Уск. 61. 45

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

СО АН СССР

В.Н.Байер, Э.А.Кураев, В.С.Фадин

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГЛЮОННЫХ СТРУЙ ПРИ e^+e^- СОУДАРЕНИИ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79-61

Новосибирск

ОБ ОБРАЗОВАНИИ ГЛЮОННЫХ СТРУЙ ПРИ e^+e^- СОУДАРЕНИИ

В.Н.Байер, Э.А.Кураев, В.С.Фадин

АННОТАЦИЯ

Изучены процессы с образованием трех глюонных струй в канале аннигиляции и двух глюонных струй в канале рассеяния. Рассмотрение проведено в низшем порядке теории возмущений, используя амплитуду рассеяния света светом. Производится сравнение с процессом образования кварковых струй в аналогичных ситуациях.

Institute of Nuclear Physics,Novosibirsk,630090,USSR

ON PRODUCTION OF GLUON JETS

AT e^-e^+ ANNIHILATION

V.N.Baier,V.S.Fadin,E.A.Kuraev

A b s t r a c t

The cross sections of production of three gluons through quark loop (Fig.1(a)) at e^-e^+annihilation (see Eqs.(10),(11),(6) and (12),Fig.3) and two gluons in two photon channel(see Eqs.(15)-(17),Fig.1(B))have been found in the lowest order of QCD.The expressions for photon-photon scattering amplitudes have been extensively used.The results obtained are compared with cross sections of processes $e^-e^+ \to q\bar{q}g$ (Eq.(14)) and $e^-e^+ \to e^-e^+q\bar{q}$ (Eq.(18)).It is shown,that

$$\frac{d\sigma(e^-e^+ \to e^-e^+2g)}{d\sigma(e^-e^+ \to e^-e^+q\bar{q})} \sim 0.1$$

В последние годы собран обширный экспериментальный материал по образованию двух струй адронов при e^+e^- аннигиляции. Этот процесс был предсказан кварк-партонной моделью как $e^+e^- \to \bar{q}q \to$ 2 струи. В пользу такой интерпретации говорит угловое распределение $\sim (1+\cos^2\vartheta)$ по углу ϑ между осью струи и линией соударения начальных частиц и некоторые другие особенности струй [I-2] . В настоящее время этот процесс широко обсуждается в рамках квантовой хромодинамики (КХД) (см., например, [3]). Имеются первые указания о наблюдении 3-х глюонных струй, образующихся при распаде связанного состояния системы тяжелых кварков (Υ - резонанс) [4] . Если КХД является адекватным описанием таких процессов (по крайней мере их жесткой части, где применима теория возмущений), то глюонные струи должны образовываться и во внерезонансной области.

В настоящей работе изучены процессы с образованием глюонов при e^+e^- столкновениях в низшем порядке теории возмущений по электромагнитной α и сильной α_s константам связи. Образование глюонов происходит посредством рождения и последующей аннигиляции кварк-антикварковой пары в промежуточном состоянии. При расчете полезным оказывается детальное рассмотрение нелинейных процессов квантовой электродинамики (КЭД), выполненное группой Де Толлиса [5] .

В разделе I рассматривается образование трех глюонов в однофотонном канале при аннигиляции e^+e^-. В разделе 2 приведено для сравнения сечение образования в аннигиляционном канале состояния кварк-антикварковой пары с дополнительным глюоном. В разделе 3 исследовано образование двух глюонов в канале рассеяния (двухфотонный механизм) и образование аналогичным путем кварк-антикварковой пары, разлетающейся на большие углы в $\mathcal{U}$-системе. В приложении I приводятся спиральные амплитуды рассеяния света светом, переписанные в удобном для нашей задачи виде. В приложении II с помощью этих спиральных амплитуд вычислен вклад их мнимой части, отвечающей промежуточному состоянию с e^+e^- парой, в сечение образования трех фотонов. Этот результат находится в соответствии с формулой Оре-Пауэлла для сечения аннигиляции нерелятивистской e^+e^- пары в три фотона.

I. Амплитуда образования трех глюонов фотоном (см. рис. Iа) может быть получена из вклада соответствующих диаграмм КЭД добавлением фактора $Sp\, t^a t^b t^c = \frac{1}{4}(d^{abc} + i f^{abc})$, учитывающего цветовые степени свободы (цветная группа $SU(3)$), где $t^a = \lambda^a/2$ – генераторы группы, d^{abc} (f^{abc}) – симметричная (антисимметричная) структурная константа. В сумме амплитуд члены содержащие f^{abc} выпадают, поскольку в силу антисимметрии f^{abc} взаимно компенсируются вклады, отвечающие противоположным направлениям фермионных линий в замкнутой петле (рис. Iа). Таким образом выражение для дифференциального сечения образования трех глюонов за счет механизма превращения тяжелого фотона в кварк-антикварковую петлю определенного аромата будет отличаться от аналогичного выражения в КЭД лишь дополнительным множителем $(d^{abc})^2/16$. Дальнейшее рассмотрение мы будем проводить в рамках КЭД для случая когда фермион в промежуточном состоянии есть электрон, а специфику квантовой хромодинамики (КХД) учтем в конечном выражении.

В наиболее полной форме нелинейные процессы КЭД типа рассеяния света светом были рассмотрены в работе Константини, Де Толлиса и Пистони [5], чьими результатами мы здесь воспользуемся.

Дифференциальное сечение имеет вид:

$$d\sigma = \frac{\alpha^5}{2^{13}\pi^4 \varepsilon^6} \left(\sum |M|^2\right) \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_2 - k_3 - k_4) \frac{d^3k_2\, d^3k_3\, d^3k_4}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} \tag{I}$$

где ε – энергия электрона в Ц – системе начальных частиц

$$\sum |M|^2 = 2 \sum_{\tau\sigma} \left(|M^{\tau\sigma}_{+++}|^2 + |M^{\tau\sigma}_{++-}|^2 + |M^{\tau\sigma}_{+-+}|^2 + |M^{\tau\sigma}_{-++}|^2 \right)$$

$$M^{\tau\sigma}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \bar{v}^{\tau}(p_+) \gamma^{\mu} u^{\sigma}(p_-)\, G_{\mu}^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \tag{2}$$

индексы τ, σ отвечают поляризациям начальных электрона и позитрона, величина $G_{\mu}^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ есть ток распада тяжелого фотона в три реальных фотона со спиральностями $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и энергиями $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ ([5], (64)):

$$G_{\mu}^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \frac{i}{4\sqrt{2}\Delta} \Big\{ E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234) \left(k_3 - \frac{\nu_3}{\nu_2} k_2\right)_{\mu} - E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_4\lambda_3}(1243) \cdot$$

$$\cdot \left(k_4 - \frac{\nu_4}{\nu_2} k_2\right)_{\mu} + i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\, q^{\alpha} k_2^{\beta} k_3^{\gamma} E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234) \Big\}; \tag{3}$$

$$q = p_+ + p_-, \quad q^2 = 4\varepsilon^2, \quad \Delta = \varepsilon^6 (1-\nu_2)(1-\nu_3)(1-\nu_4),$$

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{\varepsilon}, \quad r = (1-\nu_2)\frac{\varepsilon^2}{m^2}, \quad s = (1-\nu_3)\frac{\varepsilon^2}{m^2}, \quad t = (1-\nu_4)\frac{\varepsilon^2}{m^2},$$

величины $E^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ (I234) есть спиральные амплитуды, найденные в [5]. Чтобы получить распределение по долям энергий конечных фотонов (распределения по угловым переменным могут быть получены из формул (3), (4) работы [6]), заметим, что в силу сохранения тока усредненный по угловым переменным тензор $G_{\mu}^{*} G_{\nu}$ должен иметь вид

$$\overline{G_{\mu}^{*} G_{\nu}} = \frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2}\right) G_{\lambda} G_{\lambda}^{*} \tag{4}$$

Свертка $G_{\lambda} G_{\lambda}^{*}$ есть уже функция только долей энергий ν_i. Интегрирование фазового объема по угловым переменным дает:

$$\int \frac{d^3k_2\, d^3k_3\, d^3k_4}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - k_2 - k_3 - k_4) = 8\pi^2 \varepsilon^2 d\nu_2\, d\nu_3\, d\nu_4\, \delta(2 - \nu_2 - \nu_3 - \nu_4)$$

В результате распределение по долям энергий фотонов будет

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^- \to 3\gamma}}{d\nu_3\, d\nu_4} = \frac{\alpha^5}{3!} \frac{1}{12\pi^2 \varepsilon^2} \left[R(234) + R(324) + R(423) \right] \tag{5}$$

где

$$R(234) = R(243) = \frac{1}{3} \Big| E^{(2)}_{-++}(234) \Big|^2 + \Big| E^{(2)}_{+++}(234) \Big|^2 + \frac{\nu_2}{\nu_3 \nu_4 (1-\nu_2)} \Big| E^{(1)}_{-++}(324) \Big|^2 + \frac{1}{\nu_2^2} \Big| E^{(1)}_{+++}(234) + E^{(1)}_{+++}(243) \Big|^2 + \frac{(1-\nu_3)(1-\nu_4)}{\nu_2^2 (1-\nu_2)} \Big| \frac{E^{(1)}_{+++}(234)}{1-\nu_3} - \frac{E^{(1)}_{+++}(243)}{1-\nu_4} \Big|^2, \tag{6}$$

множитель I/3! учитывает тождественность фотонов, а безразмерные величины

$$\varepsilon^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)=\frac{1}{8\varepsilon^2}E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234),\ \varepsilon^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}=\frac{1}{4}E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \tag{7}$$

приведены в приложении I.

Обсудим изменения, которые необходимо внести для случая аннигиляции в три глюона. Во-первых это учет цветовых степеней свободы. Для группы $SU(3)$ по цвету это дает множитель

$$\sum_{a,b,c}\frac{1}{16}d^2_{abc}=\frac{5}{6} \tag{8}$$

Во-вторых, константа связи глюона с кварком должна быть взята α_s вместо α, что дает множитель

$$\left(\alpha_s/\alpha\right)^3 \tag{9}$$

Наконец, необходимо просуммировать по ароматам кварков. Это суммирование должно быть выполнено при нахождении амплитуды.

Распределение по долям энергий глюонов в процессе $e^+e^-\to 3g$ в результате будет

$$d\sigma^{e^+e^-\to 3g}=\frac{\alpha^2\alpha_s^3}{3!}\frac{5}{72\pi^2\varepsilon^2}\,d\nu_2 d\nu_3 d\nu_4\,\delta(2-\nu_2-\nu_3-\nu_4)\cdot \tag{10}$$
$$\cdot\left[\tilde{R}(234)+\tilde{R}(324)+\tilde{R}(432)\right]$$

где $\tilde{R}$ (234) дается правой частью формулы (6) с заменой

$$\varepsilon^{(i)}_{\lambda_a\lambda_b\lambda_c}=\sum_q Q_q\,\varepsilon^{(i)}_{\lambda_a\lambda_b\lambda_c}(abc) \tag{11}$$

Здесь Q_q – заряд кварка в единицах e, суммирование идет по ароматам кварков, причем в q-ом члене суммы в амплитуде $\varepsilon^{(i)}_{\lambda_a\lambda_b\lambda_c}(abc)$ в качестве m должна быть взята масса кварка m_q. Обсудим зависимость спиральных амплитуд от-

вечающих кваркам аромата q в промежуточном состоянии от отношения массы кварка к энергии. Для случая очень тяжелых кварков $m_q/\varepsilon\gg 1$, спиральные амплитуды $\varepsilon^{(i)}_{\lambda_a\lambda_b\lambda_c}$ пропорциональны $(\varepsilon/m_q)^4$, что есть следствие калибровочной инвариантности амплитуды рассеяния света светом. Для случая легких кварков $(m_q/\varepsilon\to 0)$ спиральные амплитуды становятся вещественными и не содержат "массовых сингулярностей" типа $\ln(m_q/\varepsilon)$, т.е. конечны при $m_q/\varepsilon = 0$. Это обстоятельство – следствие теоремы Ли-Науэнберга о сокращении "массовых сингулярностей". Зависимость величины

$$R\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)=\int d\nu_2 d\nu_3 d\nu_4\,\delta(2-\nu_2-\nu_3-\nu_4)\left[R(234)+R(324)+R(423)\right]$$

вклада промежуточного состояния кварка аромата q в полное сечение от параметра m/ε представлена на рис.2.

В силу сказанного легко видеть, что вклады в амплитуду (11) от легких кварков (u,d,s) для энергий пучка порядка нескольких ГэВ взаимно компенсируются, поскольку сумма их зарядов равна нулю,

$$\sum_{q=u,d,s}Q_q=0$$

и эффективно дают вклад в сечение образования трех глюонных струй только промежуточные состояния с тяжелыми кварками, масса которых меньше ε.

Чтобы иметь представление о порядке полного сечения образования трех глюонных струй и о характере инклюзивного распределения по доле энергии одного глюона мы вычислим соответствующие величины для случая промежуточного состояния с одним ароматом кварков при $m_q/\varepsilon\ll 1$. В пределе $m_q/\varepsilon = 0$ выражение для R (234) упрощается. Оно приведено в приложении (П.6).

Подставляя (П.6) в (10) и взяв интеграл по $\nu_{3,4}$, получаем инклюзивное сечение по доле энергии одного из глюонов $x\equiv\nu_2=\omega_2/\varepsilon$. При произвольном x выражении для этого сечения очень громоздко, так что мы ограничимся графическим изображением результата, приведенного на рис.3. В предельных случаях вблизи x = 0 и x = I, сечение имеет сравнительно простой вид:

$$F(x)=\left(\frac{5\alpha^2\alpha_s^3 Q_q^2}{432\pi^2\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{d\sigma^{e^+e^-\to 3g}}{dx}, \tag{I2}$$

$$F(x)=\begin{cases}4x(\ln^2 x-2\ln x+3), & x\ll 1\\ 8(1+\zeta_2-2\zeta_3)\ln^2(1-x)+8(5-\zeta_2-5\zeta_3+\\ +\zeta_2^2)\ln(1-x)+8\left(\frac{31}{4}-\zeta_2-5\zeta_3+\zeta_2^2-2\zeta_2\zeta_3+3\zeta_5\right)\simeq\end{cases}$$

$$\simeq 1{,}93\ln^2(1-x)+0{,}40\ln(1-x)+16, \quad (1-x)\ll 1$$

где

$$\zeta_2=\frac{\pi^2}{6}\simeq 1{,}6449,\ \zeta_3\simeq 1{,}2021,\ \zeta_5=1{,}0369$$

Полное сечение образования трех глюонов дается формулой (I0), куда надо подставить

$$\int dv_2\, dv_3\, dv_4\, \delta(2-v_2-v_3-v_4)\left[R(234)+R(423)+R(342)\right]= \tag{I3}$$

$$=200\zeta_5-8\pi^2\zeta_3+\frac{7}{15}\pi^4-128\zeta_3+\frac{41}{3}\pi^2-124=14{,}954\simeq 15$$

По принятой в КХД идеологии "мягкого обесцвечивания" три струи адронов, образуемых тремя глюонами, несут отпечаток исходных угловых и энергетических распределений глюонов, полученных в этом разделе. Можно ожидать, что характеристики адронных струй, получающихся из глюонов, отличны от соответствующих свойств кварковых струй, в частности в них должны быть более высокая множественность (см., например, [3]).

2. Приведем для сравнения распределение по долям энергий конечных частиц в процессе аннигиляции e^+e^- в кварк-антикварковую пару аромата q с дополнительным глюоном, просуммированное по цветовым состояниям конечных частиц (рис. Iб), которые также дают трехструйные конфигурации

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-\to q\bar q g}}{dv_+dv_-}=4\frac{\alpha^2\alpha_s}{12\varepsilon^2}Q_q^2\left\{\frac{2(v_+^2+v_-^2)}{(1-v_+)(1-v_-)}+\right. \tag{I4}$$

$$\left.+\frac{m_q^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{2(1-v)}{(1-v_+)(1-v_-)}-\frac{v^2}{(1-v_+)^2(1-v_-)^2}\right)-\frac{m_q^4}{2\varepsilon^4}\frac{v^2}{(1-v_+)^2(1-v_-)^2}\right\},$$

$$v=2-v_+-v_-, \quad v_\pm=\varepsilon_\pm/\varepsilon$$

где множитель 4 происходит от цветовых степеней свободы

$$\delta_{ab}\, Sp\, t^a t^b=\frac{N^2-1}{2}\Big/_{SU(3)}=4$$

Из сравнения (I0) и (I4) для центральной части распределения в Далиц-плоскости [6], отвечающей трехструйной кинематике, видно, что вероятность образования трех глюонных струй $<10^{-3}$ по сравнению с вероятностью образования глюонной и двух кварковых струй, так что обнаружение трех глюонных струй в аннигиляционном канале вне резонансов является весьма сложной задачей.

3. Рассмотрим образование глюонных струй в канале рассеяния (рис. Iв). Вычисления, аналогичные проделанным в [7] при обсуждении возможности изучения процесса рассеяния света светом при e^+e^- столкновениях, приводят к следующему выражению для дифференциального сечения образования двух глюонных струй

$$d\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-gg}=\frac{\alpha^4\alpha_s^2}{8\pi^3 p_{\perp min}^2}\left(\ln\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)^2\sum_{\lambda_i=(\pm)}\left|\sum_q Q_q^2 M^q_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\right|^2\frac{d\cos\vartheta_1\, d\cos\vartheta_2}{\left(\sin\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right)^4} \tag{I5}$$

где $p_\perp$ – величина поперечной к оси пучков компоненты 3-импульсов глюонов, $\vartheta_{1,2}$ – углы их вылета к оси пучков, $M^q_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ – спиральные амплитуды рассеяния света на свете через фермионы с массой m_q. В силу быстрого падения этих амплитуд с ростом массы и быстрого выхода на асимптотику здесь также вклад дают лишь кварки с $m_q<p_\perp$, так что в (I5) можно заменить

$$\sum_{\lambda_i=\pm}\left|\sum_q Q_q^2 M^q_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\right|^2\to 4\left(\sum_{i=1}^n Q_i^2\right)\overline{|M|^2},$$

$$2\overline{|M|^2}=|M_{++++}|^2+|M_{++--}|^2+|M_{+-+-}|^2+|M_{+--+}|^2+4|M_{+++-}|^2 \tag{I6}$$

где n – число кварков с $m_q<p_\perp$,

$$M_{++++}=1+(2x-1)L_2+\frac{1}{2}\left(x^2+(1-x)^2\right)\left(\pi^2+L_2^2\right)$$

$$M_{+-+-}=1+\left(1-\frac{2}{x}\right)(L_1-i\pi)+\frac{1}{2x^2}\left(1+(1-x)^2\right)\left(L_1^2-2\pi i L_1\right)$$

$$M_{+--+}(x)=M_{+-+-}(x\to 1-x),$$
$$M_{+++-}=M_{++--}=-1\,, \tag{I7}$$
$$L_1=-\ln(1-x),\ L_2=\ln\frac{1-x}{x}\,,\quad x=\frac{\cos\left(\frac{\vartheta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta_2}{2}\right)}{\sin\left((\vartheta_1+\vartheta_2)/2\right)}$$

Сечение образования кварк-антикварковых пар, летящих на большие углы (рис.Iг), равно (см. [8], формула (I2))

$$d\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-q\bar q}=\frac{\alpha^4}{8\pi}\,\frac{x^2+(1-x)^2}{x(1-x)p^2_{\perp min}}\left(\ln\frac{\varepsilon^2}{m^2}\right)^2 3\left(\sum_{i=1}^{n}Q_q^4\right)\frac{d\cos\vartheta_1\, d\cos\vartheta_2}{\left(\sin\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)\right)^4} \tag{I8}$$

Сравнение (I5) и (I8)

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-gg}}{d\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-q\bar q}}\simeq\frac{\alpha_s^2}{\pi^2}\,\frac{2|M|^2x(1-x)}{(x^2+(1-x)^2)^2}\,\frac{2\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i^2\right)^2}{3\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i^4\right)}$$

показывает, что для $x\sim(1-x)$ вероятность образования глюонных струй только на порядок меньше вероятности образования струй, порождаемых кварками. Проведенный анализ показывает, что для энергий вне области рождения резонансов типа ψ, Υ (связанного состояния кварка и антикварка) вероятность образования трех глюонных струй существенно меньше вероятности образования кварковых струй (она составляет $< 0{,}1\%$ для центральной части Далиц-плоскости и убывает к её краям). Вероятность же образования двух глюонных струй в двухфотонном канале составляет $\sim 10\%$ от вероятности образования кварковых струй в аналогичной ситуации. Поэтому наиболее перспективным для экспериментального изучения глюонных струй является именно этот канал, причем можно надеяться разделить глюонные и кварковые струи, поскольку распределение по импульсам адронов, множественность и другие характеристики в них различны.

За полезную критику авторы благодарят Б.Л.Иоффе и В.А.Хозе и за помощь в численных расчетах В.Н.Иванченко.

Приложение I.

Величины $\varepsilon^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, используемые нами, связаны с полученными в [5] $E^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ следующим образом

$$\varepsilon^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)=\frac{1}{8\varepsilon^2}E^{(1)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234)$$

$$\varepsilon^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(234)=\frac{1}{4}E^{(2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(1234)$$

Подставляя в формулы (69-7I) из [5] значения инвариантов

$$z=\frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-\nu_2)=\frac{(q-k_2)^2}{4m^2}\,,\quad s=\frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-\nu_3)=\frac{(q-k_3)^2}{4m^2}$$
$$t=\frac{\varepsilon^2}{m^2}(1-\nu_4)=\frac{(q-k_4)^2}{4m^2}\,,\ z_1=-\frac{\varepsilon^2}{m^2}\nu_2\,,\ s_1=-\frac{\varepsilon^2}{m^2}\nu_3\,, \tag{П.I}$$
$$t_1=-\frac{\varepsilon^2}{m^2}\nu_4\,,\ \mu_1=-\varepsilon^2/m^2$$

представим их в виде

$$\varepsilon^{(1)}_{+++}(234)=\frac{2a_3a_4}{1-a_3}+\left[\frac{4a_3^2a_4}{a_2\nu_3}+\frac{4a_3a_4}{\nu_3^2}-\frac{2a_3^2}{\nu_3}\right](B(s)-B(-\mu_1))+$$
$$+\left[\frac{2}{a_2}+\frac{1}{\nu_4}\right]2a_3a_4(B(t)-B(-\mu_1))+\frac{2a_3}{a_2}\left(a_3-a_4-\frac{2a_3a_4}{a_2}\right)T+\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left[\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)\cdot\right.$$
$$\cdot a_3T(z)+\left(\frac{3a_3}{\nu_3}-\frac{2a_3a_4}{\nu_3^2}-\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_3}{a_4}-1\right)T(s)-a_3\left(\frac{1}{\nu_4}+\frac{1}{a_2}\right)T(t)+\left(-\frac{3}{\nu_3}+\frac{2a_4}{\nu_3^2}+\frac{1}{a_2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{\nu_4}\right)a_3T(-\mu_1)+\frac{\nu_2(\nu_4-\nu_2)}{a_2a_4}I_0(z,s,\mu_1)-\frac{\nu_2a_3}{a_2a_4}I_0(z,t,\mu_1)+\left(2-\frac{a_3}{a_4}+\frac{3a_3}{a_2}\right)I_0(s,t,\mu_1)\right];$$

$$\varepsilon^{(2)}_{+++}(234)=2a_3\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{\nu_3}\right)(B(s)-B(-\mu_1))+2a_4\left(\frac{2}{a_2}-\frac{1}{\nu_4}\right)(B(t)-B(-\mu_1))-\left(\frac{4a_3a_4}{a_2}+\right.$$
$$\left.+2\nu_2\right)\frac{T}{a_2}+\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left[-\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)T(z)-\left(\frac{a_2}{\nu_3a_4}+\frac{3}{a_2}\right)T(s)-\left(\frac{a_2}{\nu_4a_3}+\frac{3}{a_2}\right)T(t)+\right.$$
$$+\left(\frac{\nu_2}{a_3a_4}-\frac{1}{\nu_3}-\frac{1}{\nu_4}+\frac{3}{a_2}\right)T(-\mu_1)+\left(\frac{a_4}{a_3}+\frac{\nu_3}{a_4}+\frac{m^2}{\varepsilon^2a_3}\right)\frac{1}{a_2}I_0(z,s,\mu_1)+\left(\frac{a_3}{a_4}+\frac{\nu_4}{a_3}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m^2}{\varepsilon^2a_4}\right)\frac{1}{a_2}I_0(z,t,\mu_1)+\left(\frac{\nu_2}{a_3a_4}+\frac{5}{a_2}+\frac{m^2}{\varepsilon^2a_3a_4}\right)I_0(s,t,\mu_1)\right];$$

$$\varepsilon^{(2)}_{-++}(234) = -2 + \frac{m^2}{\varepsilon^2}\Big\{-\Big(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\Big)\big[T(z)+T(s)+T(t)-T(-\mu_1)\big]+$$

$$+\Big(\frac{1}{a_4}+\frac{m^2}{\varepsilon^2 a_2 a_3}\Big)I_0(z,s,\mu_1)+\Big(\frac{1}{a_3}+\frac{m^2}{\varepsilon^2 a_2 a_4}\Big)I_0(z,t,\mu_1)+\Big(\frac{1}{a_2}+\frac{m^2}{\varepsilon^2 a_3 a_4}\Big)I_0(s,t,\mu_1)\Big\}, \qquad (\text{П.2})$$

$$\varepsilon^{(1)}_{-++}(234) = \frac{m^2}{\varepsilon^2}\Big\{\Big(\frac{a_3}{a_4}-\frac{a_3}{a_2}\Big)\big[T(z)+T(s)+T(t)-T(-\mu_1)\big]-$$

$$-\frac{\nu_2}{a_4}I_0(z,s,\mu_1)+\frac{\nu_4}{a_2}I_0(s,t,\mu_1)\Big\};$$

$$T = T(s)+T(t)-T(\mu_1)-I_0(s,t,\mu_1);$$

где $a_i = 1-\nu_i$, а входящие специальные функции имеют вид:

$$B(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx \ln(1-i\delta-z(1-x^2)) = \begin{cases} -1+\sqrt{\frac{1}{z}-1}\,\arcsin\sqrt{z}, & z<1, \\ -1+\sqrt{1-\frac{1}{z}}\Big(\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\frac{i\pi}{2}\Big), & z>1 \end{cases}$$

$$T(z)=\int_0^1 dx\,\frac{\ln(1-i\delta-z(1-x^2))}{1-x^2} = \begin{cases} -(\arcsin\sqrt{z})^2, & z<1 \\ \Big(\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\frac{i\pi}{2}\Big)^2, & z>1 \end{cases}; \qquad (\text{П.3})$$

$$I_0(z,t,\mu_1) = F(z,a_{zt})+F(t,a_{zt})-F(\mu_1,a_{zt}),\quad a_{zt}=\sqrt{1+\frac{s}{zt}};$$

$$F(z,a)=\int_0^1 dx\,\frac{\ln(1-i\delta-z(1-x^2))}{a^2-x^2};\quad F(z,a)=\int_0^1\frac{dx\ln(1-z(1-x^2))}{a^2-x^2},\ z<1;$$

$$F(z,a)=\frac{1}{2a}\Big\{\ln\big[z(a^2-b^2)\big]\ln\frac{a+1}{a-1}+\Phi\Big(\frac{a+1}{a+b}\Big)+\Phi\Big(\frac{a+1}{a-b}\Big)-$$

$$-\Phi\Big(\frac{a-1}{a+b}\Big)-\Phi\Big(\frac{a-1}{a-b}\Big)\Big\}+\frac{i\pi}{2a}\ln\frac{a-b}{a+b},\quad z>1;$$

$$\Phi(x)=\int_0^x\frac{dt}{t}\ln|1-t|,\quad b^2=1-\frac{1}{z}$$

Для больших значений инвариантов $z, s, t, -\mu_1$ полезно соотношение $F(s,a_{st})-T(s)=-\frac{1}{2}\Phi\Big(\frac{1-a_3}{a_4}\Big)-\frac{\pi^2}{12}+i\frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{1-a_3}{a_4}\Big)$. Пользуясь им можно получить

$$T \simeq \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^2+\Phi(1-a_3)+\Phi(1-a_4)-\ln a_3\ln a_4\Big]$$

Предельные значения $\varepsilon^{(1,2)}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ в асимптотике на границах Далиц-плоскости приведены в таблице. В выражении для квадрата модуля магнитного элемента (I) входят кроме приведенных в (П.I) другие амплитуды, которые строятся из приведенных в (П.I) с помощью соотношений ([5] , (68)):

$$\varepsilon^{(1)}_{+-+}(234)=\varepsilon^{(1)}_{+++}(432),\ \varepsilon^{(1)}_{++-}(234)=-\frac{\nu_2}{\nu_3}\varepsilon^{(1)}_{+++}(324)+$$

$$+\frac{\nu_4}{\nu_3}\varepsilon^{(1)}_{+++}(342),\ \varepsilon^{(2)}_{++-}(234)=\varepsilon^{(2)}_{+++}(324), \qquad (\text{П.4})$$

$$\varepsilon^{(2)}_{+-+}(234)=\varepsilon^{(2)}_{+++}(432)$$

<u>Таблица</u>

	$\nu_2\to1,\ \nu_3\sim\nu_4\sim1$	$\nu_3\to1,\ \nu_2\sim\nu_4\sim1$	$\nu_4\to1,\ \nu_2\sim\nu_3\sim1$
$\varepsilon^{(1)}_{+++}(234)$	$a_3+\ln\nu_3+\frac{a_3}{\nu_3}\ln a_3$	0	$\frac{\nu_2^2}{a_2}\big[-(1+\ln a_4)\ln\nu_2+\Phi(a_2)\big]$
$\varepsilon^{(1)}_{-++}(234)$	0	0	0
$\varepsilon^{(2)}_{+++}(234)$	$-1-\frac{\ln\nu_3}{a_3}-\frac{\ln a_3}{\nu_3}$	$\frac{a_4}{\nu_4}\big[(1+\ln a_3)\ln a_4-\Phi(\nu_4)\big]$	$\frac{\nu_2}{a_2}\big[(1+\ln a_4)\ln\nu_2-\Phi(a_2)\big]$
$\varepsilon^{(2)}_{-++}(234)$	−2	−2	−2

В пределе $\frac{m}{\varepsilon}=0$ величина R (234) (6) имеет вид:

$$R(234)=\frac{4}{3}+\left[\frac{2a_3}{a_2 v_3}(2v_3-a_2)b_s+\frac{2a_4}{a_2 v_4}(2v_4-a_2)b_t-\left(2v_2+\frac{4a_3a_4}{a_2}\right)\frac{a}{a_2}\right]^2+$$

$$+\frac{1}{v_2^2}\left\{\frac{2a_3a_4}{v_3v_4}(1+a_2)+\frac{2a_3}{v_3}\left[\frac{2a_4}{a_2}+\frac{2a_4}{v_3}+v_3-v_4\right]b_s+\frac{2a_4}{v_4}\left[\frac{2a_3}{a_2}+\frac{2a_3}{v_4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+v_4-v_3\right]b_t+\frac{2a}{a_2^2}\left[a_2(a_3-a_4)^2-2v_2a_3a_4\right]\right\}^2+\frac{a_3a_4}{a_2v_2^2}\left\{\frac{2(a_4-a_3)a_2}{v_3v_4}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{v_3^2}(a_4-2a_3v_3)b_s-\frac{4}{v_4^2}(a_3-2a_4v_4)b_t+\frac{4(a_3-a_4)a}{a_2}\right\}^2$$

где

$$b_s=\frac{1}{2}\ln a_3,\quad b_t=\frac{1}{2}\ln a_4,\quad a=\frac{1}{2}\left[\Phi(v_3)+\Phi(v_4)-\ln a_3\ln a_4+\frac{\pi^2}{6}\right]$$

Приложение II

В качестве контроля используемых выражений для спиральных амплитуд Де-Толлиса, мы вычислим вклад в сечение от мнимой части амплитуды $e^+e^-\to 3\gamma$ (рис.Ia) по инварианту $q^2=4\varepsilon^2$ при $\varepsilon^2-m^2\ll m^2$. Имеется кинематическая область в Далиц-плоскости: $z<1,\ s<1,\ t<1,\ \frac{\varepsilon^2}{m^2}>1$, в которой амплитуда кроме указанной мнимых частей не имеет.

Пользуясь выражением для спиральных амплитуд (П.2) получаем

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon^{(1)}_{+++}(234)=-\frac{2a_3a_2}{v_3v_4}\pi\beta,\quad \mathrm{Im}\,\varepsilon^{(1)}_{-++}(234)=$$

$$=\mathrm{Im}\,\varepsilon^{(2)}_{-++}(234)=0,\quad \mathrm{Im}\,\varepsilon^{(2)}_{+++}(234)=\frac{2a_2}{v_3v_4}\pi\beta \qquad (\text{П2.I})$$

где $\beta=\sqrt{1-m^2/\varepsilon^2}$ – скорость компонент e^+e^- пары (в ц- системе). Соответствующий вклад в сечение будет

$$d\sigma=\frac{8\alpha^5\beta^2}{3!\,12\varepsilon^2}\left[\left(\frac{1-v_2}{v_3v_4}\right)^2+\left(\frac{1-v_3}{v_2v_4}\right)^2+\left(\frac{1-v_4}{v_2v_3}\right)^2\right]dv_2dv_3 \qquad (\text{П2.2})$$

Результат (П2.2) находится в соответствии с формулой Оре-Пауэлла для сечения аннигиляции $e^+e^-\longrightarrow 3\gamma$ ([9] , § 89).

Литература

I. G.Ganson. Preprint SLAC-PUB-2118(1978)

2. Ch.Berger et al. Preprint DESY 78/39(1978)

3. Ю.Л.Докшицер, Д.И.Дьяконов. Материалы XIУ зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, I979.

4. Ch.Berger et al Preprint DESY 78/71(1978)

5. V.Constantini, B.de-Tollis, G.Pistoni, Nuovo Cimento 2A, 733, (1971)

6. В.Н.Иванченко, Э.А.Кураев, В.С.Фадин. Препринт ИЯФ 79-I3 (I979).

7. В.Н.Байер, Э.А.Кураев, В.С.Фадин ЯФ 2I вып.2, стр.339 (I975).

8. В.Н.Байер, В.С.Фадин. Ядерная физика, I5, 95, I972.

9. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский "Релятивистская квантовая теория", ч.I "Наука", I968.

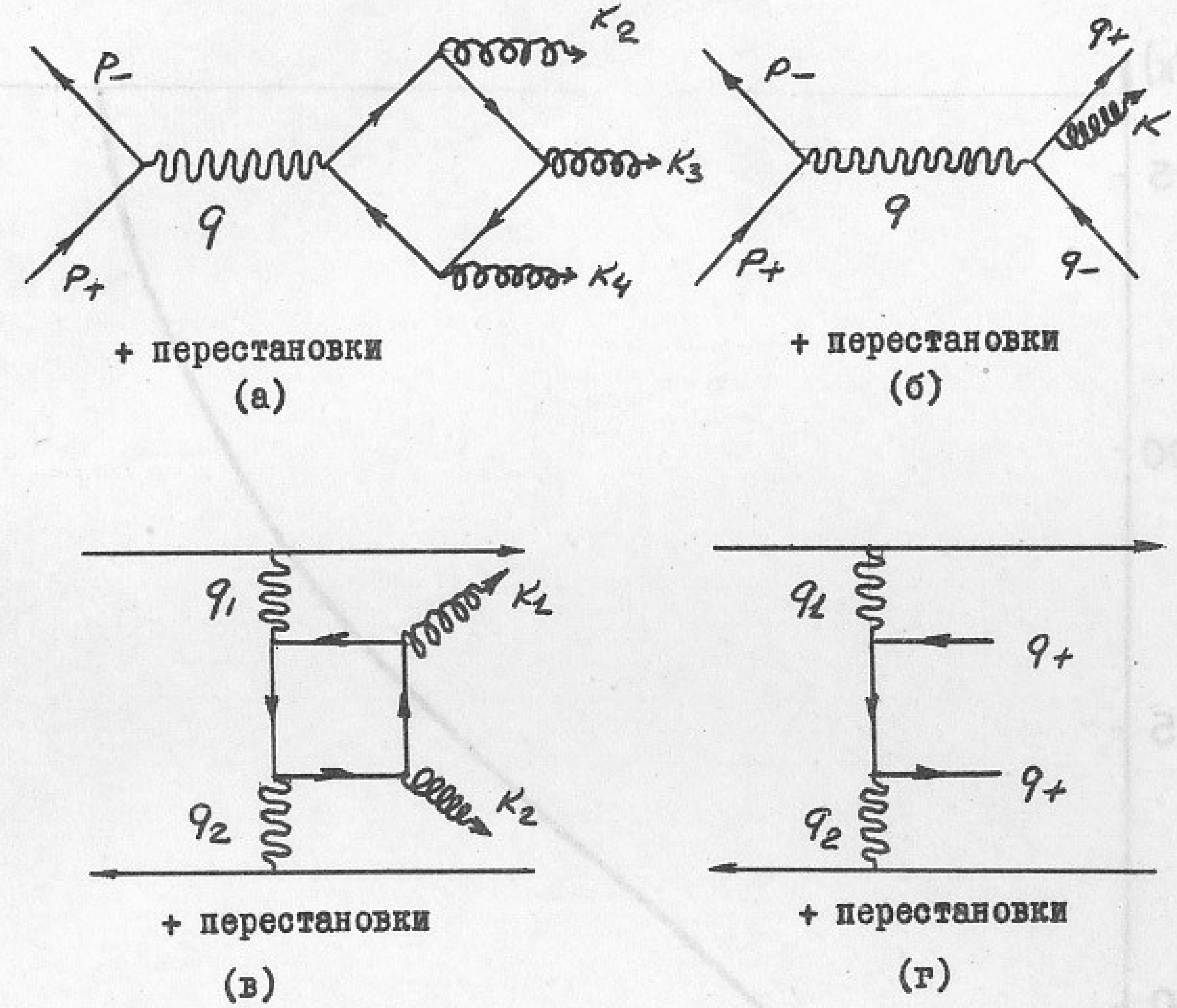

Рис.I

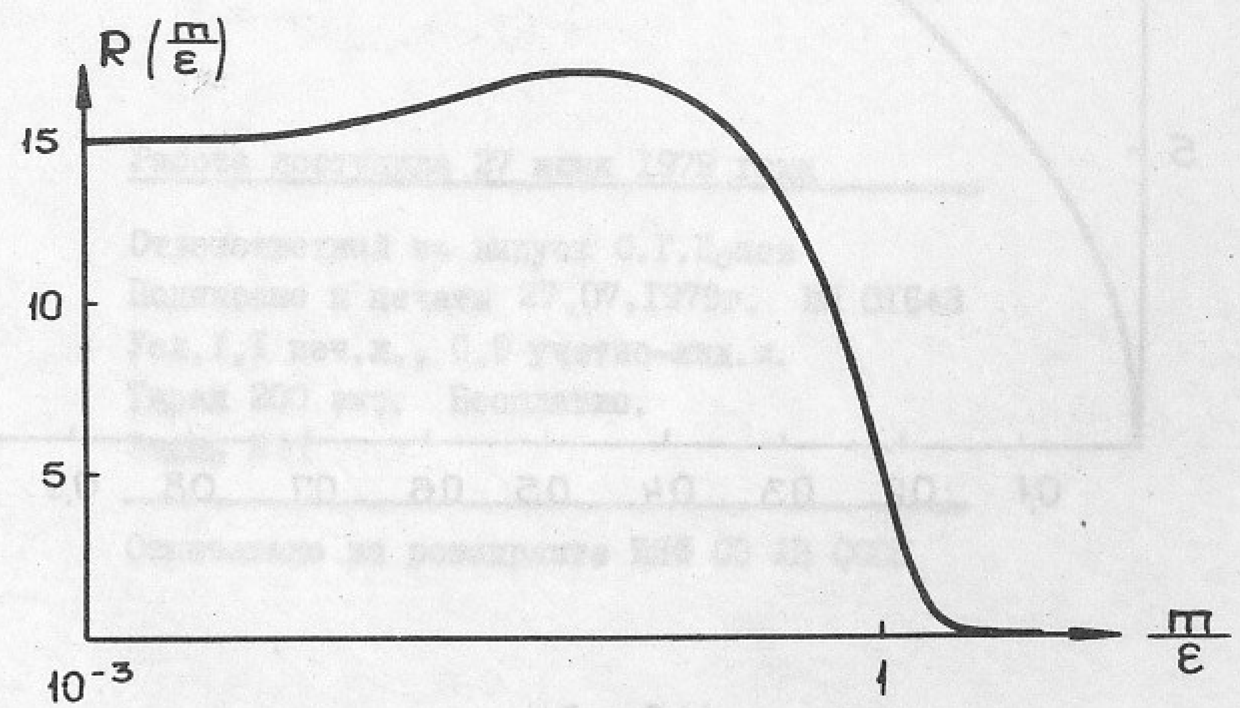

Рис.2

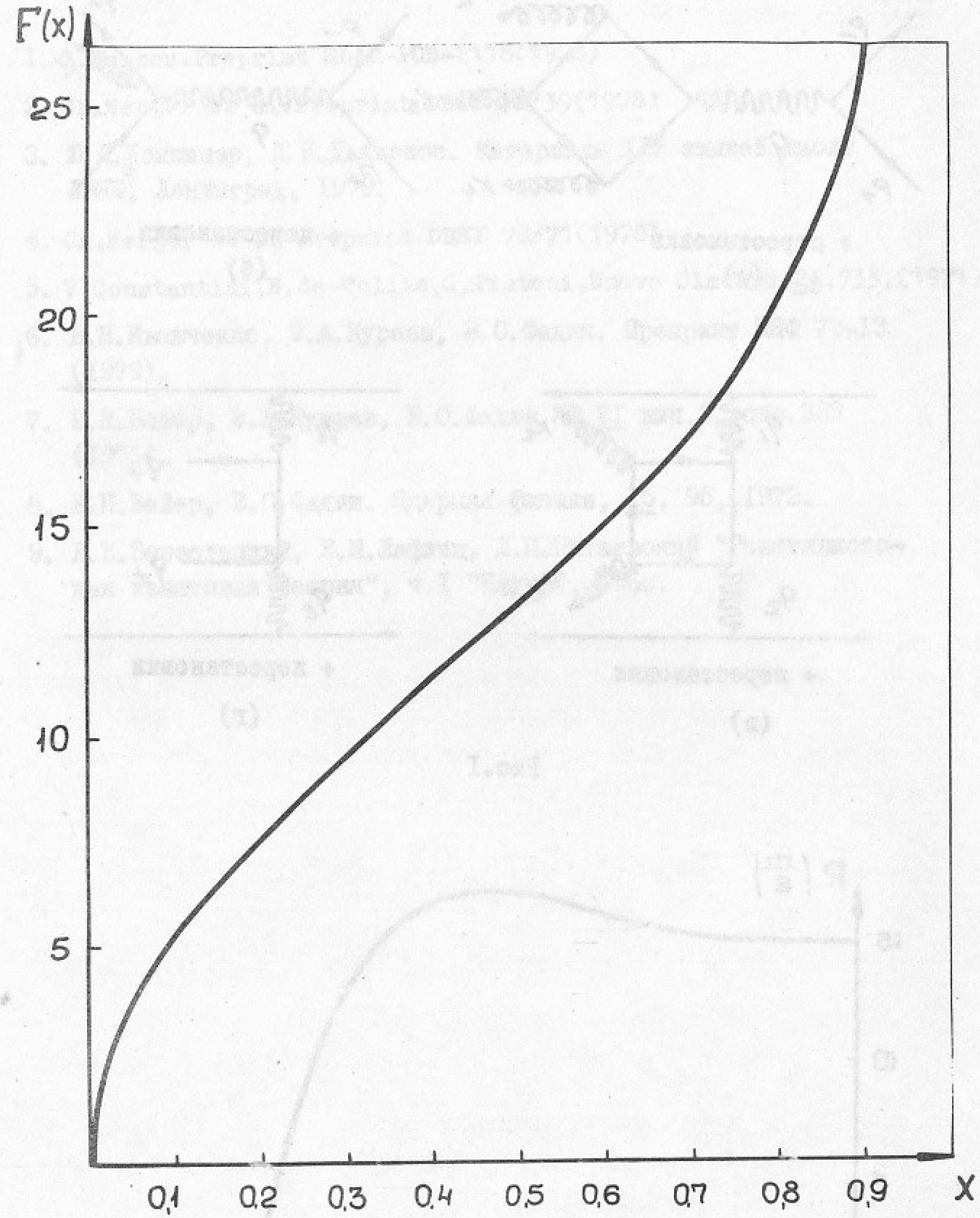

Рис.3

Работа поступила 27 июня 1979 года

Ответственный за выпуск С.Г.Попов
Подписано к печати 27.07.1979г. МН 01643
Усл.1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №61

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР