

38

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Ю.А.Пупков

**О ДОПУСКАХ НА ТОЧНОСТЬ ВЫСТАВКИ
МАГНИТОВ УСКОРИТЕЛЕЙ**

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 51

Новосибирск

О ДОПУСКАХ НА ТОЧНОСТЬ ВЫСТАВКИ МАГНИТОВ
УСКОРИТЕЛЕЙ

Ю. А. Пупков

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано влияние корреляции ошибок выставки магнитов на искажения равновесной орбиты частиц в ускорителе. Предлагается способ выставки магнитов ускорителя специальной структуры, существенно ослабляющий требования на точность выставки. Приводится пример построения жесткокоррелированной геодезической сети, пригодной для выставки как линейных, так и кольцевых ускорителей.

Точная взаимная выставка элементов магнитной системы необходима для успешной работы ускорителей высоких энергий. Допустимые искажения равновесной орбиты из-за ошибок выставки и изготовления магнитов принимают равными $\sim I/5 + I/10$ части апертуры вакуумной камеры. Для жесткофокусирующих ускорителей эта величина порядка сантиметра, поэтому точность выставки магнитных элементов должна быть ~ 0.1 мм. В работе предлагаются некоторые приемы, позволяющие ослабить эти довольно жесткие точностные требования.

I. МАТРИЦА ИСКАЖЕНИЯ ОРБИТЫ

Допуски на точность выставки магнитов, фокусирующих и дефокусирующих магнитных линз по разным координатам существенно отличаются. Вдоль орбиты магниты достаточно устанавливать с ошибкой в несколько миллиметров, что несложно выполнить, измеряя, например, расстояния между соседними элементами. Наклоны магнитов относительно горизонтальной плоскости контролируются по уровням, устанавливаемым на базовых плоскостях, и необходимые точности выставки по углам наклона $\sim 0,5$ легко реализуются.

Наиболее сложной является выставка магнитов по радиусам и высоте с допусками в доли миллиметра. Для объяснения происхождения этих допусков надо воспользоваться теорией бетатронных колебаний частиц в ускорителях. В "однородном" жесткофокусирующем ускорителе свободные бетатронные колебания в "сглаженном" приближении, дающем ошибку $\sim 30\%$ по сравнению со строгим расчетом, описываются уравнением:

$$y'' + \nu^2 y = 0 \quad (I)$$

где y — отклонения частицы от равновесной орбиты по радиусу или по высоте, ν — бетатронная частота, равная числу колебаний частицы за один оборот в ускорителе. За независимую переменную принимается угол $\varphi = \frac{s}{R}$, где s — расстояние, пройденное частицей по орбите, средний радиус которой \bar{R} .

Смещения магнитов с градиентом поля G на величину δX по координате Y от проектного положения искажат равновесную орбиту. Искаженная равновесная орбита $Y(\varphi)$ находится из решения уравнения (1) с правой частью, равной $\frac{G(\varphi R)}{B} \delta X(\varphi)$, где \bar{B} - среднее магнитное поле на орбите:

$$Y(\varphi) = \frac{\bar{R}}{2\bar{B}\sqrt{\sin\pi V}} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} G(t) \delta X(t) \cos \sqrt{(\pi + \varphi - t)} dt \quad (2)$$

Найдем искажения орбиты Y_i в точках с координатами φ_i - центрах фокусирующих F и дефокусирующих (D) элементов. Поскольку длины F и D участков малы по сравнению с длиной волны бетатронных колебаний, интеграл (2) можно заменить суммой:

$$Y_i = \frac{1}{2\bar{B}\sqrt{\sin\pi V}} \sum_{j=1}^N G_j \ell_j \cos \sqrt{(\pi + \varphi_i - \varphi_j)} \delta X_j \quad (3)$$

где ℓ_j - длина j -го элемента

N - полное число элементов.

Считая δX_j ошибками выставки магнитов, уравнение (3) представим в матричной форме:

$$Y = A \delta X \quad (4)$$

где Y - вектор-столбец искажений орбиты,

δX - вектор-столбец ошибок.

Матрица A , элементы которой равны

$$A_{ij} = \frac{G_j \ell_j}{2\bar{B}\sqrt{\sin\pi V}} \cos \sqrt{(\pi + \varphi_i - \varphi_j)} \equiv a_{ij} \cos \sqrt{(\pi + \varphi_i - \varphi_j)} \quad (5)$$

назовем матрицей искажения орбиты.

2. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА И КОЭФФИЦИЕНТ ИСКАЖЕНИЯ ОРБИТЫ

Определим зависимость среднеквадратических значений искажений орбиты $\langle Y \rangle = \sqrt{\overline{Y^2}}$ от среднеквадратических ошибок выставки магнитов $\sigma_{X_i} = \sqrt{\overline{\delta X_i^2}}$

Предположим, что некоторая величина Y выражается линейно через величины X_i , определяемые с ошибками δX_i : $Y = \sum_i a_i X_i$ и $\sigma_{X_i} = \sqrt{\overline{\delta X_i^2}}$. Тогда

$$\sigma_Y^2 = \overline{\delta Y^2} = \overline{\left(\sum_i a_i \delta X_i\right)^2} = \sum_i a_i^2 \overline{\delta X_i^2} + \sum_{i \neq j} a_i a_j \overline{\delta X_i \delta X_j} \quad (6)$$

Между ошибками δX_i может существовать связь, так что $\overline{\delta X_i \delta X_j} \neq 0$. Величины $\tau_{ij} = \frac{\overline{\delta X_i \delta X_j}}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}}$ называются коэффициентами корреляции ошибок, а их совокупность вместе с σ_{X_i} образует симметрическую матрицу B_X , называемую корреляционной матрицей вектора X . Для случая $\sigma_{X_1} = \sigma_{X_2} = \dots = \sigma_X$ она имеет вид:

$$B_X = \sigma_X^2 \begin{vmatrix} 1 & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Соотношение (6) при этом можно записать:

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \left(\sum_i a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \tau_{ij} \right) = A B_X A^{TP} \quad (7)$$

где A - строка, A^{TP} - столбец коэффициентов $\{a_1, a_2, \dots\}$.

Если же Y - вектор и $Y = AX$, то ему также будет соответствовать корреляционная матрица B_Y , равная

$$B_Y = A B_X A^{TP} \quad (8)$$

Диагональные элементы её $B_{Y_{ii}} = \sigma_{Y_i}^2$, A^{TP} означает транспонированную к A матрицу.

Ошибки δX_i могут быть суммой нескольких, например, двух независимых составляющих:

$$\begin{aligned} \delta X_i &= \delta \alpha_i + \delta \beta_i \\ \overline{\delta \alpha_i \delta \beta_i} &= 0, \end{aligned}$$

тогда $\overline{\delta X_i \delta X_j} = \overline{\delta \alpha_i \delta \alpha_j} + \overline{\delta \beta_i \delta \beta_j}$ и корреляционная матрица B_X

будет суммой корреляционных матриц: $B_X = B_\alpha + B_\beta$

Из приведенных соотношений следует, что среднеквадрати-

ческие искажения орбиты $\langle y_i \rangle$ определяются как корни квадратные из диагональных элементов корреляционной матрицы B_y из (8), где B_x будет корреляционной матрицей ошибок выставки, а A — матрица искажения орбиты.

Ошибки выставки магнитов складываются из нескольких основных независимых частей — ошибок изготовления магнитов и установки знаков — реперов на них, ошибок установки магнитов от знаков геодезической сети, ошибок определения координат геознаков. Поэтому и матрица B будет суммой соответствующих корреляционных матриц ошибок

$$B_x = \sigma_{u32}^2 E + B_{уст} + B_k$$

где E — единичная матрица.

Координаты геознаков по высоте и в плане определяются, обычно, косвенно, например, радиусы вычисляются по измеренным длинам сторон и углам вписанного многоугольника, причем всегда присутствуют избыточные измерения. Поэтому ошибки координат геознаков коррелированы и матрица B_k недиагональная. Устанавливаться магниты могут как независимо, каждый от геознака, так и зависимо, например, от ранее установленных соседних магнитов. Следовательно, матрица $B_{уст}$ может быть диагональной или ленточной.

Считая, что система не имеет резко выделяющихся по параметрам магнитов, достаточно рассмотреть искажение орбиты в центре одного, принятого за первый с $\varphi_i = 0$ и использовать первую строку матрицы A . Из (7) следует, что среднеквадратическое искажение орбиты пропорционально среднеквадратической ошибке выставки магнитов

$$\langle y \rangle = \gamma \sigma_x$$

Назовем величину γ коэффициентом искажения орбиты.

Задавая допустимую величину $\langle y \rangle$ и зная γ для конкретного ускорителя, формулируют требования на σ_x .

3. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ОШИБОК ВЫСТАВКИ НА ИСКАЖЕНИЯ ОРБИТЫ

3.1. Некоррелированные ошибки.

Если ошибки выставки магнитов δx_i независимы, матрица B_x диагональная и квадрат среднеквадратического искажения орбиты имеет вид

$$\langle y \rangle^2 = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \cos^2 \sqrt{(\pi - \varphi_j)} (\delta x_j)^2 = \frac{\langle G \rangle^2 \langle \ell \rangle^2 N}{4 \bar{B}^2 \sqrt{\sin^2 \pi \sqrt{V}}} \sigma_x^2 \quad (9)$$

Коэффициент искажения орбиты равен

$$\gamma_{некор} = \frac{\langle G \rangle \langle \ell \rangle \sqrt{N}}{2 \bar{B} \sqrt{|\sin \pi \sqrt{V}|}} \quad (10)$$

Для действующих ускорителей $\gamma_{некор}$ лежит в диапазоне 20-50.

Исходя из приведенных расчетов, обычно, и выдвигают требования на точность выставки магнитов [1, 2], не учитывая влияние корреляции ошибок.

3.2. Коррелированные ошибки.

а) Предположим, что магнитная система ускорителя состоит из чередующихся Φ и D элементов, имеющих одинаковые длины и равные по величине, но противоположные по знаку градиенты, т.е. $\alpha_{ij} = -\alpha_{i,j+1}$. Объединим два соседних Φ и D элемента в один блок и выставим совместно от одного из геознаков, ошибки которых независимы. Корреляционная матрица B_x в этом случае такова:

$$B_x = \sigma_x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Дополнительные силы, действующие на частоту из-за смещения блока, в Φ и D элементах имеют противоположные направления и не компенсируются только из-за небольшого набега фазы бетатронных колебаний на длине блока. Возмущение орбиты будет меньше, чем в случае независимой случайной подвижки Φ и D элементов

коэффициент искажения орбиты примет значение:

$$\gamma = \frac{\langle G \rangle \langle l \rangle}{2B |\sin \pi V|} \frac{\pi}{N} = \gamma_{\text{некор}} \frac{\pi V}{N} \quad (\text{II})$$

б) Рассмотрим вариант, когда ошибки выставка каждого магнита коррелирована с ошибками двух соседних с коэффициентом корреляции 0,5, т.е. B_x имеет вид

$$B_x = \sigma_x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & \dots & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,5 & 0 & \dots & \dots & 0,5 & 1 \end{vmatrix}$$

Такой случай можно реализовать, выставляя, например, четные магниты от геознаков с некоррелированными ошибками, а нечетные — от двух соседних. Коэффициент искажения орбиты равняется:

$$\gamma = \frac{\langle G \rangle \langle l \rangle}{B} \sqrt{\frac{\pi}{2V |\sin \pi V| N}} = \gamma_{\text{некор}} \frac{2\sqrt{\pi V |\sin \pi V|}}{N} \quad (\text{I2})$$

Коэффициент искажения орбиты $\gamma_{\text{некор}}$ для некоррелированных ошибок в несколько раз (3-15 для ускорителей типа ВЭШ-4, Серпуховского) больше, чем γ из (II) и (I2) для простых случаев корреляции ошибок выставки магнитов.

Возможны также нежелательные случаи корреляции ошибок, приводящие не к уменьшению, а к существенному увеличению коэффициента искажения орбиты.

3.3. Искажения орбиты ВЭШ-4.

В таблице I представлены коэффициенты искажения орбиты по вертикали Z и по радиусу ζ для ВЭШ-4, вычисленные без учета корреляции ошибок выставки $\gamma_{\text{некор}}$ и с учетом корреляции, которая фактически реализуется $\gamma_{\text{факт}}$. Приводятся среднеквадратические искажения орбиты.

Таблица I.

	$\gamma_{\text{некор}}$	$\gamma_{\text{факт}}$	$\langle \zeta \rangle_{\text{мм}}$
$\sqrt{z} = 9.1$	39	23	1.4
$\sqrt{\zeta} = 9.1$	53	13	1.3

Сопоставление фактических коэффициентов искажения орбиты по вертикали и радиусу показывает, что плановая геодезическая сеть более жестко коррелирована, чем высотная. Это позволяет иметь допуски на точность координат плановой сети примерно в два раза больше, чем высотной.

3.4. Выводы

Приведенные примеры демонстрируют, что учет корреляции ошибок выставки магнитов значительно изменяет коэффициент искажения орбиты, а, следовательно, и требования на точность выставки. Существенно различный вклад в искажения орбиты вносят составляющие ошибок выставки — ошибки изготовления, установки магнитов и ошибки координат геознаков из-за отличия их корреляционных матриц.

Необходимо учесть связь между смещением магнита и искажением орбиты в нем же. Для функционирования ускорителя существенны искажения орбиты относительно осей смещенных магнитов, а не относительно её идеального положения. Поэтому надо заменить Y_i на $Y_i - \delta x_i$, т.е. вместо матрицы A в выражениях (4), (7), (8), (9) поставить матрицу $A - E$.

4. ВЫСТАВКА МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ЕДИНИЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Возможно создать структуру магнитной системы ускорителя, позволяющую существенно видоизменить требования на точность выставки, что было предложено в [3]. В такой структуре на длине волны бетатронных колебаний должно укладываться целое число элементов периодичности магнитной системы. Магнитную сис-

тому тогда можно представить состоящей из единичных участков, таких, что амплитуда и фаза бетатронных колебаний в начале и конце строго равны, и неединичного участка, необходимого для получения нецелочисленного $\sqrt{}$.

Выделим единичные участки, концы их совместим, а точки совмещения сместим относительно идеальной равновесной орбиты на некоторые величины H_i (рис.1). Рассмотрев движение пробной частицы из точки 0 с нулевыми углом и координатой относительно идеальной орбиты, можно получить, что искаженная равновесная орбита пройдет точно через точки 0, 1, ..., N - совмещения концов единичных участков. Искажения орбиты внутри участков определяются углом их наклона к идеальной орбите, и максимальное искажение относительно оси участка U_{max} равно $\frac{H_i - H_{i-1}}{2\pi}$.

Поскольку искажения допустимы в несколько миллиметров, величины H_i могут быть ~ 2 см. Выставка магнитов ускорителя единичной структуры будет заключаться во взаимной выставке элементов на единичных участках относительно их осей и совмещении их концов с точностью $\sim 0,1$ мм, а координаты точек совмещения могут иметь ошибку ~ 1 см. Этот пример подтверждает, что замена матрицы искажения орбиты A на матрицу $A-E$ необходима.

Если на длине волны бетатронных колебаний укладывается нецелое число элементов периодичности, но модуль разности β -функций в начале и конце участка длиной λ много меньше среднего значения $\bar{\beta}$, предложенная методика применима для выставки и таких систем. Для произвольных магнитных структур с $\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \leq 5$ величина искажения из-за смещения H_i точек совмещения концов участков длиной λ равна

$$\langle U \rangle \leq \frac{0,01 \sqrt{\beta}}{|\sin \pi \sqrt{\beta}|} \langle H \rangle$$

Для действующих и проектируемых ускорителей коэффициент при $\langle H \rangle$ равен $0,1 \div 0,4$. Учитывая, что помимо смещения точек совмещения концов участков длиной λ , орбиту искажают ошибки выставки магнитов относительно осей участков и что максимальное искажение орбиты $v \sim \sqrt{2}$ больше среднеквадратического

можно записать

$$\langle H \rangle \approx \langle U \rangle_{полн} \quad (13)$$

5. ВЫВОДЫ

Для геодезических сетей ускорителей произвольной однородной магнитной структуры соотношение (13) означает следующее. Любой участок геодезической сети длиной $\sim 2\lambda$, с принятыми за исходные начальным и конечным пунктами, должен иметь среднеквадратическую ошибку средней точки не более $\langle U \rangle_{полн}$, а ошибки любых соседних пунктов иметь положительные и высокие $\sim 0,97$ коэффициенты корреляции.

Проектируемые геодезические сети ускорителей должны строиться с учетом структуры конкретной магнитной системы. Чтобы требования на точность геодезических сетей не были завышены, необходимо исследовать их влияние непосредственно на искажения орбиты, для чего проектировщику должна быть известна, пусть даже с невысокой точностью, матрица A . Исследовать надо влияние каждой независимой составляющей ошибок выставки, применяя корреляционную матрицу B_x с её слагаемыми. Менее точные, но более жестко коррелированные сети могут оказаться предпочтительнее. Необходимо максимально уменьшать некоррелированные части ошибок выставки. Целесообразно магниты устанавливать непосредственно от геознаков, избегать промежуточных измерений, располагать геознаки как можно ближе к выставляемым элементам.

6. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ

Жестко коррелированную однородную кольцевую геодезическую сеть можно построить, применив измерения по методу частных хорд (створов), что является дальнейшим развитием измерений в цепочке смежных вытянутых перекрывающихся треугольников. Задается хорда (створ) на 2 или более пролетов, измеряются рас-

стояния -- уклонения -- до нее от промежуточных пунктов. Затем начало и конец хорды смещается на один пункт и измеряются следующие уклонения и т.д. по всему периметру (створу). Определяются также расстояния между соседними пунктами.

Проведено математическое моделирование таких измерений для прямых створов и дуг окружности с центральным углом 45° , 90° , 180° с 200 пунктами. Получена оценка точности определения координат пунктов по радиусу при частных хордах (створах) на разное число пролетов -- от 2 до 8, и при различных соотношениях среднеквадратических ошибок измерения расстояния между пунктами σ_c и уклонений σ_h . В таблице 2 приведены среднеквадратические ошибки M_i некоторых точек и коэффициенты корреляции ошибок средней, 100-й точки $r_{i/100}$ с остальными. За единицу принята ошибка измерения уклонения σ_h .

Таблица 2.

Центральный угол	Число пролетов на частн. хорде (створе)	$\sigma_h : \sigma_c$	$\frac{M_{20}}{r_{20/100}}$	$\frac{M_{60}}{r_{60/100}}$	$\frac{M_{90}}{r_{90/100}}$	M_{100}
I	2	3	4	5	6	7
	2	не влияет	$\frac{295}{0.823}$	$\frac{689}{0.943}$	$\frac{814}{0.995}$	823
0	4	"	$\frac{51}{0.823}$	$\frac{118}{0.943}$	$\frac{140}{0.995}$	141
	8	"	$\frac{9.0}{0.821}$	$\frac{21}{0.943}$	$\frac{24.6}{0.995}$	25
45°	2	I:I	$\frac{152}{-0.34}$	$\frac{206}{-0.01}$	$\frac{139}{0.833}$	130
		I:10	$\frac{172}{0.29}$	$\frac{297}{0.64}$	$\frac{296}{0.965}$	295
		I:100	$\frac{283}{0.77}$	$\frac{657}{0.93}$	$\frac{773}{0.994}$	782

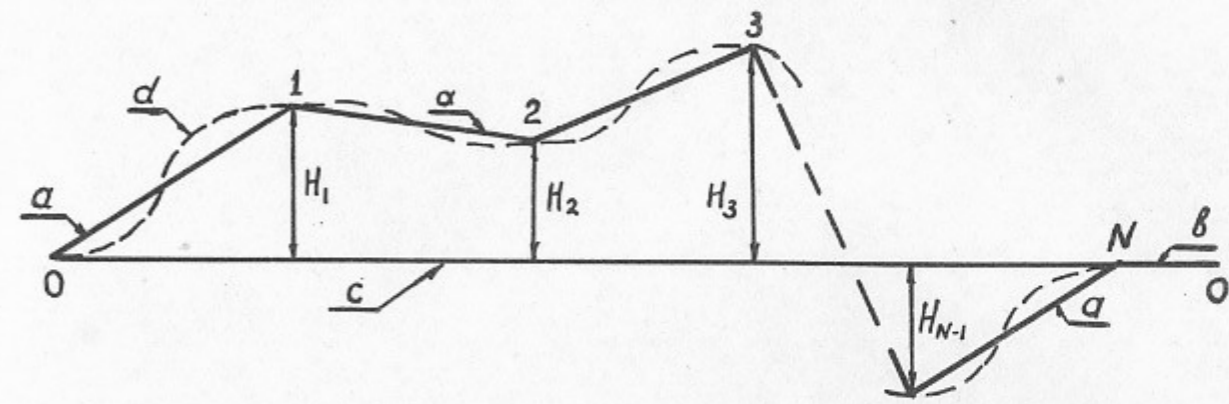
I	2	3	4	5	6	7
45°	4	I:10	$\frac{46}{0.76}$	$\frac{105}{0.92}$	$\frac{123}{0.993}$	124
		I:100	$\frac{75}{0.49}$	$\frac{175}{0.83}$	$\frac{205}{0.986}$	208
90°	2	I:10	$\frac{163}{-0.05}$	$\frac{242}{0.32}$	$\frac{198}{0.913}$	192
	4	I:10	$\frac{40}{0.59}$	$\frac{85}{0.85}$	$\frac{97}{0.986}$	98

При створных измерениях [4] достигается точность $\sim 10+30$ мкм на расстоянии 30 м. Используя предлагаемую методику измерений для дуги окружности или створа длиной ~ 1 км с ~ 200 пунктами, можно для наиболее слабой точки сети получить ошибку $\sim 1+3$ мм, что удовлетворяет вышеизложенным требованиям на точность построения геодезических сетей ускорителей. Створные измерения оптическими или лучевыми средствами позволяют применить эту методику и для построения высотной сети, закрепленной на этих же пунктах.

Автор выражает благодарность Скринскому А.Н. и Протопопову И.Я. за внимание к работе и полезные обсуждения затронутых вопросов.

Л и т е р а т у р а

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз. М., 1962, 352 с.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Пер. с франц. Атомиздат, М., 1970, 312 с.
3. Протопопов И.Я., Пупков Ю.А., Скринский А.Н. Система допусков на установку магнитов ускорителей на большие энергии. Материалы Всесоюзной научно - технической конференции "Геодезические работы при монтаже и эксплуатации технологического оборудования" 23-25 мая 1978 г. г.Новосибирск.
4. Ямбаев Х.К. Высокоточные створные измерения при строительстве ускорителей. ЦНИИАтоминформ. М., 1974, 64 с.



- α - единичные участки
- b - неединичный участок
- c - идеальная орбита
- d - искаженная равновесная орбита

Рис. I.

Работа поступила - 4 июня 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 14.VI-1979г. МН 02865

Усл. 1,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 51.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР