36

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

СО АН СССР

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

# ГЕНЕРАЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 48

Новосибирск

# ГЕНЕРАЦИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПУЧКОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

## А Н Н О Т А Ц И Я

Показано существование эффекта самомодуляции пучка электронов при пролете в ондуляторе, обусловленного коллективным взаимодействием через поля излучения. Получены требования на параметры пучка, при которых рассматриваемая радиационная неустойчивость имеет место. Обсуждается возможность создания источников когерентного излучения, основанных на этом принципе. Приведены численные примеры для источников в субмиллиметровом и в инфракрасном диапазонах длин волн.

О г л а в л е н и е



## I. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время наметилась тенденция к созданию источников когерентного излучения, в которых используются электроны, движущиеся по периодически искривленной траектории. К такому классу приборов относится и так называемый лазер на свободных электронах (ЛСЭ), в котором пучок релятивистских электронов пропускается через ондулятор (периодическое поперечное магнитное поле) помещенный в открытый оптический резонатор/I/.

Нами рассматривается внешне более простая ситуация, когда имеется пучок электронов, движущихся через ондулятор, а резонатор, в отличие от ЛСЭ, отсутствует. При этом исследуется вопрос о радиационной неустойчивости пучка в ондуляторе. При соблюдении определенных ограничений на параметры пучка гармоники плотности, длина волны которых при данной энергии резонирует с периодом ондулятора, становятся неустойчивыми. Для проявления неустойчивости, вообще говоря, необходим некоторый начальный уровень колебаний плотности (или тока)на входе в ондуляторе. Роль начального возбуждения, во всяком случае, могут играть статистические флуктуации плотности. При достаточной длине ондулятора резонансные гармоники флуктуаций плотности успевают вырасти за пролет настолько, что с определенного участка ондулятора будет излучать полностью промодулированный пучок. Модуляция плотности пучка и его торможение в данном случае достигаются исключительно за счет внутреннего взаимодействия частиц друг с другом через поля излучения. Такая схема может быть использована как самостоятельный источник когерентного излучения или как усилитель, если на вход ондулятора подавать ток предварительнопромодулированный с помощью какого-либо источника. Важно отметить, что в источнике такого рода имеется возможность перестройки рабочей длины волны излучения просто изменением энергии пучка.

## 2. ОЦЕНКА ИНКРЕМЕНТА НАРАСТАНИЯ АМПЛИТУДЫ МОДУЛЯЦИИ ПЛОТНОСТИ

В этом разделе эффект радиационной неустойчивости модуляции пучка продемонстрируем на самой простой модели. Прежде, чем оценивать инкремент нарастания, рассчитаем характеристики излучения в ондуляторе непрерывного пучка электронов, продольная плотность которого промодулирована только на одной гармонике.

Рассмотрим непрерывный пучок электронов, которые все движутся со скоростью $\vec{v}$. Пусть продольная плотность пучка промодулирована с периодом $\lambda$. Пропустим такой пучок через спиральный ондулятор[ж)] с напряженностью магнитного поля $\vec{H}$ и периодом изменения поля $\lambda_0$. При этом мы будем предполагать, что $H$ во много раз больше полей излучения, которые действуют на частицы внутри пучка при их движении в ондуляторе.

Пусть ось $y$ направлена вдоль оси ондулятора и совпадает с направлением движения пучка, а начало координат совпадает с началом ондулятора. Тогда поперечное поле спирального ондулятора можно записать в следующем виде: $H(y) = H_x + iH_z = H_0 e^{-i\varkappa y}$,

где $\varkappa = 1/\lambda_0 = 2\pi/\lambda_0$, $H_0 = const$.

Кроме поперечного поля при отклонении от центра ондулятора появляется продольное магнитное поле, равное

$$H_{\parallel}^{\circ} = \frac{\partial H_y}{\partial x} x + \frac{\partial H_y}{\partial z} z = \frac{\partial H_x}{\partial y} x + \frac{\partial H_z}{\partial y} z = \operatorname{Im}\left[\varkappa (x - iz) H_0 e^{-i\varkappa y}\right]$$

Для того, чтобы вынужденное вращение в ондуляторе было одинаковым для всех электронов в пучке требуется вводить дополнительное продольное магнитное поле $H_{\parallel}$, величина которого много больше собственного продольного поля ондулятора $H_{\parallel}^{\circ} \approx H_0 \sigma / \lambda_0$ ($\sigma$ - поперечный размер пучка). Ограничимся в этом разделе для наглядности случаем, когда амплитуда вращения не зависит от величины $H_{\parallel}$:

$$\omega_{\parallel} = e H_{\parallel} / \gamma m \ll \varkappa, \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad (c = 1).$$

---

ж) В этом разделе ограничимся рассмотрением спирального ондулятора (в котором излучение пучка поляризовано по кругу). Такой вид ондулятора непринципиален и используется нами для простоты.



Тогда поперечная и продольная скорости движения электрона в ондуляторе соответственно равны:

$$v_{\perp} = v_x + i v_z = u\, e^{-i\varkappa y}, \quad V = \sqrt{v^2 - |v_{\perp}|^2} = const,$$

где $|u| = e|H_0|\lambda_0/\gamma m \equiv \mathcal{K}/\gamma$ ($\mathcal{K}$ - так называемый фактор ондуляторности). Радиус вращения электрона $r_0 = |u|\lambda_0/V$. Далее мы будем считать, что $|1 - V| \ll 1$, и поэтому везде в этой работе, где возможно, будем полагать $V = 1$.

Вследствие вынужденного движения электронов возникает поперечная компонента плотности тока, которая, при гауссовом распределении с $\sigma_x = \sigma_z = \sigma$ имеет следующий вид:

$$j = j_x + i j_z = \frac{I u}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{S_{\perp}^2}{2\sigma^2}} \cos(kS)\, e^{-i\varkappa y}, \tag{2.I}$$

где $S_{\perp} = S_x + iS_z = x + iz + i r_0 e^{-i\varkappa y}$, $S = y - Vt$,

$I = e\dot{N}$ - полный ток пучка, $k = \lambda^{-1} = 2\pi/\lambda$.

Векторный потенциал поля излучения, испускаемого пучком в ондуляторе, очевидно, равен

$$\hat{A}(\vec{r}, t) = \int \frac{j(\vec{r}\,', t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d\vec{r}\,', \tag{2.2}$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ - соответственно радиус-вектор точки наблюдения и элемента объема пучка. Подставим теперь в (2.2) выражение для $j$ из (2.I) и вычислим $\hat{A}$ в дальней зоне, где можно положить $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ равным $|\vec{r}| - \vec{n}\vec{r}\,'$ ($\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$):

$$\hat{A} \simeq \frac{I u}{4\pi\sigma^2 |\vec{r}|} e^{ikV(|\vec{r}| - t)} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dz' \int_0^L dy' \exp\left[-\frac{|S_{\perp}'|^2}{2\sigma^2} - ikV\vec{n}\vec{r}\,' + i(k - \varkappa)y'\right],$$

где $L$ - длина ондулятора. После несложных преобразований получаем

$$\hat{A} \simeq \frac{I u}{2|\vec{r}|} \exp\left[ikV(|\vec{r}| - t) - \frac{k^2\sigma^2}{2}\sin^2\theta\right] \int_0^L e^{i[k(1 - V\cos\theta) - \varkappa]y' - ik\operatorname{Im}[(n_x - in_z) r_0 e^{-i\varkappa y'}]} dy' \simeq$$

$$\approx \frac{IU}{2|\vec{z}|} e^{\left[i\kappa v(|\vec{z}|-t)-\frac{\kappa^2\sigma^2}{2}\sin^2\theta\right]} \frac{e^{i[\kappa(1-v\cos\theta)-\varkappa]L}-1}{\kappa(1-v\cos\theta)-\varkappa},$$

где $\theta$ – угол между $\vec{z}$ и осью $y$.

Из последнего выражения следует, что поле достигает максимальной величины в резонансе, когда $\lambda=\lambda_0(1-V)=\lambda_0/2\gamma_{\parallel}^2$, где $\gamma_{\parallel}=1/\sqrt{1-V^2}$ – релятивистский фактор продольного движения. Резонанс имеет ширину $\Delta\lambda/\lambda\approx\lambda_0/L$. В случае непрерывного пучка излучение полностью монохроматично и имеет частоту $\omega=\kappa V$. Последнее справедливо в предположении постоянства скорости и амплитуды модуляции пучка. Если амплитуда модуляции пучка не является постоянной, но зависит только от координаты $y$, то, как следует из вида выражения для $\hat{A}$, это изменение не приводит к уширению спектра когерентного излучения. Такое уширение возникает при учете обратного воздействия излучения на пучок, которое приводит к изменению продольной скорости частиц в пучке при их движении в ондуляторе и, следовательно, к спектральной ширине излучения $\Delta\omega/\omega$ порядка $\Delta V/V$.

В случае, когда $\sigma^2 << \lambda L$, величина поля не зависит от поперечного размера пучка $\sigma$ и все частицы пучка излучают когерентно в угле $\hat{\theta}\lesssim\sqrt{\lambda/L}$. При этом мощность излучения максимальна в точном резонансе и равна:

$$W=\frac{|\vec{z}|^2}{2}\int_0^{\pi}|\vec{A}|^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\frac{\mathcal{K}^2}{1+\mathcal{K}^2}I^2\varkappa L. \qquad (2.3)$$

Следует отметить, что $W$ не зависит от энергии частиц.

В случае, когда $\sigma^2>>\lambda L$ излучение расходится в угле $\hat{\theta}\lesssim\lambda/\sigma$, а его мощность зависит от $\sigma$ и $\gamma$:

$$W=\frac{\mathcal{K}^2}{16}\frac{I^2L^2}{\gamma^2\sigma^2} \qquad (2.4)$$

Важным моментом является то, что радиус вращения электрона в ондуляторе $r_0$ всегда много меньше дифракционного размера. Действительно:



$$\frac{\lambda L}{r_0^2}\approx\frac{1+\mathcal{K}^2}{\mathcal{K}^2}\frac{L}{\lambda_0}>>1, \qquad (2.5)$$

т.к. $L>>\lambda_0$. Это условие позволяет ограничиться усредненным описанием движения электронов в поперечной к оси пучка плоскости.

Интересно сравнить полученные результаты с характеристиками некогерентного излучения данного пучка. Мощность некогерентного излучения $W_{inc}$, очевидно, равна $W_{inc}=\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2}\gamma^2H_0^2\dot{N}L$. Сравнение этого выражения с мощностью когерентного излучения $W$ для случая тонкого пучка показывает, что $W\approx W_{inc}\dot{N}\lambda$, $(\mathcal{K}\lesssim 1)$. Следовательно, когерентное излучение играет основную роль, когда число частиц на длине волны велико, т.е. $\dot{N}\lambda>>1$. В случае же широкого пучка $W\approx W_{inc}(\lambda L/\sigma^2)\dot{N}\lambda$ и о когерентном излучении имеет смысл говорить только при условии $\dot{N}\lambda^2L/\sigma^2>>1$. В то время как когерентное излучение монохроматично и лежит в угле дифракции, некогерентное излучение лежит в гораздо большем угле $\hat{\theta}\lesssim\gamma_{\parallel}^{-1}$ (например, для тонкого пучка в $\sqrt{L/\lambda_0}$ раз большем), а частота излучения связана с углом соотношением:

$$\omega(\theta)=[\lambda_0(1-V\cos\theta)]^{-1}$$

Найдем теперь поля излучения, которые действуют на частицы внутри пучка. Для этого воспользуемся выражениями (2.1) и (2.2). В случае, когда $\sigma^2<<\lambda L$, получаем, что электрическое поле излучения внутри пучка равно:

$$\hat{E}=-\hat{A}=-\frac{IU}{2\lambda}\left[\frac{\pi}{2}\cos\kappa S+\left(\ln\frac{y}{\kappa\sigma^2}\right)\sin\kappa S\right]e^{-i\varkappa y} \qquad (2.6)$$

Чтобы интерпретировать полученный результат, вычислим диссипацию энергии пучка, возникающую под действием этого поля. Для этого найдем сначала изменение энергии одной частицы $\delta\mathcal{E}$ под действием поля $\hat{E}$:

$$\delta\mathcal{E}=m\delta\gamma=\mathrm{Re}\int_0^L e\hat{E}v_1^*dy.$$

После подстановки выражения (2.6) и интегрирования получаем:

$$-\delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{4}\frac{I|u|^2}{\lambda}L\cos kS + \frac{I|u|^2}{2\lambda}\left(\ln\frac{L}{k\sigma^2}-1\right)\sin kS .$$

Чтобы найти средние потери энергии пучком в единицу времени, нужно $\delta\mathcal{E}(S)$ умножить на плотность пучка $\rho(S)$ и усреднить по периоду модуляции плотности. Учитывая, что в единицу времени через ондулятор проходит $\dot N$ частиц, в результате имеем:

$$W = -\frac{\dot N k}{2\pi}\int_0^{2\pi/k}\delta\mathcal{E}\cos kS\,dS = \frac{\pi}{4}\frac{K^2}{1+K^2}I^2\varkappa L .$$

Последнее выражение совпадает с полными потерями пучка на когерентное излучение. Таким образом мы видим, что первое слагаемое в (2.6) находится в фазе с модуляцией плотности пучка и его можно интерпретировать как диссипативное поле, приводящее к потере в среднем энергии пучком. Фаза второго слагаемого в выражении для $\hat E$ сдвинута относительно фазы модуляции плотности так, что работа этого поля в среднем по пучку равна нулю. Оно приводит только к перераспределению энергии частиц в пучке. Это поле можно интерпретировать как запаздывающее воздействие полей излучения частиц расположенных позади пробной частицы на расстояниях много больше длины волны. Появление логарифма в выражении для этого слагаемого объясняется тем, что поле излучения спадает с расстоянием как $z^{-1}$. Вклад малых расстояний обрезается на длине $\sigma^2/\lambda$, т.к. на более близких расстояниях поля уже не могут когерентно складываться. Интересно, что логарифмический член в выражении для $\hat E$ можно тем не менее использовать для увеличения мощности когерентного излучения.

Для этого разделим, например, ондулятор по середине и раздвинем обе его половины на расстояние $d$. Пусть $\hat E_I$ — недиссипативная часть $\hat E$, которая возникла в результате излучения частиц в первой половине ондулятора, а $u_I$ и $u_{II}$ — соответственно поперечные скорости частиц в первой и второй частях ондулятора. Тогда после прохождения промежутка фаза $u_{II}\hat E_I$ будет смещена относительно фазы модуляции плотности (и относительно фазы $u_I\hat E_I$) на $\Delta\varphi = \frac{kd}{2\gamma_\parallel^2}$, т.к. $V$ меньше скорости света



на $1/2\gamma_\parallel^2$. Поэтому на длине второй половины ондулятора это поле уже может привести к изменению энергии пучка в целом. В результате нетрудно получить, что мощность когерентного излучения будет в этом случае составлять $W_1 = W_0\left(1-\frac{2\ln 2}{\pi}\sin\varkappa d\right)$, где $W_0$ — мощность когерентного излучения целого индулятора.

Этот же результат можно получить и прямым расчетом $W_1$ в дальней зоне с использованием (2.I) и (2.2).

И, наконец, в области, где $\sigma^2 \gg \lambda L$, из аналогичных вычислений поле $\hat E$ равно:

$$\hat E = \frac{Iuy}{2\sigma^2}\cos kS\, e^{-\frac{z_\perp^2}{2\sigma^2}}e^{-i\varkappa y} \qquad (2.7)$$

Диссипативную часть поля излучения и, следовательно, $W$ можно оценить из простых качественных рассуждений. Действительно, пучок в ондуляторе представляет собой систему периодических излучателей, которые осциллируют так, что поля излучения складываются когерентно под нулевым углом в направлении движения пучка. Тогда из простых геометрических рассуждений следует, что угол, в котором такая когерентность будет еще иметь место, в случае малой площади порядка $\sqrt{\lambda/L}$, а в случае большой площади $\approx\lambda/\sigma$. При этом характерная величина площади, разграничивающая эти предельные случаи, по порядку величины равна $\lambda L$. Далее, из выражения для вектора Пойнтинга следует, что $W\approx\hat E^2\hat S$, где $\hat S$ — характерная площадь пучка излучения в ондуляторе. С другой стороны, именно $\hat E$ и является полем, которое действует на частицы в пучке, т.е. $W\approx I\hat E u L$. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{ll}
\sigma^2 \ll \lambda L, & \sigma^2 \gg \lambda L, \\
\hat S \approx \lambda L, & \hat S \approx 2\pi\sigma^2, \\
\left.\begin{array}{l} W\sim \hat E^2\lambda L \\ W\sim I\hat E u L\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\hat E \approx \frac{Iu}{\lambda}, \\ W\approx\frac{I^2u^2L}{\lambda},\end{array} &
\left.\begin{array}{l} W\sim \hat E^2\sigma^2 \\ W\sim I\hat E u L\end{array}\right\} \to \begin{array}{l}\hat E \approx \frac{IuL}{\sigma^2}, \\ W\approx\frac{I^2u^2L^2}{\sigma^2}\end{array}
\end{array} \qquad (2.8)$$

Прежде чем закончить рассмотрение коллективных полей излучения, запишем ограничение на величину тока $e\dot N$, которое следует из сделанного в начале раздела предположения о том, что поле ондулятора является основным по сравнению с полями излучения, действующими на частицы внутри пучка, т.е. что $|H| \gg |\hat{E}|/\gamma_\parallel^2$. Для случая малой площади пучка имеем: $\frac{\hat{E}}{\gamma_\parallel^2} \approx \frac{IU}{\gamma_\parallel^2 \lambda}$, откуда

$$I \ll e\gamma / r_e = 1{,}6 \cdot 10^4 \gamma (A) . \qquad \left(r_e = \frac{e^2}{m}\right). \qquad (2.9)$$

Для случая большой площади соответственно

$$I \ll e \frac{\gamma}{r_e} \frac{\sigma^2}{\lambda L} . \qquad (2.10)$$

Кроме рассмотренных выше коллективных полей излучения, на частицы внутри пучка действует кулоновское поле. Чтобы рассчитать его, удобно перейти в сопровождающую систему отсчета. В этой системе плотности пучка промодулирована с периодом $\gamma_\parallel \lambda$ и в случае, когда $\sigma^2 \ll \gamma_\parallel^2 \lambda^2$, периодическая часть кулоновского поля внутри пучка равна:

$$E_c = \frac{2I}{\lambda \gamma_\parallel^2} \ln\left(\frac{2\gamma_\parallel}{K\sigma}\right) \sin KS . \qquad (2.11)$$

Появление логарифма в этом случае связано с обрезанием поля поперечным размером на малых расстояниях.

При большом поперечном размере $\sigma^2 \gg \gamma_\parallel^2 \lambda^2$ кулоновское поле ( на оси пучка) будет определяться плотностью зарядов:

$$E_c = \frac{2I\lambda}{\sigma^2} \sin KS . \qquad (2.12)$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, какое влияние оказывают коллективные поля, вычисленные в данном разделе, на динамику частиц в пучке. Для этого найдем гамильтониан взаимодействия частицы с соответствующими полями. Очевидно, что взаимодействие с кулоновскими полями приводит к добавке к потенциальной энергии частицы на частоте модуляции пучка , которая в случае, когда $\sigma^2 \gg \gamma_\parallel^2 \lambda^2$, в соответствие с (2.12), равна $V_c = (I/K^2\sigma^2) \sin KS$. В то же время гамильтониан взаимодействия частицы с полями излучения $\hat{\mathcal{H}}$ (в случае, когда $\sigma^2 \gg \lambda L$), очевидно, имеет вид: $\hat{\mathcal{H}} = Re\, e \hat{A} v_1^*$ и, используя (2.7), получаем: $\hat{\mathcal{H}} = (IU^2 L/K\sigma^2) \sin KS$. Таким образом, в приближении большой площади имеем: $\hat{\mathcal{H}}/V_c \sim \frac{\mathcal{K}^2}{1+\mathcal{K}^2} \frac{L}{\lambda_0}$. Так как $L/\lambda_0 \gg 1$, то реален случай, когда

$$\frac{\mathcal{K}^2}{1+\mathcal{K}^2} \frac{L}{\lambda_0} \gg 1 , \qquad (2.13)$$

и тогда основную роль в коллективном взаимодействии частиц будут играть поля излучения. В области параметра $\sigma$, когда $\gamma_\parallel^2 \lambda^2 \ll \sigma^2 \ll \lambda L$ при условии, что

$$\frac{\sigma^2 \mathcal{K}^2}{\gamma^2 \lambda^2} \gg 1 , \qquad (2.14)$$

так же основную роль во взаимодействии будут играть поля излучения. Но в отличие от случая большой площади существенным может стать и вклад от недиссипативной части поля излучения.

Тот факт, что существует область параметров, когда основное взаимодействие между частицами осуществляется через поля излучения, не должен вызывать удивления. Действительно, выше мы уже убедились, что т.к. кулоновское поле и поле излучения на гармонике модуляции плотности имеют различную физическую природу, то и зависят они от различных параметров. В частности кулоновское взаимодействие начинает чувствовать геометрию пучка начиная с размеров $\sigma \sim \gamma_\parallel \lambda$, а поля излучения с размеров, когда становится применимой геометрическая оптика, т.е. с размеров $\sigma \sim \sqrt{\lambda L} \approx \gamma_\parallel \lambda \sqrt{L/\lambda_0}$. Мы видим, что при увеличении площади пучка кулоновское поле успевает уменьшиться в $L/\lambda_0$ раз по сравнению с первоначальным значением, прежде чем поля излучения также начнут уменьшаться.

Нетрудно понять, что учет обратного воздействия поля излучения на пучок приводит к неустойчивости резонансных гармоник плотности. Действительно, устойчивость имела бы место лишь в том случае, когда фаза гармоники потенциала совпала бы с фазой модуляции плотности (например, как для кулоновского взаимодействия). Это не может иметь место в нашем случае из-за наличия, покрайней мере, диссипативной части поля излучения. Инкремент неустойчивости можно оценить из следующих соображений. Для увеличения амплитуды начальной модуляции плотности $\tilde{\rho}$ в несколько раз, частицы должны сдвинуться под действием силы в продольном направлении $\partial\hat{\mathcal{H}}/\partial s$ на величину порядка $\lambda\tilde{\rho}$:

$$\Delta s \approx \frac{(\varkappa m)^2}{\gamma_\parallel^2}\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial s}\ell^2 \approx \lambda\tilde{\rho}. \qquad (2.I5)$$

Например, для случая большого поперечного сечения из последнего соотношения с помощью (2.I5) получим следующее выражение для характерной длины нарастания амплитуды модуляции плотности:

$$\ell \approx \gamma\sqrt[3]{\frac{\lambda_0\sigma^2}{\mathcal{K}^2\dot{N}r_e}} \qquad (r_e = e^2/m) \qquad (2.I6)$$

Аналогично в пределе малой площади получаем

$$\ell \approx \lambda_0\sqrt{\frac{(1+\mathcal{K}^2)}{\mathcal{K}^2}\frac{\gamma}{\dot{N}r_e}} \qquad (2.I7)$$

Очевидно, что характерная величина площади поперечного сечения пучка $\sigma_{cr}^2$, разграничивающая эти два случая равна

$$\sigma_{cr}^2 = \gamma_\parallel^2\lambda^2\frac{\sqrt{1+\mathcal{K}^2}}{\mathcal{K}}\sqrt{\frac{\gamma}{\dot{N}r_e}}. \qquad (2.I8)$$

Формулы (2.I6) и (2.I7) справедливы в области (ср.с усл.(2.9)и (2.I0)).

$$\dot{N} << N_{max} = \frac{\gamma}{r_e}\frac{\sigma^2}{\gamma_\parallel^2\lambda^2}. \qquad (2.I9)$$

Параметр ондуляторности должен превышать следующее значение (ср. с усл. (2.I3)):

$$\mathcal{K} > min\left(\sqrt{\frac{\dot{N}r_e}{\gamma}},\ \sqrt[4]{\frac{\dot{N}r_e}{\gamma}\frac{\gamma_\parallel^2\lambda^2}{\sigma^2}}\right). \qquad (2.20)$$

Таким образом, пучок, пройдя в ондуляторе длину $L \approx$ $\approx \ell\cdot ln(\rho/\tilde{\rho}_i)$, будет иметь амплитуду модуляции порядка единицы и в этом состоянии будет излучать на длине порядка $\ell$. Полную мощность когерентного излучения нетрудно оценить из формул(2.3) и (2.4):

$$W \approx \gamma m\dot{N}\frac{\lambda_0}{\ell} \qquad (2.2I)$$



Из последней формулы видим, что величина $\lambda_0/\ell$ определяет долю энергии пучка, переходящую в излучение. Условие $\ell \gg \lambda_0$ в рамках нашего описания всегда выполнено. Действительно, используя ограничение (2.I9) и формулы (2.I6) и (2.I7), получаем:

$$\ell^2/\lambda_0^2 \gg 1+\mathcal{K}^{-2} > 1.$$

В заключение раздела оценим ограничения, накладываемые на энергетический $\Delta\gamma/\gamma$ и угловой $\Delta\theta$ разброс пучка электронов. Радиационная неустойчивость будет иметь место, если на длинах порядка $\ell$ смещениями частиц из-за разброса продольных скоростей можно пренебречь:

$$\Delta v\cdot\ell \lesssim \lambda.$$

Из последнего условия получаем:

$$\Delta\gamma/\gamma \lesssim \lambda_0/\ell, \quad (\Delta\theta)^2 \lesssim \lambda/\ell \qquad (2.22)$$

## 3. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТА САМОМОДУЛЯЦИИ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

В этом разделе изложим теорию развития продольной модуляции пучка электронов в ондуляторе, служащую, по-существу, обоснованием изложенных выше физических представлений. Кроме того, формальный подход позволяет получить результаты с учетом численных множителей.

Как и в предыдущем разделе будем рассматривать движение электронов в ондуляторе, вдоль оси которого наложено продольное магнитное поле, превышающее собственное продольное поле ондулятора. Величину введенного продольного поля, в отличии от предыдущего раздела, не ограничиваем сверху условием $\omega_\parallel << \varkappa$. Будем считать также произвольным поперечное периодическое поле ондулятора $\vec{H}_\perp(y) = \vec{H}_\perp(y+\lambda_0)$. В таких полях все электроны будут перемещаться параллельно оси $y$ одинаковым образом, и вынужденную скорость движения электронов можно записать в виде

$$\vec{v}_s = v_y(\mathcal{E}, y)\,\vec{e}_y + \vec{v}_\perp(\mathcal{E}, y)$$

в котором составляющие скорости $v_y$ и $\vec{v}_\perp$ являются периодическими с периодом $\lambda_0$ функциями. В частности, в поле спирального ондулятора:

$$v_x + i v_z = u\, e^{-i\varkappa y}, \qquad u = \frac{\mathcal{K}/\gamma}{1 - \mathcal{K}_\parallel/\gamma}$$

где $\mathcal{K}_\parallel = \frac{e H_\parallel \lambda_0}{m} = \gamma\,\omega_\parallel/\varkappa$.

Исследуем динамику модуляции пучка под действием поля излучения, пренебрегая действием кулоновского поля.

Так как поперечное движение электронов задается внешними полями, то излучение может приводить лишь к изменению продольного движения. Переходя к канонически сопряженным переменным $s = y - \int v\,dt$ и $\mathcal{P} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ ($\mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ – обозначает отклонение энергии) и раскладывая по малому отклонению $\mathcal{P}$ получаем следующий гамильтониан $\mathcal{H}(\mathcal{P}, s, y)$ (удобно в роли времени использовать продольную координату), описывающий относительное движение электронов под действием излучения (прямой вывод гамильтониана может быть проведен с помощью канонического преобразования гамильтониана $\sqrt{(\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2}$ ).

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{P}^2}{2\mathcal{E}M} - e\,\vec{v}_\perp \vec{A}, \tag{3.I}$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал поля излучения, $\mathcal{E}M$ – масса продольного движения, выражение для которой можно найти прямо из определения $M$ :

$$M^{-1} = \mathcal{E}\left\langle \frac{ds/dy}{\mathcal{P}} \right\rangle = \mathcal{E}\left\langle \frac{dv}{d\mathcal{E}} \right\rangle \simeq \mathcal{E}\left\langle \frac{d}{d\mathcal{E}}\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\vec{v}_\perp^{\,2}}{2}\right)\right\rangle = \tag{3.2}$$
$$= \frac{1}{\gamma^2} - \gamma\left\langle \vec{v}_\perp \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial \gamma} \right\rangle.$$

В частности, для спирального ондулятора выражение для $M$ имеет вид:



$$M^{-1} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(eH_0/\gamma m)^2 \varkappa}{(\varkappa - \omega_\parallel)^3} \tag{3.2а}$$

При условии $\omega_\parallel \ll \varkappa$ мы приходим к выражению для $M$, использованному в первом разделе:

$$M = \frac{\gamma^2}{1 + \mathcal{K}^2} = \gamma_\parallel^2.$$

Векторный потенциал поля излучения связан с периодическим изменением скорости электронов в ондуляторе. В используемом приближении, когда поле ондулятора много сильнее полей излучения, можно пренебрегать возмущением скорости полями излучения. Поэтому потенциал $\hat{\vec{A}}$ можно вычислять из уравнения

$$\Delta \hat{\vec{A}} - \frac{\partial^2 \hat{\vec{A}}}{\partial t^2} = 4\pi e\, \vec{v}_\perp(\mathcal{E}_0, y)\, \rho(\vec{s}_\perp, s, y), \tag{3.3}$$

в котором плотность частиц $\rho$ представлена в переменных $\vec{s}_\perp = \vec{z}_\perp - \int \vec{v}_\perp dy$ и $s$ – координатах, характеризующих относительное расположение электронов, соответственно, в поперечном и продольном направлениях. В таком представлении зависимость плотности $\rho$ от $y$ характеризует медленное изменение амплитуды модуляции, происходящее на длинах, значительно превышающих период ондулятора.

Так как обратное действие излучения на модуляцию пучка может проявиться на длинах значительно больших периода ондулятора, целесообразно производить усреднение гамильтониана (3.I) на временах порядка $\lambda_0$.

Получим уравнение, описывающее нарастание амплитуды модуляции, отвлекаясь пока от эффекта расширения пучка. В этих условиях уравнения движения электронов в поле излучения становятся одномерными ( $\vec{S}_\perp = const$ ).

После усреднения (3.I) получаем следующий гамильтониан с помощью уравнения (3.3) и формулы (2.2):

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{P}^2}{2\mathcal{E}}\langle M^{-1}\rangle - e\,\langle \vec{v}_\perp \hat{\vec{A}} \rangle =$$
$$= \frac{\mathcal{P}^2}{2\mathcal{E}M} - e^2 \left\langle \vec{v}_\perp \int_0^L dy' \int d\vec{s}_\perp{}' \, \frac{\vec{v}_\perp(y')}{|\vec{z} - \vec{z}\,'|}\, \rho(\vec{s}_\perp{}', s + y' - y + v|\vec{z} - \vec{z}\,'|, y') \right\rangle, \tag{3.4}$$

где $L$ – полная длина ондулятора, $|\vec{z}-\vec{z}'|=\sqrt{(y-y')^2+(\vec{s}_\perp-\vec{s}_\perp')^2}$ , скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по $y$ . Из полного интеграла $\sim\int\limits_0^L dy'$ часть пропорциональная $\int\limits_0^y dy'$ описывает действие излучения "вперед" (вдоль направления движения пучка), остальная часть $\sim\int\limits_y^L dy'$ – действие "назад". Как видим, из (3.4), излучение "вперед" резонируют с гармониками плотности, промодулированными в продольном направлении на частотах

$$K_n = \frac{n}{\lambda_0(1-v)} ,$$

где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\frac{n}{\lambda_0}=\varkappa_n$ – спектральные частоты $v_\perp(y)$. Излучение "назад" резонирует на меньших частотах

$$K_n = \frac{n}{\lambda_0(1+v)} .$$

Более высокий инкремент неустойчивости связан с излучением "вперед" и поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать излучением "назад".

Уравнение, описывающее изменение плотности частиц $\rho(s,y)$ при движении в ондуляторе можно написать с помощью кинетического уравнения для функции распределения частиц $f(\mathcal{P},s,y)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}M}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial \mathcal{P}} = 0 .$$

Из уравнения для $f$ следует уравнение непрерывности для плотности частиц $\rho=\int f\,d\mathcal{P}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{\mathcal{E}\cdot M}\frac{\partial}{\partial s}\int \mathcal{P} f\,d\mathcal{P} = 0 , \qquad (3.5)$$

и уравнение для изменения плотности тока частиц:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int \mathcal{P} f\,d\mathcal{P} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}\rho + \frac{1}{\mathcal{E}M}\frac{\partial}{\partial s}\int \mathcal{P}^2 f\,d\mathcal{P} = 0 .$$

С помощью двух последних уравнений получаем уравнение для изменения плотности частиц под действием поля излучения:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\mathcal{E}M}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s}\rho + \frac{1}{\mathcal{E}M}\frac{\partial}{\partial s}\int \mathcal{P}^2 f\,d\mathcal{P}\right]. \qquad (3.6)$$



Предположим, что пучок электронов запускается в ондулятор с достаточно малым энергетическим и угловым разбросом. При этом второй член в правой части уравнения (3.6) оказывается пропорциональным квадрату амплитуды модуляции плотности. Поэтому, в линейном по амплитуде модуляции приближении (на начальном этапе развития неустойчивости), этим членом можно пренебречь и в результате получаем для $\rho(\vec{s}_\perp,s,y)$ следующее простое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\mathcal{E}M}\,\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial s^2}\,\rho_0 , \qquad (3.7)$$

где $\rho_0(\vec{s}_\perp,s)$ – плотность пучка при входе в ондулятор.

Разложим $v_\perp$ в ряд Фурье

$$v_\perp = v_x + i v_z = \sum_n u_n e^{i\varkappa_n y} ,$$

а плотность $\rho(\vec{s}_\perp,s,y)$ представим в виде:

$$\rho = \rho_0 + \sum_{n\neq 0} a_n(\vec{s}_\perp,s,y)\, e^{-i\frac{\varkappa_n}{1-v}s} \qquad (3.8)$$

в котором явно выделена сильная зависимость $\rho$ от $s$ . После несложных вычислений из (3.4) и (3.7) ($|\vec{z}-\vec{z}'|\simeq (y-y')+\frac{|\vec{s}_\perp-\vec{s}_\perp'|^2}{2(y-y')}$ ) получаем следующие уравнения для амплитуд модуляции $a_n$. Для тонкого пучка уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} = \frac{\dot{N} r_e}{2\gamma M}|u_n|^2 K_n^2 \int\limits_0^y \frac{a_n(\vec{s}_\perp, s+(1-v)(y'-y), y')}{y-y'+iK_n\sigma^2}\,dy' . \qquad (3.9)$$

Для широкого пучка уравнение для $a_n$ переходит в следующее:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} = \frac{\pi}{i}\,\frac{\rho_0(\vec{s}_\perp,s)}{\gamma M}\, r_e |u_n|^2 K_n \int\limits_0^y a_n(\vec{s}_\perp, s+(1-v)(y'-y), y')\,dy' \qquad (3.10)$$

Характерное значение $\sigma^2$ , соответствующее (2.I8), разграничивающее широкий и тонкий пучок равно:

$$\sigma_{cr}^2 = \frac{\lambda^2}{|u|}\sqrt{\frac{\gamma M}{\dot{N} r_e}} \qquad (3.11)$$

Из последнего уравнения видим, что для широкого пучка инкремент нарастания для частиц в центре пучка больше, чем для частиц, удаленных от центра на расстояние $|\vec{S}_\perp| \neq 0$.

Все гармоники модуляции $a_n$ на начальном этапе нарастают независимо и в дальнейшем мы будем опускать индекс $n$, подразумевая его, соответствующим максимальному инкременту.

Решим уравнения (3.9) и (3.I0) для резонансной амплитуды модуляции, когда $a$ не зависит от $S$ (см. (3.8)). Начальные условия для $a$ при малом энергетическом и угловом разбросе пучка будут следующими: $(\partial a/\partial y)_{y=0} = 0$, $a_{y=0} = a_i(\vec{S}_\perp)$. Для широкого пучка получаем:

$$a = \frac{a_i}{3}\left(e^{\Lambda_1 y} + e^{\Lambda_2 y} + e^{\Lambda_3 y}\right), \tag{3.I2}$$

где $\Lambda_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}|\Lambda|$, $\Lambda_2 = -e^{i\frac{\pi}{6}}|\Lambda|$, $\Lambda_3 = i|\Lambda| = i\sqrt[3]{\frac{\pi \rho_0 r_e |u|^2 K}{\gamma M}}$

Таким образом, амплитуда модуляции экспоненциально растет. Характерная длина, на которой амплитуда вырастает в $e$ раз (при $|\Lambda| y \gg 1$), как видим из (3.I2) равна[ж)]

$$\ell = \frac{2}{\sqrt{3}}|\Lambda|^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{\gamma |M|\ \rho_\perp^{-1}}{\pi \dot{N} r_e |u|^2 K}}, \quad \left(\rho_\perp(\vec{S}_\perp) \equiv \frac{\rho_0}{\dot{N}}, \int \rho_\perp d\vec{S}_\perp = 1\right) \tag{3.I3}$$

В последнем выражении (3.I3), в отличие от (2.I6), полученного из оценочных соображений, уточнен численный коэффициент.

Для тонкого пучка аналогичное выражение для $\ell = Re\,\Lambda^{-1}$ подчиняется соотношению:

$$\Lambda^2 = \frac{\dot{N} r_e}{2\gamma M}|u|^2 K^2 \int_0^\infty \frac{e^{-\Lambda y}}{y + iK\sigma^2} dy \simeq$$
$$\simeq \frac{\dot{N} r_e}{2\gamma M}|u|^2 K^2 \left[\ln\frac{1}{i\Lambda K \sigma^2} - C + \ldots\right] \tag{3.I4}$$

---

ж) Отметим, что инкремент неустойчивости можно также найти решая дисперсионное уравнение. Такой подход использован в появившейся в печати работе /2/, где рассмотрен частный случай неустойчивости, возникающей при взаимодействии бесконечно широкого пучка электронов ($\sigma \to \infty$) со встречной слабой лазерной волной ($\gamma|u| \ll 1$). В случае $\sigma \to \infty$ дисперсионное уравнение имеет вид хорошо изученного уравнения, описывающего работу лампы бегущей волны. Выражение для инкремента, приведенное в работе /2/ находится в соответствии (при эквивалентной замене лазерной волны на ондулятор) с выражением (3.I3) настоящей работы.



где $C \approx 0{,}6$ – постоянная Эйлера.

В частности, для тонкого пучка и положительной продольной массы, если $\ln(\sigma_{cr}^2/\sigma^2) \gg 1$, то из (3.I4) получаем:

$$\ell = \frac{2\lambda}{|u|}\sqrt{\frac{2\gamma|M|}{\dot{N} r_e}}\frac{1}{\sqrt{\ln(\sigma_{cr}^2/\sigma^2)}}. \tag{3.I5}$$

Из уравнений (3.9) и (3.I0) нетрудно найти характерную ширину спектра гармоник плотности, которые могут быть неустойчивыми. При малом отклонении $K$ от резонансного значения изменение инкремента неустойчивости $\Lambda$ при $\sigma^2 \gg \sigma_{cr}^2$ равно:

$$\Lambda = \Lambda_r - \frac{i\Delta K(1-V)}{3} - \frac{(\Delta K)^2(1-V)^2}{9\Lambda_r}, \quad \left(\Delta K = K - \frac{\varkappa}{1-V}\right).$$

Таким образом, характерная ширина спектра при $\sigma^2 \gg \sigma_{cr}^2$ равна (амплитуда выросшей гармоники $a$ при $K = \frac{\varkappa}{1-V} + \Delta K_c$ в $e$ раз меньше амплитуды при $K = \varkappa/(1-V)$):

$$\frac{|\Delta K_c|}{|K|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\ln(\rho_0/\tilde{\rho}_i)}}\frac{\lambda_0}{\ell}. \tag{3.I6}$$

Из аналогичных соображений находится резонансная ширина спектра гармоник и в случае тонкого пучка при $\sigma^2 \ll \sigma_{cr}^2$. В частности, если $\ln(\sigma_{cr}^2/\sigma^2) \gg 1$, $M > 0$ то эффективная ширина $|\Delta K_c|$ равна

$$\frac{|\Delta K_c|}{|K|} = \sqrt{\frac{2\ln(\sigma_{cr}^2/\sigma^2)}{\ln(\rho_0/\tilde{\rho}_i)}}\frac{\lambda_0}{\ell}. \tag{3.I7}$$

Формулу для полной мощности когерентного излучения пучка из ондулятора можно записать в следующем виде, соответствующем формуле (2.2I):

$$W \approx \gamma m \dot{N}\left(|M|\frac{\lambda}{\ell}\right) \tag{3.I8}$$

Из этой формулы видим, что долю энергии пучка $|M|\lambda/\ell$, переходящую в излучение можно изменять также величиной $M$.

Выпишем ограничения на параметры пучка и ондулятора, а также на величину и знак $H_{\parallel}$, при которых полученные в этом разделе результаты справедливы. Поля излучения будут играть основную роль в динамике модуляции плотности, если периодическая часть проекции кулоновского поля $\vec{E}_c$ на скорость частиц, мала по сравнению с проекцией поля излучения:

$$|\vec{E}_c \vec{v}| \approx |\vec{E}_c| \ll |\hat{\vec{E}} \vec{v}| \approx |\hat{\vec{E}}||u|$$

Отсюда получаем следующие условия (соответствующие (2.I4) и (2.20) при замене $M$ на $\gamma_{\parallel}^2$ ):

$$\gamma_{\parallel}^2 u^2 \gg \min\left(\frac{\gamma_{\parallel}^2}{|M|}\frac{\dot{N} r_e}{\gamma},\ \sqrt{\frac{\dot{N} r_e}{\gamma |M|}}\ \frac{\lambda \gamma_{\parallel}^2}{\sigma}\right), \qquad (3.\text{I}9)$$

$$\sigma^2 \gg \lambda^2/|u|^2$$

которые обязаны быть выполнены. Из условия (3.I9) автоматически следует, что в области применимости нашего рассмотрения $\ell \gg \lambda_0$.

Полученные результаты справедливы также в предположении относительной малости различия энергии и продольных масс частиц в пучке. Различие в энергиях и, следовательно, в массах (т.к. $M$ зависит от $\gamma$ ) максимально на участке ондулятора на котором модуляция пучка близка к полной[ж)]:

$$\delta\gamma/\gamma \approx |M|\lambda/\ell \ll 1, \qquad (3.20\text{а})$$

$$|\delta M/M| \approx \left|\frac{\partial M}{\partial \gamma}\frac{\delta\gamma}{M}\right| \ll 1 \qquad (3.20\text{б})$$

Масса продольного движения $M$ таким образом ограничена сверху условиями (3.20а) и (3.20б). Ограничение на массу $M$ снизу связано с тем, что вблизи резонанса $|\omega_{\parallel} - \varkappa| \ll \varkappa$, в области которого только и может быть уменьшена величина $M$, длина нарастания $\ell$ должна быть больше $\lambda_0/|1-\omega_{\parallel}/\varkappa| \simeq \lambda_0/(Mu^2)$.

Таким образом, для спирального ондулятора пределы изменения $M$ ограничиваются условиями:

$$\frac{\lambda}{\ell u^2} \ll \frac{M}{\gamma_{\parallel}^2} \ll \left(\frac{\ell}{\lambda_0},\ \gamma u\sqrt{\frac{\ell}{\lambda_0}}\right), \qquad (3.2\text{I})$$

---

ж) Условие того, что поле ондулятора оказывает определяющее действие на поперечное движение электронов ($H_0 \gg |\hat{E}|(1-v)$ ) следует из (3.20а) и (3.I9). Малость величины $|\Delta u/u| \ll 1$ также следует из (3.I9), (3.20а), (3.20б).



которые разрешаются относительно $M$ подстановкой значений $\ell$ из формул (3.I3) или (3.I4).

Что касается ограничений на разброс продольного импульса $\mathcal{P}$, то при выполнении условий на энергетический и угловой разброс в пучке:

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \ll |M|\frac{\lambda}{\ell}, \qquad (\Delta\theta)^2 \ll \frac{\lambda}{\ell} \qquad (3.22)$$

распределение по $\mathcal{P}$ можно считать $\delta$ - функцией.

Таким образом, границы нашего описания определяются условиями (3.I9), (3.2I) и (3.22). Из (3.I9) можно определить максимально допустимый ток, который в ондуляторе с продольным полем остается прежним (так как при токе близком к максимальному, величина $M$ должна быть примерно равной $\gamma_{\parallel}^2$ ):

$$e\dot{N}_{max} \simeq e\frac{\gamma}{r_e}\frac{\sigma^2 \gamma_{\parallel}^6 u^4}{\lambda_0^2}. \qquad (3.23)$$

Нетрудно также оценить максимально возможную мощность излучения, достигаемую при $\gamma u \approx 1$, $M \approx \gamma_{\parallel}^2$ (при токе $e\dot{N} \approx \approx 10^4 \frac{\gamma^3\sigma^2}{\lambda_0^2} A$):

$$W_{max} \approx \gamma m \dot{N} \approx 10^{10}\gamma^4\frac{\sigma^2}{\lambda_0^2}\ (вт).$$

Итак, мы перечислили все принципиально важные ограничения на параметры задачи. Но прежде, чем перейти к обсуждению других вопросов, еще раз вернемся к рассмотрению влияния кулоновского взаимодействия между частицами в пучке. Выполнение приведенного выше условия (3.I9) гарантирует, что кулоновское взаимодействие не будет оказывать непосредственного влияния на динамику развития неустойчивости. Но оно не достаточно для того, чтобы полностью исключить воздействие кулоновских полей. Так, например, кулоновское расталкивание частиц в пучке может адиабатически, по отношению к длине нарастания, увеличивать площадь пучка и тем самым при определенных условиях увеличивать длину нарастания. Важно подчеркнуть, что такое адиабатическое воздействие не является принципиально неустранимым и поэтому не накладывает, очевидно, каких либо дополнительных фундаментальных ограничений. Для устранения такого влияния можно предложить несколько способов. В частности, кулоновское расталкивание можно устранить с помощью ионной компенсации заряда пучка, либо путем замагничивания электронов в ондуляторе продольным магнитным полем. Последний способ рассмотрим более подробно в связи с тем, что, как мы видели выше, введение продольного магнитного поля бывает необходимо и для других целей.

Оценим эффект расширения пучка из-за кулоновского расталкивания в отсутствие продольного поля ($\omega_\parallel = 0$). После прохождения длины $L$ в ондуляторе траектория электрона, как нетрудно оценить, отклоняется на величину $\Delta S_\perp$:

$$\Delta S_\perp \simeq \sqrt{\frac{\dot N r_e}{\gamma}}\,\frac{L}{\gamma_\parallel} \quad \text{при} \quad \sigma_i < \sqrt{\frac{\dot N r_e}{\gamma}}\,\frac{L}{\gamma_\parallel},$$

$$\Delta S_\perp \simeq \frac{\dot N r_e}{\gamma\gamma_\parallel^2}\,\frac{L^2}{\sigma_i} \quad \text{при} \quad \sigma_i > \sqrt{\frac{\dot N r_e}{\gamma}}\,\frac{L}{\gamma_\parallel}$$

где $\sigma_i$ – начальный поперечный размер пучка.

Для тонкого пучка ($\sigma_i < \sigma_{cr}$) можно пренебречь кулоновским расширением, если отклонение $\Delta S_\perp$ не превышает дифракционного размера $\sqrt{\lambda l}$. Следовательно, если размер

$$\sigma_i < \frac{\lambda}{|u|}\sqrt[4]{\frac{|M|}{\gamma_\parallel^2}}\,\ln(\rho_0/\tilde\rho_i),$$

то критический ток, выше которого кулоновское расширение уменьшит мощность когерентного излучения из ондулятора, равен

$$\dot N_c \simeq \frac{\gamma}{r_e}\,\frac{\gamma_\parallel^4|u|^2/|M|}{\ln^4(\rho_0/\tilde\rho_i)} \qquad (3.24)$$

При

$$\sigma_i > \frac{\lambda}{|u|}\sqrt[4]{\frac{|M|}{\gamma_\parallel^2}}\,\ln(\rho_0/\tilde\rho_i),$$

отклонение $\Delta S_\perp$ не должно превышать начального размера пучка $\sigma_i$ и поэтому критический ток равен:

$$\dot N_c \simeq \frac{\gamma}{r_e}\,\frac{\sigma_i^2}{\lambda^2}\,\frac{\gamma_\parallel^4|u|^4}{|M|\ln^6(\rho_0/\tilde\rho_i)} \qquad (3.25)$$

Частицы в расширяющемся пучке преобретают также и угол $\theta_c$ между скоростью частицы и осью пучка. Для того, чтобы весь пу-



чок резонировал в конце ондулятора на той же гармонике, что и в начале, необходимо выполнить требование:

$$\theta_c \simeq \frac{\dot N r_e}{\gamma\gamma_\parallel^2}\,\frac{L}{\sigma_i} \ll \sqrt{\frac{\lambda_0}{l}}$$

что накладывает следующее ограничение на величину тока пучка:

$$\dot N \ll \frac{\gamma}{r_e}\,\frac{\gamma_\parallel^6|u|^2}{|M|\ln^2(\rho_0/\tilde\rho_i)} \qquad (3.26)$$

В случае, когда $\sigma_i < \frac{\lambda_0}{\gamma_\parallel^2|u|^2}\ln^2(\rho_0/\tilde\rho_i)$, требование сохранения поперечного размера пучка, определяющее ток (3.25), является более жестким. Обычно, апертура ондулятора ограничена величиной порядка периода $\lambda_0$ (из-за спадания поля ондулятора на оси) и поэтому условие (3.26) практически оказывается всегда выполненным.

Следует упомянуть еще об одном эффекте, имеющем место в случае электростатического способа ускорения пучка. Известно, что кулоновское взаимодействие при этом приводит к появлению градиента продольных скоростей в поперечном направлении $\left|\frac{\partial v}{\partial \vec r_\perp}\right| \approx \frac{\dot N r_e}{\gamma|M|}\frac{1}{\sigma}$. Градиент $\left|\frac{\partial v}{\partial \vec r_\perp}\right|$ не будет препятствовать развитию неустойчивости, если для тонкого пучка:

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \vec r_\perp}\right|\sigma \ll \lambda/l,$$

а для широкого пучка, соответственно:

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \vec r_\perp}\right|\sqrt{\lambda l} \ll \lambda/l.$$

Последние условия приводят к следующему ограничению:

$$\dot N \ll \frac{\gamma}{r_e}|M|u^2. \qquad (3.27)$$

Влияние этого градиента, очевидно, не может быть устранено продольным магнитным полем.

Если ток пучка превышает значения, определяемые формулами (3.24) и (3.25), достаточно ввести продольное поле следующей величины[ж)]. Для тонкого пучка ($\sigma < \sigma_{cr}$) требование $|\Delta S_\perp^{max}| \simeq$

---

ж) С помощью продольного магнитного поля можно, кроме того, адиабатически уменьшить поперечные размеры пучка. В случае $\sigma \gg \sigma_{cr}$ это позволяет увеличить мощность источника.

$\simeq \sqrt{\frac{\dot N r_e}{\gamma}}\,\frac{1}{\gamma_\parallel \omega_\parallel} << \sqrt{\bar\lambda l}$ накладывает следующее условие на величину продольного поля:

$$|\omega_\parallel| >> \left(\frac{\dot N r_e}{\gamma}\right)^{3/4}\left(\frac{\gamma_\parallel^4 |u|^2}{|M|}\right)^{1/4} \qquad (3.28)$$

Для широкого пучка ( $\sigma > \sigma_{cr}$ ) соответственно имеем:

$$|\Delta S_\perp|^{max} \simeq \frac{\dot N r_e}{\gamma \gamma_\parallel^2}\,\frac{1}{\omega_\parallel^2 \sigma_i} << \sigma_i$$

$$|\omega_\parallel| >> \sqrt{\frac{\dot N r_e}{\gamma \gamma_\parallel^2}\,\frac{1}{\sigma_i}}\,. \qquad (3.29)$$

Как уже было установлено, для развития неустойчивости требуется достаточная малость разброса продольных скоростей. В частности, угловой разброс не должен превышать величины $\sqrt{\bar\lambda/l}$ . В ситуации, когда для развития неустойчивости требуется много характерных длин нарастания:

$$L/l \approx \ln(\rho_0/\tilde\rho_i) >> 1$$

на длине $L$ возможно значительное увеличение поперечного размера тонкого пучка, даже при выполнении условия (3.22). Такой эффект расширения пучка также легко устраняется введением продольного поля.

Полезно, отметить, что, практически, введение продольного поля $\omega_\parallel l \simeq 1$ заведомо устраняет эффекты, связанные с кулоновским расширением и с указанным угловым разбросом.

Таким образом, показано, что с помощью продольного поля удается скомпенсировать воздействие ряда факторов, ограничивающих мощность выходного излучения. В случае, когда величина $H_\parallel$ достаточно велика, продольное поле перестает быть только нейтрализатором вредных факторов и начинает, наряду с величиной поперечного поля ондулятора $H_0$ , играть определяющую роль в динамике неустойчивости. Качественно новым моментом является то, что величина продольной массы $M$ и амплитуда поперечной скорости $|u|$ становятся двумя независимыми параметрами. Например, мы можем всегда так подобрать величину $H_0$ , что при изменении $H_\parallel$ величина $|u|$ будет постоянной (а, следовательно, будет постоянной и длина волны резонансной гармоники плотности) и в то же время, согласно (3.2), мы можем управлять величиной и знаком продольной массы $M$ . Причем, при желании, можно изменять $M$ (адиабатически) только на отдельных участках ондулятора. Так, например, на начальном участке ондулятора, где различие в энергиях частиц в пучке определяется только начальным разбросом, мы можем путем уменьшения $|M|$ уменьшать длину нарастания $l$ и, следовательно, сделать короче полную длину ондулятора. Это возможно конечно, если начальный энергетический разброс пучка достаточно мал, так как согласно (3.22) уменьшение $|M|$ приводит к более жесткому требованию на $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ . На конечном участке ондулятора, где модуляция пучка близка к полной, наоборот, желательно увеличить $|M|$ , так как согласно (3.18), при этом возрастает выходная мощность когерентного излучения $W$ . Найдем во сколько раз можно увеличить $W$ путем увеличения $|M|$, оставаясь при этом в рамках, накладываемых ограничениями (3.19) и (3.20). Остановимся для примера на практически интересном случае, когда $\gamma|u| \lesssim 1$ (ондулятор является спиральным). Тогда из (3.19) и (3.21) получаем, что, если величина площади пучка $\sigma^2 < \sigma_0^2$ , где

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar\lambda^2}{|u|^2}\left(\frac{\gamma_\parallel \gamma^2 |u|^2}{\dot N r_e}\right)^{2/3},$$

то максимально допустимая величина $M$ равна

$$M_{max} \simeq \gamma_\parallel^2\left(\frac{\gamma^5 |u|^2}{\dot N r_e \gamma_\parallel^2}\right)^{1/3}$$

В пределе доля энергии пучка, переходящая в излучение, составит

$$\left|\frac{M\bar\lambda}{l}\right|_{max} \simeq \left(\frac{\gamma^5|u|^2}{\dot N r_e \gamma_\parallel^2}\right)^{1/6}\left(\frac{\bar\lambda_0}{l_0}\right)$$

где $l_0$ – длина нарастания при $M = \gamma_\parallel^2$ . В случае, когда $\sigma^2 > \sigma_0^2$, то

$$M_{max} = \gamma_\parallel^2\left(\frac{\gamma^7|u|^4\sigma^2}{\dot N r_e \bar\lambda_0^2}\right)^{1/5},$$

и

$$\left|\frac{M\bar\lambda}{l}\right|_{max} \simeq \left(\frac{\gamma^7|u|^4\sigma^2}{\dot N r_e \bar\lambda_0^2}\right)^{2/15}\frac{\bar\lambda_0}{l_0}$$

Таким образом, при токах много меньше критического выигрыш в мощности может быть значительным.

## 4. ОБ УРОВНЕ МОДУЛЯЦИИ ПУЧКА НА ВХОДЕ В ОНДУЛЯТОР

В этом разделе рассмотрим вопросы, связанные с реализацией источника когерентного излучения, основанного на предлагаемом в данной работе механизме самомодуляции электронного пучка.

Для проявления эффекта сомомодуляции необходимо наличие начального уровня гармоники плотности пучка. В реальной ситуации, если специальным образом не приготовлять начальных условий, существует непрерывный спектр флуктуаций гармоник плотности, обязанных конечному числу частиц в пучке. Поэтому все гармоники в полосе шириной $\frac{\Delta K}{K} \simeq \frac{\lambda_0}{\ell}$ станут неустойчивыми и на длине $\ell$ вырастут в несколько раз. После прохождения длины $L \simeq \ell \cdot \ln\frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_i}$ амплитуды этих гармоник достигнут величины $\sim \rho_0$. (Заметим, что при очень большом значении $\ln(\rho_0/\tilde{\rho}_i)$ ширина спектра гармоник модуляции пучка после прохождения длины $L$ дополнительно сузится примерно в $\sqrt{\ln \rho_0/\tilde{\rho}_i}$ раз).

Оценим сначала величину начальной модуляции $\tilde{\rho}$ для тонкого пучка. Ширине спектра $\Delta K \sim K\frac{\lambda_0}{\ell}$ соответствует длина корреляции порядка $\ell/2\gamma_{\parallel}^2$. Таким образом, величина гармоник флуктуаций плотности примерно равна:

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\rho_0} \simeq \left(\dot{N}\frac{\ell}{2\gamma_{\parallel}^2}\right)^{-1/2} .$$

Таким образом, используя формулу (3.15) для $\ell$ имеем ($M \simeq \gamma_{\parallel}^2$):

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\rho_0} \approx \left(\frac{r_e}{\dot{N}}\frac{\gamma^2\gamma_{\parallel}^2|U|^2}{\lambda_0^2}\right)^{1/4} \tag{4.1}$$

Для $\gamma|U| \sim 1$, $\gamma \sim 1$, $\lambda_0 \sim 1$ см, $e\dot{N} \sim 1A$ получаем, что $\tilde{\rho}_i/\rho_0 \approx 10^{-5}$.

Для широкого пучка следует учесть, что длина корреляции в поперечном направлении порядка $\sqrt{\lambda\ell}$. Поэтому, для случая $\sigma \gg \sigma_{cr}$ получаем:

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\rho_0} \approx \left(\dot{N}\frac{\ell}{2\gamma_{\parallel}^2}\;\frac{\lambda\ell}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\gamma_{\parallel}^2}{\sqrt{\dot{N}\lambda_0}}\frac{\sigma}{\ell} . \tag{4.2}$$



Любой источник когерентного излучения с длиной волны $\lambda$ можно использовать для приготовления начальной модуляции пучка с тем же периодом. Для этой цели на начальном участке ондулятора подействуем на пучок электромагнитной волной, распространяющейся в направлении движения частиц. Тогда энергия пучка промодулируется с периодом $\lambda$ и при условии резонанса ($\lambda = \lambda_0/2\gamma_{\parallel}^2$) амплитуда этой модуляции станет равной:

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma} \approx \frac{e\,E_{ext}\,U\,L_{int}}{m\,\gamma} ,$$

где $L_{int}$ – длина участка ондулятора, на котором частицы взаимодействуют с внешней электромагнитной волной, а $E_{ext}$ – амплитуда этой волны. Изменение энергии, в свою очередь приведет к модуляции плотности с амплитудой

$$\frac{\tilde{\rho}_i}{\rho_0} \sim \Delta V\frac{L_{int}}{\lambda} \sim \frac{1}{|M|}\frac{\delta\gamma}{\gamma}\frac{L_{int}}{\lambda} \sim \frac{e\,E_{ext}|U|L_{int}^2}{|M|\lambda\gamma} .$$

Очевидно, что внешнее поле будет оказывать влияние на развитие неустойчивости только до тех пор, пока поле внешней волны $E_{ext}$ больше коллективного поля излучения $\hat{E}$ пучка с модуляцией $\tilde{\rho}$.

Это означает, что взаимодействие частиц с внешней волной имеет смысл рассматривать только на длине начального участка ондулятора не большей, чем характерная длина нарастания неустойчивости ($L_{int} \simeq \ell$). Теперь легко оценить максимальную величину начальной модуляции пучка частиц, которую можно получить с помощью внешнего когерентного излучателя мощности $W_{ext}$. Считая, что внешнее излучение сфокусировано оптимальным образом[ж)] имеем:

$$\tilde{\rho}_i/\rho_0 \simeq \sqrt{W_{ext}/W} ,$$

где $W$ – мощность когерентного излучения данного пучка испускаемая с длины ондулятора $\ell$ при единичной модуляции пучка (т.е. фактически выходная мощность рассматриваемого источника).

---

ж) То есть, в случае малой площади пучка частиц внешнее излучение фокусируется до дифракционного предела ($S \sim \lambda\ell$), а в случае большой площади пучка – до размеров пучка ($S \sim \sigma^2$).

Спектр начальных условий определяет ширину спектра выходного излучения. Если модуляция пучка развивается из спектра флуктуаций плотности, степень немонохроматичности равна $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \lambda_0/\ell$. В случае, когда начальное состояние $\tilde{\rho}_i$ приготовлено с помощью внешнего монохроматического излучателя, выходное излучение будет иметь $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\lambda}{\ell}$ (см. § I), т.е. примерно в $\gamma_{\parallel}^2$ раз уже. Отметим, что в качестве модулирующего излучателя можно использовать источник, основанный на рассматриваемом принципе, в котором необходимая ширина спектра ($\frac{\Delta\omega}{\omega} \lesssim \lambda/\ell$) вырезается с помощью монохроматора. Существует возможность создания также источника с обратной связью, в котором малая часть выходного излучения после монохроматизации подается снова на вход ондулятора. В такой схеме также уменьшается полная длина ондулятора.

Угловая расходимость выходного излучения также связана с начальными условиями для модуляции пучка[ж)]. Если модуляция пучка развивается из спектра флуктуаций плотности, то, учитывая, что длина корреляции в поперечном направлении не превышает величины $\sqrt{\lambda\ell}$, угол расходимости $\hat{\theta}$ излучения, как в случае тонкого, так и широкого пучка будет примерно равен

$$\hat{\theta} \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\ell}}.$$

Для широкого пучка угол расходимости можно уменьшить, если приготовить начальную модуляцию с постоянной фазой по поперечному сечению пучка. В этом случае угол расходимости излучения определяется углом дифракции когерентного излучателя с размерами $\sigma$:

$$\hat{\theta} \approx \frac{\lambda}{\sigma} \ll \sqrt{\lambda/\ell}.$$

ж) Угловая расходимость излучения для широкого пучка может быть связана с расширением пучка из-за кулоновского расталкивания: $\hat{\theta}_c \approx \theta_c \approx \frac{N r_e}{\gamma \gamma_{\parallel}^2} L/\sigma$. В случае $\theta_c \gg \hat{\theta}$ угловая расходимость излучения может быть уменьшена до дифракционного предела $\hat{\theta}$ с помощью продольного поля, величина которого удовлетворяет соотношению $\omega_{\parallel} \gtrsim \frac{N r_e}{\gamma \gamma_{\parallel}^2} \frac{1}{\hat{\theta}\sigma}$.



Такое начальное условие можно приготовить, если в качестве источника, задающего начальную модуляцию, использовать излучение тонкого пучка, расширенного до размеров порядка $\sigma$. Это возможно осуществить и в схеме с обратной связью, позволяющей, таким образом, не только улучшить монохроматичность, но и уменьшить угловую расходимость излучения для широкого пучка.

Для некоторых приложений может оказаться важными поляризационные свойства выходного излучения. Вид поляризации определяется структурой поля ондулятора на излучающем участке. Дополнительная возможность управления поляризацией открывается при введении сильного продольного магнитного поля в линейный ондулятор. При малом поле ($|\omega_{\parallel}| \ll \varkappa$) излучение имеет линейную поляризацию. При увеличении продольного поля поляризация становится элиптической и в пределе $\omega_{\parallel} \to \varkappa$ – круговой. Изменяя направление продольного поля на противоположное, можно обращать и знак спиральности излучения.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Представляется перспективным применение описанного принципа самомодуляции пучка для создания источника в субмиллиметровом диапазоне, в котором сегодня вообще отсутствуют мощные источники, когерентного излучения. Приведем следующий пример. Пусть $\gamma$ = 3.5, период спирального ондулятора $\lambda_0$ = 2 см, $H_0$ = I,7 кГс, $H_{\parallel}$ = 4 кГс. Тогда длина волны излучения I мм. Для тока пучка 5 А характерная площадь пучка $2\pi\sigma_{cr}^2$ = 4 см$^2$. Тогда для площади пучка 0,5 см$^2$ получаем, что длина нарастания[ж)] $\ell$ = 50 см. Энергетический и угловой разбросы не должны превышать следующих значений: $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \lesssim 5 \cdot 10^{-3}$, $(\Delta\theta) \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$. Такой пучок будет излучать в ондуляторе мощность порядка 50 кВт. При развитии модуляции из спектра флуктуаций: $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\theta} \approx 2 \cdot 10^{-2}$. При развитии из одной гармоники плотности уменьшается величина $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Введение на конечном участке ондулятора $H_{\parallel} \approx$ 2I кГс позволит увеличить в пределе выходную мощность источника примерно в 3 раза.

ж) При вычислении длины нарастания в этом примере учтена поправка, связанная с кулоновскими полями.

Для получения пучка электронов с такими параметрами можно использовать электростатический способ ускорения. В настоящее время источники такого типа получили развитие в связи с проблемой электронного охлаждения антипротонных пучков в накопителях /3/ . Электростатический способ ускорения особенно удобен тем, что позволяет предельно простым способом рекуперировать энергию использованного пучка электронов[ж)], и таким образом можно поднять к.п.д. источника до величины порядка единицы.

Рассматриваемый способ получения когерентного излучения позволяет также использовать и импульсные источники электронов. Увеличение скважности позволяет (при той же средней мощности источника электронов) уменьшить характерную длину нарастания и увеличить долю энергии пучка, переходящую в излучение. Приведем пример. Параметры[жж)]: $\gamma = 20$, период спирального ондулятора $\lambda_0 = 2$ см, $2\pi\sigma^2 = 1$ см$^2$, $e\dot{N} = 10^4$ А, $H_0 = 2.5$ кГс, $H_\parallel = 10$ кГс, $\lambda = 3.3 \cdot 10^{-3}$ см, $2\pi\sigma_{cr}^2 \quad 10^{-2}$ см$^2$, $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \lesssim 2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta\theta \lesssim 5 \cdot 10^{-3}$. Длина нарастания $\ell = 15$ см. Пучок будет излучать в угле $\hat{\theta} \approx 10^{-3}$ и со степенью немонохроматичности $\Delta\omega/\omega \approx 4 \cdot 10^{-5}$ при развитии модуляции из одной гармоники плотности, либо $\Delta\omega/\omega \approx 2 \cdot 10^{-2}$, $\hat{\theta} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ при развитии из спектра флуктуаций. Мощность излучения будет составлять $\approx 10^9$ Вт.

Мы глубоко благодарны Я.С.Дербеневу за ценные стимулирующие дискуссии. Мы признательны А.Н.Скринскому за интерес к работе.

---

ж) Способ рекуперации уже осуществлен на работающей в Новосибирске установке "Эпоха" /3/ .

жж) Такие параметры электронного пучка могут быть получены при длительностях импульса тока $\approx 10^{-7}$ сек в существующих сильноточных ускорителях (см.например /4/ ). Следует отметить также, что в нашем случае важен локальный энергетический разброс в пучке, который может быть меньше интегрального.



Литература


1. L.K.Elias et al. Phys. Rev. Lett 36, 717 (1976). D.A.Deacon et al. Phys. Rev. Lett 38, 892 (1977)
2. В.Л.Братман, Н.С.Гинзбург, М.И.Петелин. ЖЭТФ, 76, 930 (1979).
3. Г.И.Будкер, А.Н.Скринский, УФН 124, 561 (1970).
4. B.Bernstein, I. Smith, IEEE Trans. Nucl. Sci., 20, 3, 294 (1973).

Работа поступила - 23 марта I979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I8.УI-I979 г. МН 02884
Усл. 2,0 печ.л., I,6 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ №48.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР