7

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

В.М.Малкин

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 10

Новосибирск

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ТРЕХВОЛНОВОМ РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

В.М.Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе получено достаточное условие установления стационарных решений кинетического уравнения, описывающего трехволновые распадные процессы, а также линейные возбуждение и поглощение волн.

THE ESTABLISHMENT OF A STATIONARY SPECTRUM
OF TURBULENCE FOR THE THREE-WAVE DECAY
INTERACTION PROCESSES

V.M.Malkin

A b s t r a c t

We obtained the sufficient condition of the establishment of the stationary solutions of the kinetic equation, describing three-wave decay processes, as well as linear excitation and absorbtion of the waves.

I. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, трехволновые слияния и распады, при наличии достаточно большого количества участвующих в них колебаний со случайными фазами и в отсутствие других процессов, изменяющих числа волн, приводят к установлению равновесного распределения Рэлея-Джинса. Тот факт, что оно устанавливается при любых начальных условиях, следует из роста энтропии системы в неравновесных состояниях (см. [I]).

Если, помимо трехволновых процессов, имеются линейные возбуждение и поглощение волн, то равновесное распределение невозможно, но мог бы существовать и устанавливаться стационарный спектр. Условия его существования получены лишь в простейших случаях (например, для одной тройки взаимодействующих волн), а его устойчивость обсуждалась, насколько нам известно, только в линейном приближении (см. [2]).

Настоящая работа является попыткой частично восполнить отмеченный пробел: предполагая, что стационарный спектр существует, мы находим критерий его установления, не зависящий от начальных данных.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Трехволновое распадное взаимодействие и линейное возбуждение (поглощение) колебаний со случайными фазами и положительными энергиями описываются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \gamma_i N_i - \sum_{j,k} V_{i,jk} (N_i N_j + N_i N_k - N_j N_k) + \\ + \sum_{j,k} (V_{j,ik} + V_{j,ki}) (N_j N_i + N_j N_k - N_i N_k) + \varepsilon_i \qquad (I)$$

Поясним использованные здесь обозначения:

γ_i - инкремент возбуждения i - ой волны.
Поглощению соответствует отрицательное значение γ_i .

$V_{i,jk}$ - вероятность распада i - ой волны на волны j и k за единицу времени. Нам удобно считать пару (j,k) упорядоченной каким-либо способом, а при нарушении установленного порядка полагать $V_{i,jk}$ = 0. Тогда для каждой заданной тройки волн (i, j,

κ) может отличаться от нуля только одна из величин $V_{i',j'\kappa'}$, где (i',j',κ') – произвольная перестановка индексов (i,j,κ).

Величины ε_i прибавлены к правым частям уравнений (I) для учета влияния источника тепловых шумов. Оно существенно, если числа волн N_i сравнимы со своими значениями в состоянии термодинамического равновесия. В частности, учет ε_i устраняет возможность обращения величин N_i в нуль. Действительно, устремляя N_i к нулю, получим из (I) $\frac{\partial N_i}{\partial t} > 0$. В той области спектра, где волны значительно интенсивнее тепловых шумов,– а ниже мы будем рассматривать лишь те стационарные спектры, в которых такая область имеется, – слагаемые ε_i следует опустить, поскольку здесь не учтен более существенный вклад в интеграл столкновений других (например, четырехволновых) процессов.

Пусть N_i^0 – стационарное решение уравнений (I). Выразим инкременты γ_i через величины N_i^0:

$$\gamma_i = \sum_{j,\kappa} V_{i,j\kappa} N_j^0 N_\kappa^0 \left(\frac{1}{N_\kappa^0} + \frac{1}{N_j^0} - \frac{1}{N_i^0}\right) - \\ - \sum_{j,\kappa} \left(V_{j,i\kappa} + V_{j,\kappa i}\right) N_j^0 N_\kappa^0 \left(\frac{1}{N_\kappa^0} + \frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_j^0}\right) - \frac{\varepsilon_i}{N_i^0} \qquad (2)^{*)}$$

Подставляя выражения (2) в (I) и проводя простые преобразования, можно придать исходным уравнениям следующий вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\sum_{j,\kappa} V_{i,j\kappa} N_i N_j N_\kappa \left\{ \frac{1}{N_i^0}\left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right) + \left(\frac{1}{N_\kappa^0} - \frac{1}{N_i^0}\right)\left(1 - \frac{N_j^0}{N_j}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{N_j^0} - \frac{1}{N_i^0}\right)\left(1 - \frac{N_\kappa^0}{N_\kappa}\right) - \left(\frac{1}{N_\kappa^0} + \frac{1}{N_j^0} - \frac{1}{N_i^0}\right)\left(1 - \frac{N_j^0}{N_j}\right)\left(1 - \frac{N_\kappa^0}{N_\kappa}\right) \right\} + \\ + \sum_{j,\kappa} \left(V_{j,i\kappa} + V_{j,\kappa i}\right) N_i N_j N_\kappa \left\{ -\frac{1}{N_i^0}\left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right) + \left(\frac{1}{N_\kappa^0} + \frac{1}{N_i^0}\right)\left(1 - \frac{N_j^0}{N_j}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_j^0}\right)\left(1 - \frac{N_\kappa^0}{N_\kappa}\right) - \left(\frac{1}{N_\kappa^0} + \frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_j^0}\right)\left(1 - \frac{N_j^0}{N_j}\right)\left(1 - \frac{N_\kappa^0}{N_\kappa}\right) \right\} - \\ - \sum_i \varepsilon_i \frac{N_i}{N_i^0}\left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right) \qquad (3)$$

Умножим (3) на $c_i\left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right)$, затем произведем суммирование по всем i. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dt} K(\{N_i\}) = -\mathcal{V}(\{N_i\}) \qquad (4)$$

где $K(\{N_i\})$ и $\mathcal{V}(\{N_i\})$ некоторые функционалы от величин N_i.

Числа c_i пока произвольны. Попытаемся подобрать их так, чтобы функционалы K и $\mathcal{V}$ были неотрицательно определены и обращались в нуль только на стационарном решении. Условия, при

---

*) Пользуясь (2), легко получить следующее необходимое условие существования стационарного спектра $\sum \gamma_i < 0$.

которых искомые c_i существуют,– суть достаточные условия устойчивости стационарного спектра относительно произвольных (не обязательно малых) возмущений.

Начнем с функционала

$$K = \sum_i c_i N_i^0 \left(\frac{N_i}{N_i^0} - 1 - \ln\frac{N_i}{N_i^0}\right) \qquad (5)$$

Он удовлетворяет сформулированным выше требованиям, если $c_i > 0$. В этом можно убедиться, например, с помощью тождества

$$y - 1 - \ln y = (y-1)^2 \int_0^1 \frac{x\,dx}{[x + y(1-x)]^2}$$

Отметим, что выражения вида (5) использовались ранее для исследования устойчивости других систем (см. [3], [4]).

Функционал $\mathcal{V}$ может быть знакоопределенным, если каждая тройка чисел c_i, c_j, c_κ удовлетворяет уравнению

$$(c_j + c_\kappa - c_i) V_{i,j\kappa} = 0 \qquad (6)$$

При выполнении (6) $\mathcal{V}$ заметно упрощается и может быть представлен в следующем виде:

$$\mathcal{V} = \sum_{i,j,\kappa} V_{i,j\kappa} N_i N_j N_\kappa \left\{ \frac{c_j}{N_j^0}\left(\frac{N_j^0}{N_j} - \frac{N_i^0}{N_i}\right)^2 + \frac{c_\kappa}{N_\kappa^0}\left(\frac{N_\kappa^0}{N_\kappa} - \frac{N_i^0}{N_i}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left[c_j\left(\frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_j^0}\right) + c_\kappa\left(\frac{1}{N_i^0} - \frac{1}{N_\kappa^0}\right)\right]\left(\frac{N_j^0}{N_j} - \frac{N_i^0}{N_i}\right)\left(\frac{N_\kappa^0}{N_\kappa} - \frac{N_i^0}{N_i}\right) \right\} + \\ + \sum_i c_i \varepsilon_i \frac{N_i}{N_i^0}\left(1 - \frac{N_i^0}{N_i}\right)^2 \qquad (7)$$

Приведем неравенства, обеспечивающие неотрицательную определенность заключенных в фигурные скобки квадратичных форм, а с ними и функционала $\mathcal{V}$:

$$\left(\frac{N_i^0}{N_\kappa^0} + \frac{N_i^0}{N_j^0} - 1\right) V_{i,j\kappa} \geq 0 \qquad (8)$$

$$\left\{ \left[\frac{\left(\frac{N_i^0}{N_j^0}\,\frac{N_i^0}{N_\kappa^0}\right)^{1/2} + \left(\frac{N_i^0}{N_j^0} + \frac{N_i^0}{N_\kappa^0} - 1\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{N_i^0}{N_j^0}\right)} \right]^2 c_\kappa - c_j \right\} \left(V_{i,j\kappa} + V_{i,\kappa j}\right) \geq 0 \qquad (9)$$

Теперь мы можем сформулировать критерий устойчивости: стационарный спектр устанавливается при любых начальных данных, если для каждой тройки индексов (i,j,κ) выполняется условие (8) и существуют положительные числа c_i, c_j, c_k, удовлетворяющие условиям (6), (9).

Заметим, что поток энергии по стационарному спектру направлен, при выполнении неравенств (8), от высокочастотных колебаний к низкочастотным. Пользуясь (8), легко вывести еще и такое утверждение, относящееся к волнам, которые могут рождаться только в результате слияния или только в результате распада других волн: первые должны возбуждаться ($\gamma_i > 0$), а последние поглощаться ($\gamma_i < 0$).

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

П.I. В силу законов сохранения энергии и импульса в трехволновых распадных процессах, функциональное уравнение (6) имеет следующее решение:

$$c_i = \alpha(\omega_i + \vec{v}\vec{k}_i) \tag{I0}$$

Здесь α и $\vec{v}$ – четыре произвольных постоянных. При подстановке (I0) в (9) постоянная α выпадает из критерия устойчивости, а вектор $\vec{v}$ входит в него линейно. Предположим, что условия (8) выполнены, тогда каждое из неравенств (9) имеет смысл и определяет некоторое полупространство в пространстве $\vec{v}$. Если пересечение всех этих полупространств не пусто, то стационарный спектр устойчив относительно произвольных возмущений.

Подчеркнем, что, даже при наличии большого количества взаимодействующих волн, (I0), вообще говоря, не является общим решением уравнения (6). В качестве иллюстрации рассмотрим такую систему: имеется три ветви колебаний; каждая волна ветви I может распадаться на пару волн, одна из которых принадлежит ветви П, а другая – ветви Ш; все остальные распады запрещены. В этом случае (6) имеет решение, более общего вида, чем (I0):

$$c_{in} = \alpha(\omega_{in} + \vec{v}\vec{k}_{in} + \beta_n)$$

Здесь, индекс n нумерует ветви колебаний, индекс i – колебания n-ой ветви; β_{II} и β_{III} – произвольные постоянные, $\beta_I = \beta_{II} + \beta_{III}$.

П.2. Применим критерий устойчивости к степенному стационарному спектру

$$N_i^0 = \frac{const}{\omega_i^s} \quad ; \quad s > 0 \tag{II}$$

Условие (8) выполняется, если $s \leqslant I$ [*]. Согласно условию (9), неравенство

$$\frac{\left(\frac{\omega_j}{\omega_i}\right)^{s/2}\left(\frac{\omega_k}{\omega_i}\right)^{s/2} + \left[\left(\frac{\omega_j}{\omega_i}\right)^s + \left(\frac{\omega_k}{\omega_i}\right)^s - 1\right]^{1/2}}{1 - \left(\frac{\omega_j}{\omega_i}\right)^s} \geqslant \left(\frac{c_j}{c_k}\right)^{1/2}$$

должно выполняться для всех i, j, k таких, что $\omega_i = \omega_j + \omega_k$. С ростом s (от нуля до единицы) левая часть этого неравенства монотонно убывает и достигает, при s = I, значения $\left(\frac{\omega_j}{\omega_k}\right)^{1/2}$. Следовательно, положив $c_i = \omega_i$, добьемся выполнения критерия устойчивости.

Отметим, что при s = I функционал V по существу совпадает с функционалом, описывающим изменение энтропии в трехволновых распадных процессах, который обычно используется для доказательства устойчивости распределения Релея-Джинса.

П.3. Пусть имеется всего одна тройка взаимодействующих волн. Волна I может распадаться на волны 2 и 3. Легко проверить, что стационарный спектр существует, если знак γ_1 противоположен знаку γ_2 и γ_3, а сумма всех инкрементов отрицательна (см. [2], [5]). При этом

$$N_1^0 = -\frac{B}{\gamma_1} \;;\; N_2^0 = \frac{B}{\gamma_2} \;;\; N_3^0 = \frac{B}{\gamma_3} \;;\; B = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{V(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} \tag{I2}$$

Здесь $V = V_{1,23}$ – вероятность распада волны I на волны 2 и 3 за единицу времени.

Устойчивость спектра (I2) относительно произвольных возмущений, насколько нам известно, до сих пор не исследовалась. Применим к нему критерий устойчивости из § 2.

---

[*] При $s \leqslant I$ спектр (II) не может простираться до сколь угодно больших частот, поскольку полная плотность энергии волн конечна. Полученный ниже результат об устойчивости остается в силе, если, начиная с некоторой частоты, поглощение волн становится достаточно сильным и спектр резко обрывается.

В случае конечного числа степеней свободы этот результат верен без каких-либо дополнительных предположений.

Если $\gamma_1 > 0$, то условие (8) выполняется. Полагая

$$c_2 = \left|1 - \frac{N_1^0}{N_3^c}\right| ; \quad c_3 = \left|1 - \frac{N_1^0}{N_2^c}\right| ; \quad c_1 = c_2 + c_3 , \qquad (13)$$

добъемся выполнения условий (6), (9). Итак, при $\gamma_1 > 0$; $\gamma_{2,3} < 0$; $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < 0$ стационарный спектр существует и устанавливается.

Стационар существует также при $\gamma_1 < 0$; $\gamma_{2,3} > 0$; $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < 0$, но в этом случае он неустойчив относительно сколь угодно малых возмущений. Действительно, полагая $N_i = N_i^c + n_i$, линеаризуя уравнения (I) и подставляя в них $n_i \sim e^{\lambda t}$, получим следующее уравнение:

$$f(\lambda) \equiv \lambda^3 - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}\lambda^2 - \frac{3\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}\lambda + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 0 \qquad (14)$$

Функция $f(\lambda)$ положительна, если λ достаточно велико; знак $f(0)$ совпадает со знаком γ_1. В случае $\gamma_1 < 0$ уравнение (I4) имеет положительный корень, что соответствует росту возмущений со временем.

4. ИТОГИ

Примеры, рассмотренные в предыдущем разделе, показывают, что имеются реальные стационарные спектры, к которым применим предлагаемый критерий устойчивости.

Так, из него следует известный результат об установлении распределения Рэлея-Джинса и обобщение этого результата на случай степенных спектров, убывающих с ростом частоты медленнее, чем ω^{-1}.

Для одной тройки взаимодействующих волн критерий оказывается не только достаточным, но и необходимым условием устойчивости.

Время установления стационарного спектра, как видно из уравнения (4), того же порядка, что и характерное время распадного взаимодействия волн.

В тех случаях, когда критерий устойчивости не выполняется, уравнение (4) позволяет оценить время развития возможной неустойчивости. Отметим, что последнее может оказаться гораздо больше времени установления стационара в основной части спектра, если критерий нарушается лишь в той области, где числа волн малы по сравнению со своими характерными значениями в спектре.

В заключение, автор благодарит Б.Н.Брейзмана за постановку задачи и критическое обсуждение работы.

Литература

1. А.И.Ахиезер и др. Электродинамика плазмы. Наука, 1974, стр.508.
2. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. Наука, 1967, гл.Ш, § 7.
3. В.Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. Наука, 1976, стр.145.
4. Б.Н.Брейзман. ЖЭТФ, 72, 518, 1977.
5. М.И.Рабинович, А.Л.Фабрикант. Изв.вузов. Сер.радиофиз., 1976, 5-6, 736.

Работа поступила 5 января 1979г.

Ответственный за выпуск С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 11.Ш-1979 г. МН 07376
Усл. 0,7 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 10.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР