (9.4); *b* - одного знака ( $\delta_{2t_{||}}$ ,  
 (9.6)).



Работа поступила - 25 июля 1978 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ  
Подписано к печати 9.08.1978 г. МН 15065  
Усл. 1,0 печ. л., 1,0 учетно-изд. л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 67

---

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР