

43

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

М.М.Карлинер, П.Б.Лысянский, Б.М.Фомель,  
Б.П.Яковлев

**LANC-ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И  
СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ АКСИАЛЬНО -  
- СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ**

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 59

Новосибирск

**LANS** - ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕКТРО-  
МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ И СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ АКСИАЛЬНО-  
СИММЕТРИЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

М.М.Карлинер, П.Б.Лысянский, Б.М.Фомель, В.П.Яковлев

**А Н Н О Т А Ц И Я**

Предлагается усовершенствованная программа, позволяющая производить расчеты резонаторов с точностью вычисления собственных частот до  $10^{-4}$ , электромагнитных полей - с точностью до  $10^{-3}$ . Вычисление резонансных симметричных мод сводится к решению задач о возбуждении резонатора распределенным магнитным током на частоте, близкой к резонансной. Частотная фильтрация выделяет искомую собственную функцию.

Для дискретной аппроксимации волнового уравнения применяется неравномерная треугольная сетка. Схема счета дает высокую скорость сходимости.

Программа **LANS** используется при разработке резонаторов для ускорителей заряженных частиц.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Объемные резонаторы являются важным элементом СВЧ-приборов, линейных и циклических ускорителей заряженных частиц. Развитие ускорительной техники, стремление максимально поднять темп ускорения приводит к поиску новых форм резонаторов, новых материалов и технологии изготовления. Характерные размеры резонаторов для различных ускорителей отличаются на 1-2 порядка. Для сверхпроводящих резонаторов вместо механической подстройки частоты используется технологическая операция травления поверхности. Некоторые параметры резонаторов, например, напряженность электрического поля на поверхности, трудно или невозможно измерить с достаточной точностью.

В этих условиях численные методы расчета электромагнитных полей, резонансных частот и других величин являются единственным средством, адекватным задаче.

В работе [1] предлагается оценивать эффективность численных методов расчета резонаторов по следующим критериям:

- а) может ли форма области быть невыпуклой, а границы - криволинейными;
- б) является ли метод удобным для реализации в программе, т.е. требующим разумного времени на разработку, отладку программы и на работу с ней;
- в) позволяет ли метод рассчитывать высшие моды колебаний;
- г) имеется ли возможность расчета наряду с собственными значениями соответствующих собственных функций;
- д) точность расчета собственных значений и собственных функций;
- е) скорость сходимости, в частности, зависимость времени счета от требуемой точности.

Предлагаемая в настоящей работе программа LANS' по всем указанным критериям либо превосходит, либо не уступает наиболее известным программам LALA [2] и SUPERFISH [3].

Свободные колебания в резонаторе описываются однородными уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

На идеально проводящей поверхности поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют граничным условиям

$$\vec{E}_r = 0, \quad \vec{H}_n = 0. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1)  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$ , можно получить волновое уравнение относительно одной из компонент электромагнитного поля, например, относительно  $\vec{H}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

В случае гармонической зависимости полей от времени, т.е. если  $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\omega t}$ , имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_0 = K^2 \vec{H}_0 \quad (3)$$

где  $K = \omega/c$ . ( $c$  - скорость света)

Уравнение (3) при граничных условиях (2) имеет нетривиальное решение, если  $K^2$  совпадает с одним из собственных значений.

Множество собственных значений  $\{K_n^2\}$  образует счетную последовательность. Для резонаторов с идеально проводящими стенками  $K_n^2$  является вещественными положительными числами.

Можно показать [4], что

$$K_n^2 = \frac{\int |\operatorname{rot} H_n|^2 dV}{\int |H_n|^2 dV} \quad (4)$$

где индекс  $n$  означает номер моды собственных колебаний,  $\vec{H}_n$  - соответствующая собственная функция.

Если резонатор обладает аксиальной симметрией, то существуют симметричные ТМ-моды, для которых  $\vec{H}_r = \vec{H}_z = 0$  и  $\vec{E}_\varphi = 0$ . Для них уравнение (3) сводится к виду

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_\varphi - K^2 \vec{H}_\varphi = 0. \quad (5)$$

При численных расчетах удобно использовать также и другие виды симметрии резонаторов, в частности, симметрию относительно плоскости, перпендикулярной оси. На такой плоскости в зависимости от вида симметрии могут быть определены граничные условия двух типов: короткого замыкания (условия Неймана)

$$\frac{\partial \vec{H}_\varphi}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

или холостого хода (условие Дирихле)

$$\vec{H}_\varphi = 0 \quad (7)$$

Резонатор может быть возбужден объемным магнитным током, гармонически меняющимся во времени. Тогда волновое уравнение становится неоднородным

$$\text{rot rot } \vec{H} - k^2 \vec{H} = k \vec{J} \quad (8)$$

где  $\vec{J}$  - комплексная амплитуда плотности магнитного тока.

Если  $\vec{J}$  имеет только азимутальную компоненту, то наведенное магнитное поле в аксиально-симметричном резонаторе имеет также только азимутальную компоненту, и уравнение (8) можно переписать

$$\text{rot rot } \vec{H}_\varphi - k^2 \vec{H}_\varphi = k \vec{J}_\varphi \quad (9)$$

## 2. ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Для численного счета уравнение (5) подвергается дискретной аппроксимации и представляется в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$B(k^2) \vec{H} = 0, \quad (10)$$

где  $B(k^2)$  - квадратная матрица системы размерности  $N \times N$  ( $N$  - число узлов разностной сетки),  $\{k_n^2\}$  - собственные значения матрицы,  $\vec{H}$  - вектор-столбец, определяющий значение поля в узлах разностной сетки.

Нетривиальное решение однородной системы (10) существует, если

$$\det(B(k^2)) = 0 \quad (11)$$

Определяя собственные значения  $k_n^2$  из уравнений (11) и подставляя их в однородную систему (10), можно найти собственные векторы  $\vec{H}_n$ , соответствующие собственным значениям. Хотя, в принципе, такой подход дает возможность найти почти все собственные значения и собственные функции, т.е. дает решение полной проблемы собственных значений, но воспользоваться им практически очень сложно.

Во-первых, потому, что матрица  $B(k^2)$  имеет большой порядок, поскольку для достижения высокой точности вычисления необходимо использовать сетку, содержащую количество узлов  $\sim 10^3$ .

Во-вторых, высокие собственные значения матрицы все равно плохо аппроксимируют соответствующие собственные значения дифференциального оператора в силу свойств конечно-разностных методов.

Вместо полной проблемы обычно решают частичную проблему собственных значений. Такой подход подсказывается и существом конкретной задачи. Так, для задачи о резонаторах интерес представляют не все моды колебаний, а лишь некоторые, в особенности, основная мода с наименьшей собственной частотой.

а) В программе L A L A [2] для нахождения основной моды используется итерационный подход, основанный на методе последовательной верхней релаксации. Суть его заключается в следующем.

Пусть известны приближенно собственная частота и значения магнитного поля в узлах разностной сетки. Новые значения поля в узлах сетки  $\bar{H}_i^{(m+1)}$  находятся из старых - по формуле

$$\bar{H}_i^{(m+1)} = \bar{H}_i^{(m)} + \Omega (B(k^2) \bar{H})_i \quad (I2)$$

$$1 \leq i \leq N$$

где  $\Omega$  - параметр релаксации ( $0 < \Omega < 2$ ). Через несколько итераций производится коррекция  $k^2$  по формуле (4). Как показано в работе [2], это процесс может сходиться при  $k^2 \rightarrow k_{\text{MIN}}^2$ . Однако, скорость сходимости существенно зависит как от выбора начального приближения  $k_0^2$  и  $\bar{H}_i^{(0)}$ , так и от геометрии резонатора. Замечено, что в тех случаях, когда радиус резонатора много больше его длины, сходимость становится очень медленной, а при неудачном выборе начального приближения итерационный процесс начинается расходиться.

б) От этих недостатков свободен метод, положенный в основу программы *SUPERFISH* [3]. Кроме того, он позволяет находить не только основную моду колебаний, но и высшие моды. В программе *SUPERFISH* для вычисления собственных частот и электромагнитных полей в резонаторе решается неоднородная задача о возбуждении резонатора кольцевым магнитным током, имеющим ненулевое значение только в одном узле сетки. После дискретной аппроксимации уравнение (9) переходит в систему уравнений

$$B(k^2) \bar{H} = k V \bar{J} \quad (I3)$$

где  $B(k^2)$  и  $V$  - квадратные матрицы,  $\bar{H}$  и  $\bar{J}$  - векторы магнитного поля и плотности магнитного тока в узлах сетки.

С приближением  $k^2$  к резонансному значению, соответствующему какой-либо симметричной моде, матрица  $B(k^2)$  становится плохо обусловленной, а значение поля  $\bar{H}$  в узлах сетки при конечном магнитном токе возрастает неограниченно. Поэтому уравнения (I3) переписываются таким образом, чтобы поле в узле, где кольцевой магнитный ток отличен от нуля, всегда было бы равно единице на любой частоте. Тогда условию резонанса соответствует равенство магнитного тока нулю. Резонансное значение  $k^2$  находится с помощью любого поискового алгоритма типа метода

секущих или метода парабол. Этот алгоритм дает сходимость к моде со значением  $k_n^2$ , которое является ближайшим к заданному начальному значению  $k^2$ .

Недостаток программы *SUPERFISH* заключается в том, что при определении величины магнитного тока  $\bar{J}$  на каждом шаге, т.е. при каждом новом значении  $k^2$ , приходится изменять матрицу  $B(k^2)$  при неизменной правой части в уравнениях (I3). Это приводит к большим затратам машинного времени, так как на каждом шаге нужно проводить процесс исключения Гаусса для решения уравнений (I3).

в) Предлагаемая в настоящей работе программа *LANS'* основана на итерационном процессе, в котором решается неоднородная задача о возбуждении резонатора магнитными токами, распределенными в объеме резонатора. Характер начального распределения токов может быть довольно произвольным, лишь бы в его спектре содержались искомые частоты.

Рассмотрим алгоритм программы *LANS'* подробнее. Пусть известны приближенные значения собственной частоты резонатора  $\omega_0 = k_0 c'$  и магнитного поля в узлах сетки  $\bar{H}^{(0)}$ . Если задать в объеме резонатора распределение магнитных токов, плотность которых пропорциональна магнитному полю в каждом узле

$$\bar{J}^{(0)} = k_0 \bar{H}^{(0)} \quad (I4)$$

то затем, в соответствии с уравнением (I3) можно записать:

$$B(k_0^2) \bar{H}^{(1)} = k_0^2 V \bar{H}^{(0)} \quad (I5)$$

В поле  $\bar{H}^{(1)}$  мода, ближайшая по частоте к  $k_0$ , будет усилена по сравнению с более удаленными по частоте модами. Если задать новое распределение магнитных токов, пропорциональных  $\bar{H}^{(1)}$  и повторить снова всю процедуру, то в конце концов поле будет содержать только одну моду, собственная частота которой является ближайшей к  $k_0 c'$ . Обобщая (I5), запишем рекуррентную формулу

$$B(k_0^2) \bar{H}^{(m+1)} = k_0^2 V \bar{H}^{(m)} \quad (I6)$$

Формула (16) определяет систему линейных уравнений, решая которую можно найти  $\bar{H}^{(m+1)}$  по известному  $\bar{H}^{(m)}$ . Итерационный процесс, соответствующий этой формуле, быстро сходится при высоком разрешении близких по частоте мод (обратные итерации со сдвигом [5]).

После того, как итерационный процесс сойдется с необходимой точностью, собственная частота вычисляется по изменению нормы  $\|\bar{H}^{(m)}\|$  в процессе итераций.

Существенной особенностью программы *LANS'* является то, что ее алгоритм не требует изменения матрицы  $B(K^2)$  в процессе итераций. Только вначале матрица  $B(K^2)$  приводится к *LU*-форме, а затем используется в вычислениях. Это значительно сокращает время счета по сравнению с программой *SUPERFISH*.

### 3. ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В программе *LANS'*, как и в программе *SUPERFISH*, используется треугольная сетка, которая позволяет более подробно, по сравнению с прямоугольной сеткой (программа *LALA*), учитывать форму границ, а также обеспечивает более высокую точность дискретной аппроксимации дифференциальных уравнений.

Для создания неравномерной треугольной сетки применяется специальный алгоритм-генератор сетки [6], с помощью которого сетку можно сгущать в тех областях, где поле заведомо сильно меняется, и делать сетку реже там, где поле близко к однородному.

На рис. I показана "логическая сетка", состоящая из равно-сторонних треугольников. Узлы сетки пронумерованы индексами  $K$  и  $L$ , принимающими значения от 1 до  $K_{\max}$  и  $L_{\max}$ . На этой сетке задается граница области, определяемая геометрией резонатора. Все узлы сетки будем разделять по отношению к границе на внутренние, внешние и граничные.

Генератор строит в координатах  $r, z$  сетку, топологически подобную логической сетке. Координаты внутренних узлов определяются по координатам граничных. В зависимости от сложности границы координаты внутренних узлов определяются либо путем линейной интерполяции, либо с помощью итерационного процесса, аналогичного численному методу решения уравнения Лапласа [6]. Если граница области содержит прямолинейные участки, то они могут быть заданы генератору сеток только двумя точками - начальной и конечной.

Для аппроксимации волнового уравнения (9) применяется семиточечная разностная схема (рис. 2а). Предполагается, что искомое магнитное поле в каждом из шести треугольников линейно зависит от координат  $r$  и  $z$ . Уравнение (9) интегрируется по площади двенадцатиугольника, образованного прямыми, соединяющими середины сторон треугольников с их "центрами масс" (рис. 2а).

$$\int \text{rot rot } \vec{H}_\varphi d\vec{S} - k^2 \int \vec{H}_\varphi d\vec{S} = k \int \vec{J}_\varphi d\vec{S}$$

Применяя теорему Стокса, можно переписать

$$\oint \text{rot } \vec{H}_\varphi d\vec{e} - k^2 \int \vec{H}_\varphi d\vec{S} = k \int \vec{J}_\varphi d\vec{S} \quad (19)$$

Интегрирование по контуру в левой части уравнения (19) ведется

по границе двенадцатиугольника. В результате уравнение (19) для  $i$ -го узла сводится к уравнению

$$\sum_{p=0}^6 \mathcal{H}_{ip} (\omega_{ip} - \kappa^2 \nu_{ip}) = \sum_{q=0}^6 \kappa \mathcal{J}_{iq} \nu_{iq} \quad (20)$$

где коэффициент  $\nu_{ip}$  и  $\omega_{ip}$  зависят от координат вершин треугольников. Если центральная точка шестиугольника принадлежит границе Дирихле, то поле в этой точке полагается равным нулю. Коэффициенты  $\omega_{ip}$  и  $\nu_{ip}$  полагаются также равными нулю за исключением соответствующего центральной точке коэффициента  $\omega_{i0}$ , который равен единице. Это обеспечивает выполнение граничного условия - равенства поля  $\vec{H}_\psi$  нулю в граничном узле сетки.

Если же центральная точка шестиугольника принадлежит границе Неймана, то интегрирование по площади ведется по той части двенадцатиугольника, которая принадлежит внутренней области резонатора. Интегрирование по контуру должно производиться по границе  $0-1'-2'-3'-4'-0$  (рис.2б). Так как на границе вектор  $\text{rot } \vec{H}_\psi = \omega \epsilon \vec{E}$  перпендикулярен поверхности резонатора (в данном случае поверхности с граничными линиями  $4-0$  и  $0-1$ ), то

$$\int_{4'-0-1'} \text{rot } \vec{H}_\psi d\vec{e} = 0$$

Это означает, что разностное уравнение для узлов на границах такого типа будет идентично разностным уравнениям для внутренних узлов, за исключением того, что учитывается вклад в интегралы только от внутренних треугольников.

Разностные уравнения для внешних точек записываются аналогично разностным уравнениям для граничных точек на границе Дирихле.

Очень удобным свойством разностных уравнений, записанным в данной сетке, является то, что индексы  $K$  и  $L$  вершин шестиугольника (рис.1) отличаются от индексов  $K_0$  и  $L_0$  центральной точки не более, чем на 1.

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Если уравнение (20) записать для всех узлов сетки, то получится соотношение

$$B(\kappa^2) \vec{\mathcal{H}} = \kappa V \vec{\mathcal{J}} \quad (21)$$

где  $B(\kappa^2) = W - \kappa^2 V$ ,  
 $W$  и  $V$  - матрицы, составленные из коэффициентов  $\omega$  и  $\nu$  соответственно,  $\vec{\mathcal{H}}$ ,  $\vec{\mathcal{J}}$  - векторы-столбцы значений магнитного поля и плотности магнитных токов в узлах сетки, имеющие размерность  $N = K_{\text{MAX}} \times L_{\text{MAX}}$  (сетка содержит  $K_{\text{MAX}}$  узлов по  $Z$  координате и  $L_{\text{MAX}}$  узлов по  $r$  - координате). Квадратная матрица  $B(\kappa^2)$  является трехдиагональной, причем элементами ее являются малые матрицы размерности  $L_{\text{MAX}} \times L_{\text{MAX}}$ . Малые матрицы, стоящие на диагонали матрицы  $B(\kappa^2)$ , имеют три отличные от нуля диагонали, остальные малые матрицы - по две.

Пусть  $\omega_n = \kappa_n \cdot c$  - собственная частота искомой моды с номером  $n$ , а  $\omega_{0n} = \kappa_{0n} \cdot c$  - ее начальное приближенное значение. Пусть также в объеме резонатора задано распределение магнитных токов с плотностью  $\vec{\mathcal{J}} = \kappa_{0n} \vec{\mathcal{H}}^{(0)}$ . Тогда из (21) следует

$$(W - \kappa_{0n}^2 V) \vec{\mathcal{H}}^{(1)} = \kappa_{0n}^2 V \vec{\mathcal{H}}^{(0)} \quad (22)$$

Подставляя в найденный из (22) вектор  $\vec{\mathcal{H}}^{(1)}$  вновь в правую часть (21), можно продолжить итерационный процесс. Для  $m$ -й итерации получим

$$(W - \kappa_{0n}^2 V) \vec{\mathcal{H}}^{(m+1)} = \kappa_{0n}^2 V \vec{\mathcal{H}}^{(m)} \quad (23)$$

Пусть  $\vec{\Psi}_i$  - собственные векторы  $B(\kappa^2)$ , нормированные на 1, соответствующие собственным значениям  $\kappa_i^2$ . Векторы  $\vec{\Psi}_i$  с некоторой степенью точности описывают собственные моды резонатора. Векторы  $\vec{\mathcal{H}}^{(m+1)}$  и  $\vec{\mathcal{H}}^{(m)}$  могут быть представлены в виде разложения по  $\{\vec{\Psi}_i\}$ :

$$\vec{\mathcal{H}}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^N a_i^{(m+1)} \vec{\Psi}_i \quad (24)$$

$$\vec{\mathcal{H}}^{(m)} = \sum_{i=1}^N a_i^{(m)} \vec{\Psi}_i$$





и далее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & & \\ & 1 & h_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & h_{K_{\max}-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{H}_{K_{\max}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{K_{\max}} \end{pmatrix} \quad (34)$$

где  $h_j = d_j^{-1} c_j$ ,  $p_j = d_j^{-1} F_j = d_j^{-1} G_j - d_j^{-1} e_j$ ,  $F_{j-1} = f_j G_j - q_j P_{j-1}$ ,  
 $f_j \equiv d_j^{-1}$ ,  $q_j \equiv f_j b_j$

Тогда

$$\mathcal{H}_{K_{\max}} = P_{K_{\max}}, \quad \mathcal{H}_j = P_j - h_j P_{j-1} \quad (1 \leq j < N)$$

Таким образом,  $\mathcal{H}$  вычисляется через матрицы  $e_j, h_j, g_j$ , для нахождения которых требуется обратить матрицы  $d_j$  один раз. Эти матрицы можно разместить в памяти ЭВМ на месте  $a_j, b_j, c_j$  и использовать в дальнейшем для решения уравнения (21) с другими правыми частями. Как видно, для хранения матрицы  $B(K^2)$  требуется память  $(3K_{\max} - 2) \times L_{\max}^2$  машинных слов. Поэтому, если задача содержит большое число узлов ( $\sim 10^3$ ), необходимо использовать дисковую память.

#### 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАТОРОВ

После того, как в объеме резонатора найдено распределение магнитного поля и вычислена резонансная частота искомой моды, можно в каждом треугольнике определить компоненту электрического поля (радиальную и аксиальную) из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H}_n = \omega_n \epsilon \vec{E}_n$$

поскольку магнитное поле внутри каждого треугольника, по предположению, линейно зависит от координат  $r$  и  $z$ . Электрические поля в узлах вычисляются как средние по прилегающим треугольникам.

Помимо электромагнитных полей и собственных частот в программе предусмотрено вычисление следующих величин, характеризующих резонатор:

- а) перенапряжение, т.е. отношение максимального значения электрического поля по поверхности резонатора к эффективному значению ускоряющего поля на оси.

$$\sigma = E_{\text{пов. макс}} / E_{\text{эфф}}$$

$$E_{\text{эфф}} = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_z(z) \cos(\kappa z) dz$$

где  $L$  - длина ускоряющего промежутка,  
 $E_z(z)$  - аксиальная компонента электрического поля на оси резонатора,

- б) коэффициент пролета

$$T = \int_0^{L/2} E_z(z) \cos(\kappa z) dz / \int_0^{L/2} E_z(z) dz$$

- в) добротность

$$Q = \frac{2}{\delta} \int |H|^2 dV / \int |H|^2 dS$$

где  $\delta$  - толщина скин-слоя,

- г) характеристические сопротивления

$$\rho = \left| \int_0^{L/2} E_z(z) dz \right|^2 / \omega \mu \int |H|^2 dV$$

- д) шунтовое сопротивление

$$R_{\omega} = \rho \cdot Q$$

#### 7. ПАРАМЕТРЫ ПРОГРАММЫ LANS' И ТЕСТЫ

Погрешность вычисления электромагнитных полей и собственных частот резонаторов зависит от числа узлов сетки как  $\alpha / N^2$  где  $N$  - полное число узлов. Коэффициент  $\alpha$  в свою очередь зависит от конфигурации резонатора.

Чем сложнее форма резонатора, тем большее количество узлов сетки требуется для получения заданной точности. Как показал опыт работы, для получения точности вычисления собственной

частоты основной моды  $\sim 10^{-4}$  обычно требуется 500-2500 узлов сетки. Точность вычисления магнитного поля при этом  $\sim 10^{-3}$ .

Время решения задачи зависит квадратично от количества узлов сетки  $N$ , но слабо зависит от числа итераций, так как время, необходимое для обращения матриц  $d_j$  значительно превышает время решения уравнения (21) с помощью готовых матриц  $f_j, h_j, g_j$ . При  $N = 1600$  это время составляет  $\sim 20$  мин на ЭВМ "Одра-1305".

Для тестирования программы и проверки точности расчета собственных частот и полей, а также интегральных характеристик резонаторов были проделаны расчеты цилиндрических и сферических резонаторов.

Точность расчета частоты мод EO10 и EO11 цилиндрического резонатора равняется  $10^{-4}$  при числе узлов, равном 400. Точность вычисления магнитных полей  $\sim 10^{-3}$ , а точность вычисления характеристического сопротивления  $\sim 10^{-2}$ . Для моды EO10 сферического резонатора точность вычисления частоты с тем же числом узлов составила  $4 \cdot 10^{-4}$ , точность вычисления магнитных полей  $2 \cdot 10^{-3}$ , и характеристического сопротивления -  $3 \cdot 10^{-2}$ .

При помощи программы LANS' был проведен расчет ускоряющего резонатора накопителя ВЭП-4. Его конфигурация показана на рис.3. Ниже приведены расчетные характеристики, а также известные результаты измерений.

	Расчетные значения	Измеренные значения
$f$ (частота), МГц	181.14	180.95
$\rho$ , Ом	220	210
$R_w$ , Мом	13.2	10.5
$Q$	59000	50000
$T$	0.818	0.82

Сетка содержала 1600 узлов. Время счета  $\sim 20$  мин. (Одра-1305).

На рис.4 показан график изменения электрического поля вдоль поверхности резонатора. Для данной конфигурации перенапряжение равно 2.1.

## 8. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА РЕЗОНАТОРОВ ПРОГРАММОЙ LANS'

а) При помощи программы LANS' изучалась возможность получения больших темпов ускорения электронных пучков структурой на стоячей волне, описанной в работе [7]. В этой структуре поля в соседних резонаторах сдвинуты на  $\pi/2$ . Программа позволила провести оптимизацию формы резонатора с целью уменьшить перенапряжение на стенках, а также вычислить коэффициенты связи между ускоряющими резонаторами через центральное отверстие (рис.5). Для определения коэффициента связи вычисляются частоты симметричных мод 0 и  $\pi$ . Граничные условия на левой и правой границах полупериода структуры устанавливаются в соответствии с условиями короткого замыкания. Программа LANS' эффективно разделяет близкие по частоте моды 0 и  $\pi$  для которых относительная разность частот (т.е. коэффициент связи) составляла всего  $10^{-3}$ . Естественно, для этого потребовалась большая точность вычисления частоты. Она составила  $10^{-4}$  при числе узлов сетки, равном 2500. Расчет моды  $\pi/2$  потребовал 4 итерации. Граничные условия на одной границе в этом случае соответствовали условиям короткого замыкания, а на другой границе - холостого хода. На рис.6 показана зависимость электрического поля на стенках резонатора, нормированная на эффективную напряженность электрического поля. Как видно из графика, для этой конфигурации максимальное перенапряжение составляет 1.6.

б) Другой характерный пример применения программы LANS', на котором видны ее возможности - это расчеты бипериодической ускоряющей структуры на стоячей волне для накопителя ВЭП-4. Эти расчеты включали оптимизацию геометрии резонаторов по перенапряжению, подбор их формы и размеров в соответствии с нужной частотой, а также определение размеров центрального отверстия для обеспечения требуемого коэффициента связи между резонаторами связи и ускоряющими резонаторами. На рис.7 показана конфигурация полупериода структуры (ускоряющего резонатора и резонатора связи), выбранная на основе расчетов программой LANS'. Ниже в таблице приведены характеристики ускоряющего резонатора для моды  $\pi/2$ .

1. Рабочая частота  $f_{\pi/2} = 1179$  МГц
2. Характеристическое сопротивление  $\rho = 67$  Ом

3. Пролетный фактор  $T = 0.78$
4. Перенапряжение на стенках  $E_{\text{макс}}/E_{\text{эфф}} = 2.1$
5. Коэффициент связи между резонатором связи и ускоряющим резонатором  $K_{\text{св}} = 4.3\%$ .

На рис.8 показан график изменения электрического поля вдоль поверхности резонатора (вблизи диафрагмы). Число узлов сетки составило 2500. Для расчета моды  $\pi/2$  потребовалось 4 итерации.

## С о д е р ж а н и е

1. В в е д е н и е.
2. Проблема собственных значений и собственных функций.
3. Дискретная аппроксимация волнового управления.
4. Вычисление собственной частоты и магнитного поля.
5. Способ решения системы линейных уравнений.
6. Вычисление электрического поля и интегральных характеристик резонаторов.
7. Параметры программы *LANS'* и тесты.
8. Примеры расчета резонаторов программой *LANS'*.



Рис. 8

Л и т е р а т у р а

1. *Davies J.B., Proc. IEEE, Jan., v.119, N1, 33-37 (1972)*
2. *H.C. Hoyt, D.D. Simmonds, W.F. Rich, RSI, 37, N6, 755-762 (1966)*
3. *K. Halbach, R.F. Holsinger, Part. Acc., vol. 7, 213-222 (1976)*
4. *Б.З.Капенеленбаум, Высокочастотная электродинамика, Наука, 1966.*
5. *Н.Н.Калиткин, Численные методы, Наука, 1978.*
6. *A.W. Winslow, Journal of Computational Physics, v.2, 149, (1967)*
7. *V.A. Vaquine, IEEE Trans. on Nuclear Science, N3 (1977)*

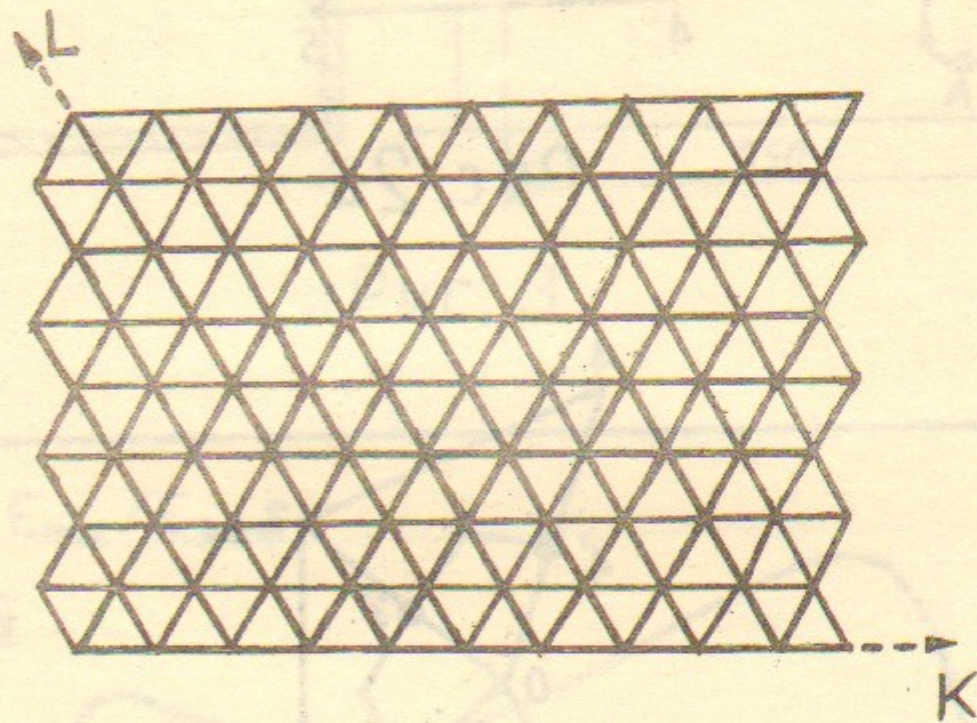


Рис. 1

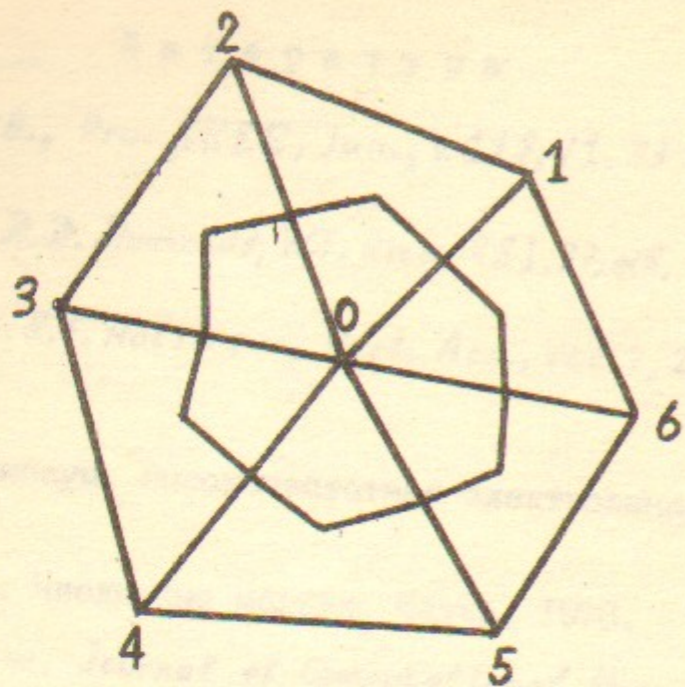


Рис. 2а

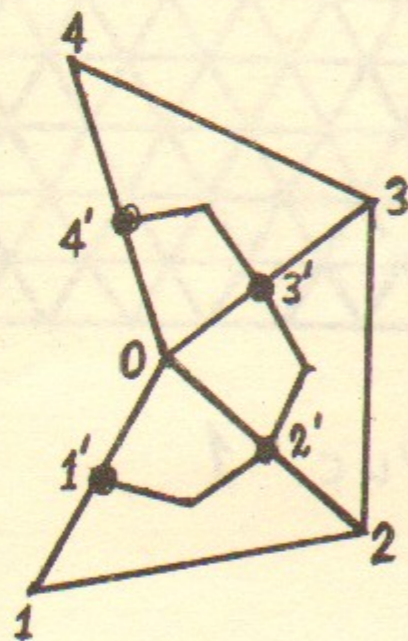


Рис. 2б

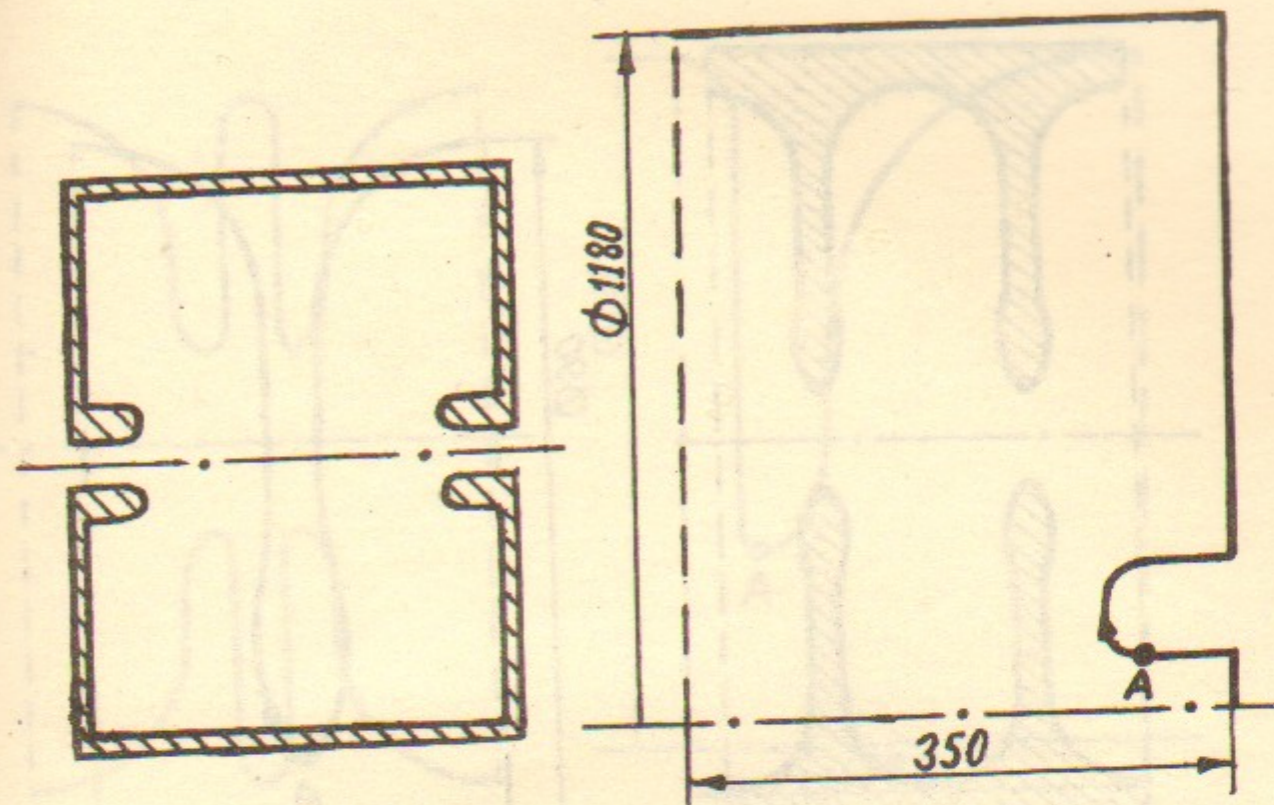


Рис. 3

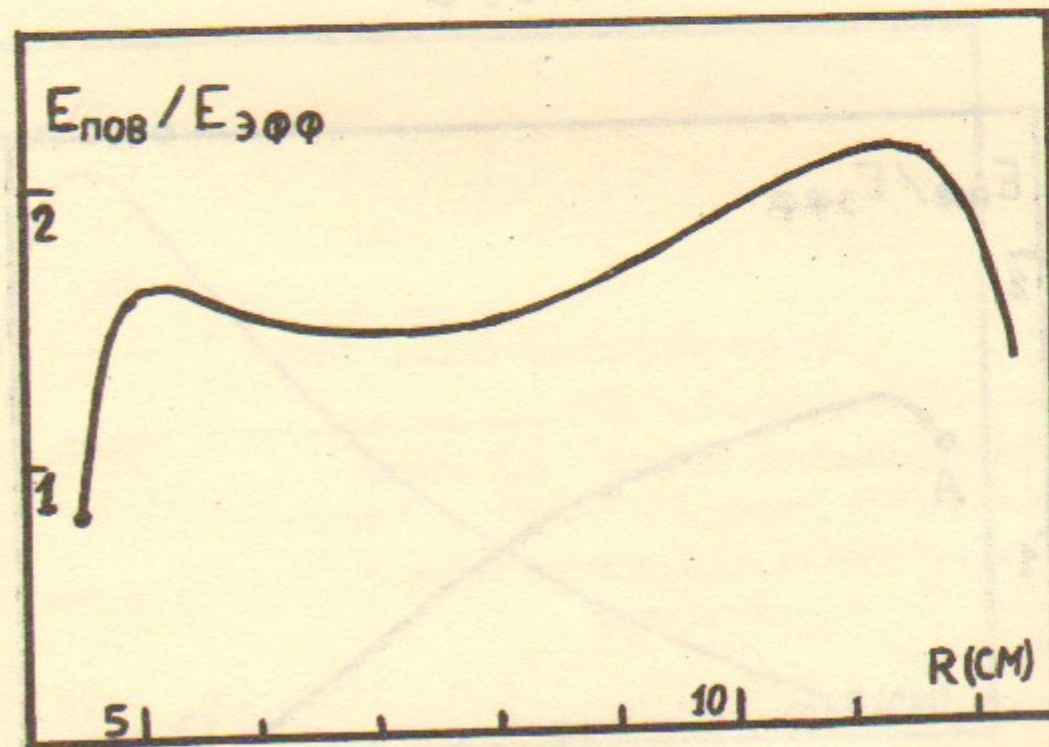


Рис. 4

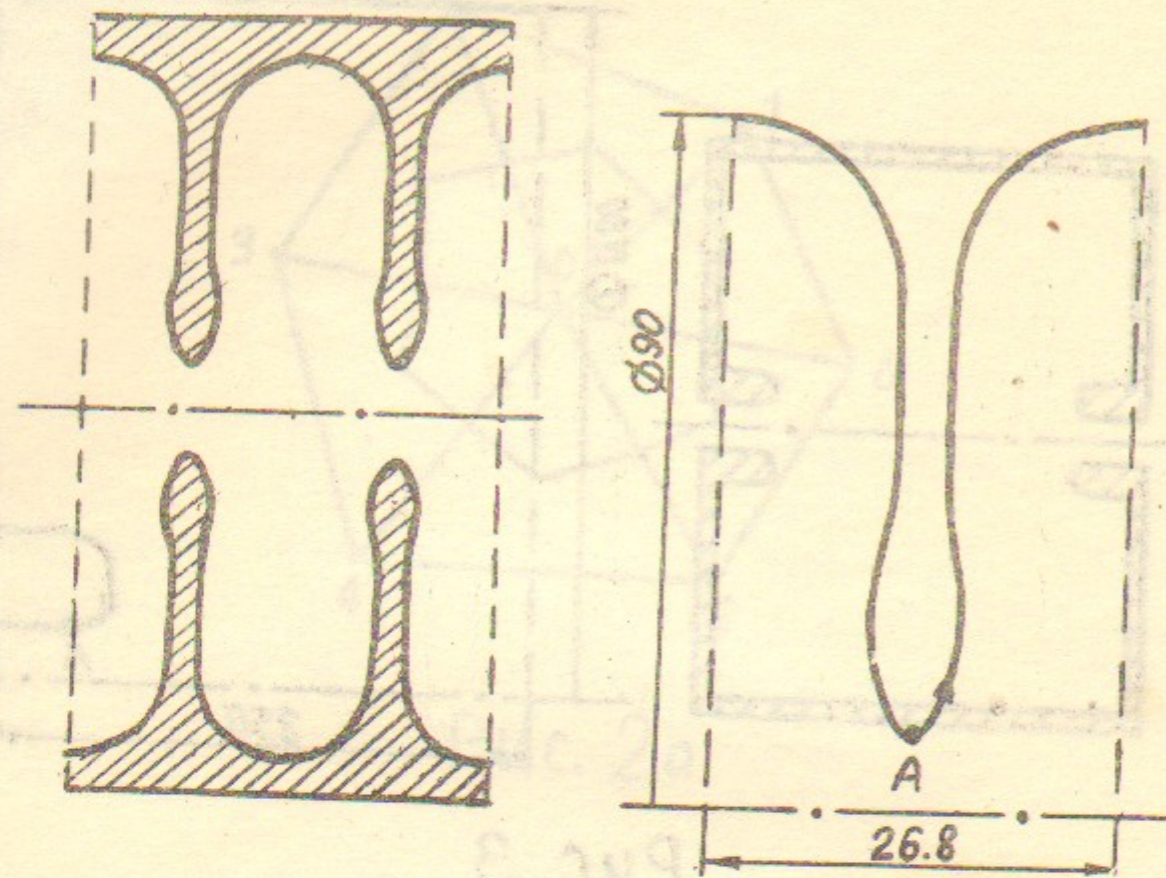


Рис. 5

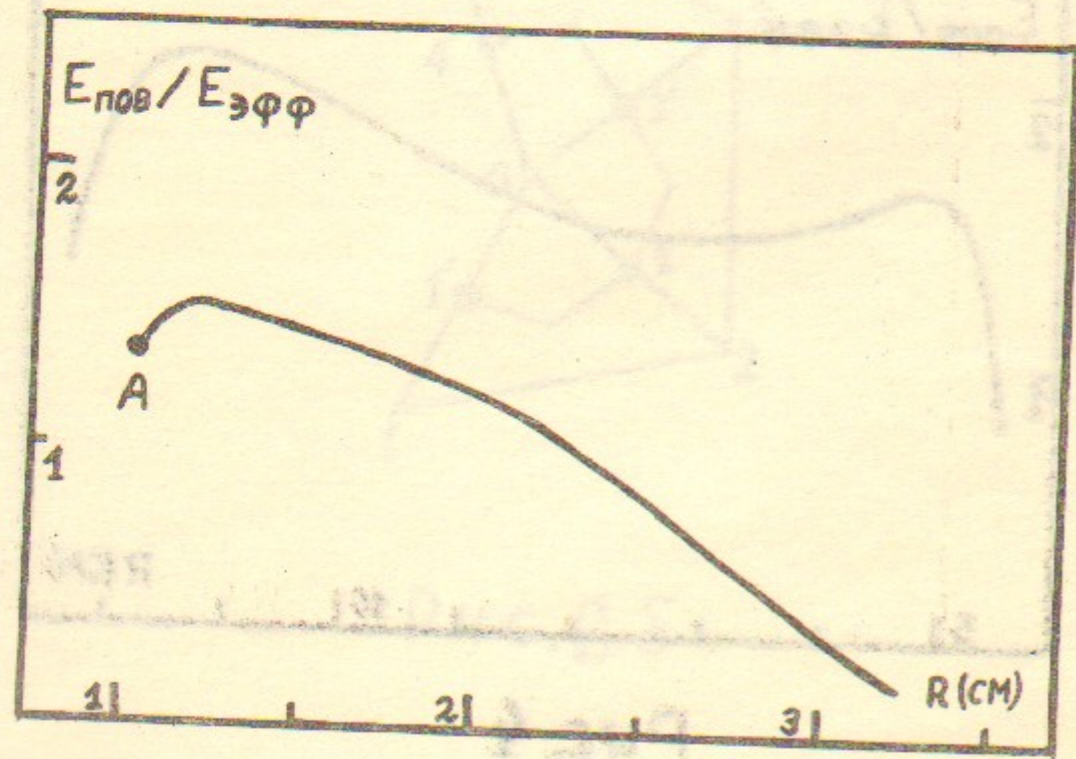


Рис. 6

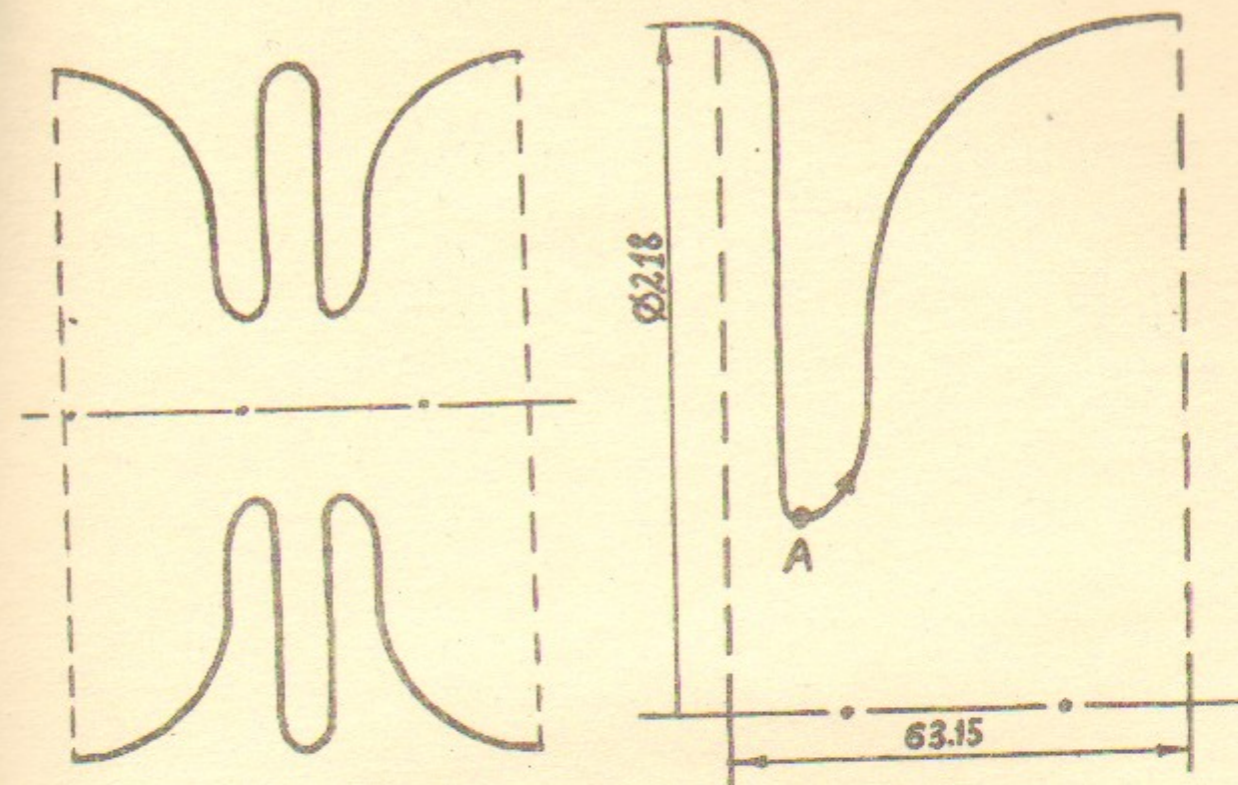


Рис. 7

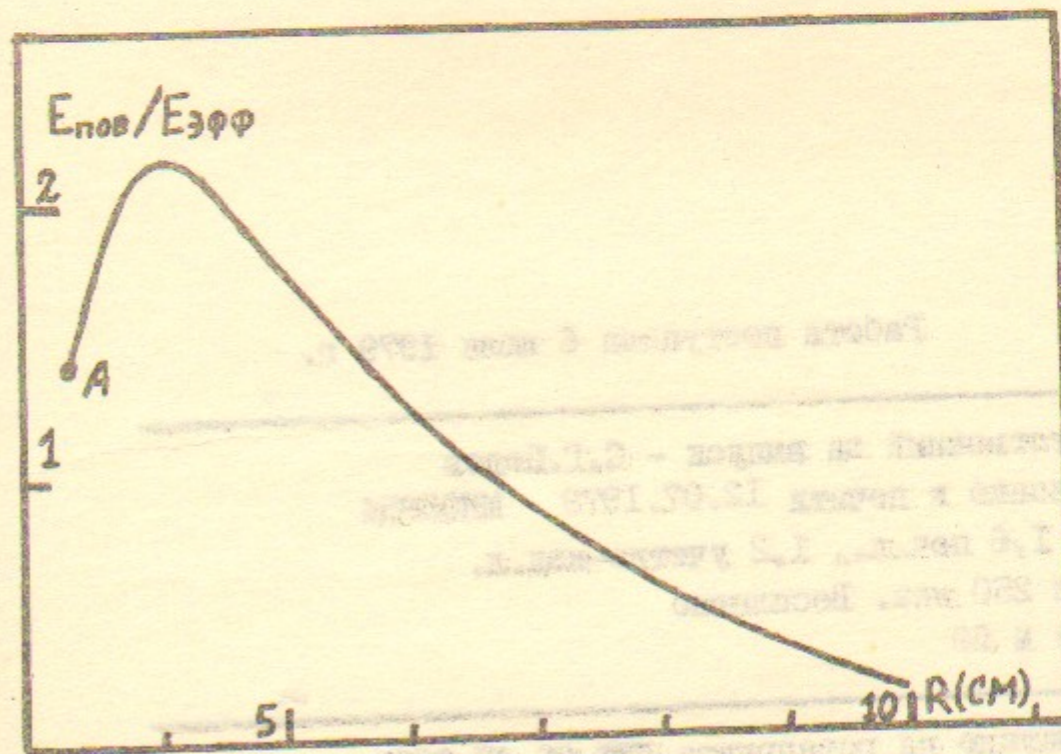


Рис. 8