58

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

РАСПЛЫВАНИЕ СГУСТКА ПРОТОНОВ В НАКОПИТЕЛЬНОМ КОЛЬЦЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЧ ШУМОВ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79-76

Новосибирск

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

РАСПЛЫВАНИЕ СГУСТКА ПРОТОНОВ В НАКОПИТЕЛЬНОМ КОЛЬЦЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЧ ШУМОВ

АННОТАЦИЯ

В работе приведены результаты теоретического исследования постепенного увеличения длины сгустка протонов в накопителе вследствие действия шумов ВЧ напряжения на ускоряющей системе. Показано, что введение обратной связи позволяет существенно замедлить процесс расплывания протонного сгустка.

В в е д е н и е

В настоящее время разрабатывается несколько проектов установок для получения встречных протон-антипротонных пучков с энергией в центре масс сотни ГэВ и более (ЦЕРН, лаборатория Ферми, Серпухов). Так как протон-антипротонные встречные пучки будут циркулировать в одном кольце, очевидно, что для увеличения светимости при ограниченном количестве антипротонов, целесообразно сосредоточить частицы в нескольких сгустках достаточно малой длины. Поэтому в кольце должна быть предусмотрена ускоряющая ВЧ система. Хотя радиационные потери у тяжелых частиц практически отсутствуют, необходимое ВЧ напряжение, тем не менее, достаточно велико. Действительно, ввиду отсутствия радиационного затухания продольных колебаний малая длина сгустков может быть получена лишь за счет адиабатического сжатия при одновременном увеличении энергии частиц и амплитуды ускоряющего напряжения. Ускоряющее напряжение необходимо также для компенсации потерь энергии сгустков за счет наведенных токов в стенках вакуумной камеры, потерь на возбуждение высших мод в резонаторах и других диссипативных элементах окружения пучка.

Флуктуации частоты и амплитуды ВЧ напряжения будут приводить к постепенному расплыванию сгустков вследствие стохастического нарастания амплитуды продольных колебаний отдельных частиц. Это нарастание не ограничено в данном случае радиационным затуханием. Нелинейность также не препятствует росту амплитуды при достаточно широком спектре ВЧ шумов.

Простые оценки показывают, что время расплывания протонных сгустков при обычных для ускоряющих ВЧ систем уровнях шумов существенно меньше времени жизни протонов в накопителе.

Средством борьбы с расплыванием протонных сгустков могут служить цепи обратной связи, обладающие необходимыми характеристиками.

Целью этой работы является анализ влияния обратной связи на расплывание сгустка, определение её оптимальных характеристик, а также предельных возможностей уменьшения скорости расплывания сгустка. Известно, что амплитуда колебаний линейного осциллятора без затухания под действием случайной силы неограниченно возрастает. Если предположить, что все частицы в сгустке имеют в точности одинаковые собственные частоты, то центр тяжести сгустка под действием случайной силы будет вести себя как осциллятор без затухания. При этом будет происходить рост амплитуды когерентных колебаний сгустка как единого целого, без расплывания.

В действительности же благодаря нелинейному разбросу частот $\Delta\Omega$ в течение времени порядка $1/\Delta\Omega$ амплитуда колебаний центра тяжести устанавливается постоянной. Таким образом, благодаря разбросу частот центр тяжести ведет себя как осциллятор с затуханием. Диссипация происходит при этом за счет раскогеренчивания, приводящего к "нагреву" сгустка, то-есть к его расплыванию. Скорость расплывания зависит от стационарной амплитуды колебаний центра тяжести, а также от разброса частот. Для уменьшения скорости расплывания обратная связь должна влиять именно на эти параметры. Отметим, что для упрощения анализа учитывается лишь одна степень свободы сгустка – колебания центра тяжести. На самом деле под действием шума возбуждаются также мультипольные колебания сгустка на частотах $n\Omega$. Однако, амплитуды этих колебаний значительно меньше (пропорционально $(\Delta\Omega/\Omega)^n$). Кроме того, шумы в области более высоких частот $n\Omega$ лучше фильтруются высокодобротным ускоряющим резонатором. Эти соображения до некоторой степени оправдывают упрощенное рассмотрение.

В разделе I приведены основные уравнения движения частиц под действием случайной силы. Затем исходя из уравнения Власова получена цепь уравнений, определяющих гармоники функции распределения.

В разделе 2 исследуется расплывание сгустка под действием шума с произвольным спектром.

В разделе 3 рассматривается влияние обратной связи на движение центра тяжести и расплывание сгустка.

I. Основные уравнения

Уравнения продольных (синхротронных) колебаний могут быть записаны в виде /I,2/

$$\dot{p}_z = eE_z + \Omega_0^2 \cdot M \cdot R \cdot \sin\frac{qz}{R}, \qquad \text{(I)}$$
$$\dot{z} = -\frac{p_z}{M}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$z = R\theta$ – отклонение частицы от равновесного положения в азимутальном направлении,

R – средний радиус накопительного кольца

$p_z = p - p_0$ – отклонение импульса частицы от равновесного значения,

$\Omega_0 = \omega_0\sqrt{\frac{eU_m\alpha q}{2\pi E}}$ – частота малых колебаний,

ω_0 – частота обращения частиц в накопителе,

$M = m/\alpha$ – "масса" синхротронных колебаний,

α – коэффициент расширения орбит,

m – релятивистская масса частицы,

q – кратность радиочастоты,

U_m – амплитуда ускоряющего напряжения.

Величина E_z – представляет собой возмущение, которое может быть, в частности, шумовым.

Уравнения (I) являются каноническими с гамильтонианом

$$H = H_0(p_z, z) - \int eE_z\,dz, \qquad (2)$$

где $H_0(p_z, z)$ – гамильтониан невозмущенного осциллятора. В дальнейшем мы перейдем к каноническим переменным действие-угол J, ψ. При этом невозмущенный гамильтониан зависит лишь от J : $H_0 = H_0(J)$. Уравнения движения приобретают следующий вид:

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = eE_z \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi},$$
$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial J} = \Omega(J) - eE_z \cdot \frac{\partial z}{\partial J}, \qquad (3)$$

где $\Omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}$ – частота нелинейных колебаний.

Для решения уравнений (3) необходимы еще конкретные формулы преобразования к каноническим переменным. Учитывая малую нелинейность, с достаточной точностью можно воспользоваться формулами квазилинейного приближения /2/ :

$$z=\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\sin\psi\,,\quad P_z=\sqrt{2M\Omega J}\cdot\cos\psi. \qquad (4)$$

Сгусток будем описывать одночастичной функцией распределения $f(\psi,J,t)$ с нормировкой

$$\int_0^\infty f(\psi,J,t)\,d\psi\cdot dJ=1\,. \qquad (5)$$

Пренебрегая непосредственным взаимодействием релятивистских частиц между собой, можно записать уравнение Власова для функции распределения

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot\psi\frac{\partial f}{\partial\psi}+\dot J\frac{\partial f}{\partial J}=0 \qquad (6)$$

Подставляя сюда $\dot\psi$ и $\dot J$ из уравнений (3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\Omega\frac{\partial f}{\partial\psi}+eE_z\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial f}{\partial J}-\frac{\partial z}{\partial J}\cdot\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)=0\,. \qquad (7)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $E_z=E_z(t)$ не зависит от P_z, z. В дипольном приближении это предположение не уменьшает общности. Периодическая по ψ функция распределения может быть представлена в виде разложения

$$f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(J,t)\cdot e^{in\psi}. \qquad (8)$$

Подставим в уравнение (7) разложение (8), а также z из (4). Приравнивая затем нулю коэффициенты при $e^{in\psi}$, получим цепочку связанных между собой уравнений

$$\frac{\partial f_n}{\partial t}+in\Omega\cdot f_n+\frac12 eE_z\left\{\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(f_{n-1}+f_{n+1}\right)-\frac{1}{\sqrt{2M\Omega J}}\Big[(n-1)\cdot f_{n-1}-(n+1)\cdot f_{n+1}\Big]\right\}=0 \qquad (9)$$

Заметим теперь, что предполагая колебания центра тяжести малыми, следует считать все гармоники $f_{\pm n}\ (n>0)$ малыми по

сравнению с нулевой гармоникой, изменение которой, собственно, и определяет расплывание сгустка. Нулевая гармоника $f_0(J,t)$ определяется, как это следует из (9), уравнением

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac12 eE_z\left\{\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(f_1+f_{-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2M\Omega J}}\left(f_1+f_{-1}\right)\right\}=0$$

или

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{eE_z}{\sqrt{2M\Omega}}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left[\sqrt{J}\cdot\left(f_1+f_{-1}\right)\right]=0. \qquad (I0)$$

Из (9) полагая $n=\pm I$ можно получить также уравнения для f_1 и f_{-1} :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+i\Omega\cdot f_1+\frac12 eE_z\left[\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(f_0+f_2\right)+\frac{2}{\sqrt{2M\Omega J}}f_2\right]=0,$$

$$\frac{\partial f_{-1}}{\partial t}-i\Omega\cdot f_{-1}+\frac12 eE_z\left[\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left(f_0+f_{-2}\right)+\frac{2}{\sqrt{2M\Omega J}}f_{-2}\right]=0. \qquad (II)$$

Учитывая соотношение амплитуд гармоник функции распределения, можно опустить в (II) $f_{\pm2}$. Тогда окончательно получим уравнения для $f_{\pm1}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+i\Omega\cdot f_1+\frac12 eE_z\cdot\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial J}=0\,,$$

$$\frac{\partial f_{-1}}{\partial t}-i\Omega\cdot f_{-1}+\frac12 eE_z\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial J}=0. \qquad (I2)$$

2. Диффузия под действием ВЧ шума

После отбрасывания высших гармоник функции распределения, мы получили замкнутую систему уравнений (I0), (I2).

Как легко видеть, решения уравнений (I2), тождественно равные нулю при $t=0$, имеют вид

$$f_{\pm1}(J,t)=-\frac12\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\int_0^t eE_z(\tau)\cdot\frac{\partial f_0(J,\tau)}{\partial J}e^{\mp i\Omega(t-\tau)}d\tau, \qquad (I3)$$

а сумма, входящая в (I0), равна:

$$f_1+f_{-1}=-\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\int_0^t eE_2(\tau)\cdot\frac{\partial f_0(J,\tau)}{\partial J}\cos\Omega(t-\tau)\,d\tau. \qquad (I4)$$

Для дальнейшего сделаем замену переменной $\tau\to t-\tau$ и приведем (I4) к виду

$$f_1+f_{-1}=-\sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\int_0^t eE_2(t-\tau)\cdot\frac{\partial f_0(J,t-\tau)}{\partial J}\cdot\cos\Omega\tau\,d\tau. \qquad (I5)$$

Подставляя (I5) в (I0), получим следующее уравнение для f_0:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}-\frac{e^2}{M\Omega}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left[J\int_0^t E_2(t)\cdot E_2(t-\tau)\cdot\frac{\partial f_0(J,t-\tau)}{\partial J}\cos\Omega\tau\,d\tau\right]=0. \qquad (I6)$$

Предположим теперь, что $E_2(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс, и усредним уравнение (I6) по ансамблю. Усреднение произведения $E_2(t)\cdot E_2(t-\tau)$ дает

$$\langle E_2(t)\cdot E_2(t-\tau)\rangle = R(\tau), \qquad (I7)$$

где $R(\tau)$ – автокорреляционная функция стационарного случайного процесса E_2. Вместо $f_0(J,t)$ в уравнение войдет усредненная по ансамблю функция $\langle f_0(J,t)\rangle$, которая, однако, весьма мало отличается практически от всех своих реализаций. Поэтому мы сохраним для нее прежнее обозначение $f_0(J,t)$.

Заметим, что функция $R(\tau)$ убывает до нуля для времен $\tau>\frac{1}{\Delta\Omega}$, (где $\Delta\Omega$ – разброс частот продольных колебаний в сгустке), если предположить, что ширина спектра ВЧ шума превышает $\Delta\Omega$. С другой стороны, в уравнении (I6) нас интересуют времена t много большие $1/\Delta\Omega$, так как наше основное предположение состоит в том, что расплывание происходит за время много большее, чем время установления амплитуды колебаний центра тяжести $1/\Delta\Omega$.

Это позволяет во-первых, верхний предел интеграла в (I6) сделать равным ∞, а во-вторых, опустить τ в $\frac{\partial f_0(J,t-\tau)}{\partial J}$ и вынести эту производную из-под интеграла. Оставшийся интеграл, как известно /3/, выражается через спектральную плотность ВЧ шума $S_{\text{ш}}(\Omega)$:

$$\int_0^\infty R(\tau)\cdot\cos\Omega\tau\cdot d\tau=\pi\cdot S_{\text{ш}}(\Omega). \qquad (I8)$$

Подставляя в (I6), получим уравнение, описывающее изменение функции $f_0(J,t)$, то-есть расплывание сгустка под действием шума

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}-\frac{\pi e^2}{M\Omega}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left[J\cdot\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot S_{\text{ш}}(\Omega)\right]=0. \qquad (I9)$$

Напомним, что $\Omega=\Omega(J)$ – частота – зависит от действия J.

Полученное уравнение представляет собой уравнение типа Фоккера-Планка, описывающее неоднородную диффузию с коэффициентом диффузии

$$D(J)=\frac{\pi e^2}{M\Omega}\cdot S_{\text{ш}}(\Omega). \qquad (20)$$

Уравнение (I9) позволяет определить скорость изменения размеров сгустка. Умножая (I9) на J и интегрируя по J от 0 до ∞, получим

$$\frac{d\langle J\rangle}{dt}=\frac{2\pi^2e^2}{M\Omega}\cdot\int_0^\infty J\frac{\partial}{\partial J}\left[J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot S_{\text{ш}}(\Omega)\right]dJ.$$

Дважды интегрируя справа по частям, можно привести это соотношение к следующему виду:

$$\frac{d\langle J\rangle}{dt}=\frac{2\pi^2e^2}{M\Omega}\int_0^\infty f_0(J,t)\frac{\partial}{\partial J}\left[J\cdot S_{\text{ш}}(\Omega)\right]dJ. \qquad (21)$$

В настоящем разделе интерес представляет случай, когда $S_{\text{ш}}=const$ в области частот $\Delta\Omega$. Тогда выражение (21) приобретает вид

$$\frac{d\langle J\rangle}{dt}=\frac{\pi e^2}{M\Omega}\cdot S_{\text{ш}}. \qquad (22)$$

Последнее соотношение позволяет сделать некоторые оценки. Уравнение (I9) получено в предположении медленности расплывания сгустка. Это условие теперь может быть записано в виде неравенства

$$\delta=\frac{1}{2}\frac{1}{\langle J\rangle}\cdot\frac{d\langle J\rangle}{dt}=\frac{\pi e^2}{\langle J\rangle\cdot M\Omega}\ll\Delta\Omega, \qquad (23)$$

то-есть инкремент расплывания должен быть много меньше разброса частот. Легко показать, что

$$\langle J \rangle = M\Omega \cdot \langle z^2 \rangle \tag{24}$$

где $\langle z^2 \rangle$ – средний квадрат отклонения частиц от положения равновесия в сгустке. Подставляя (24) в (23) и производя простые преобразования, получим

$$\frac{\pi \cdot S_{ш} \cdot (2\pi R)^2 \cdot \Omega}{2 U_m^2} \ll \frac{\langle z^2 \rangle \cdot q^2}{R^2} \cdot \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \tag{25}$$

Так как $S_{ш}$ – это спектральная плотность напряженности E_z, то

$$S_{ш} \cdot (2\pi R)^2 \cdot \Omega = \frac{1}{2} \langle U_{ш}^2 \rangle, \tag{26}$$

где $\langle U_{ш}^2 \rangle$ – средний квадрат шумового напряжения в полосе частот шириной Ω на ускоряющей системе. Так как $\frac{\langle z^2 \rangle \cdot q^2}{R^2} \simeq 1$, то неравенство (23) приобретает вид

$$\frac{\pi}{4} \frac{\langle U_{ш}^2 \rangle}{U_m^2} \ll \frac{\Delta\Omega}{\Omega}. \tag{27}$$

Учитывая, что обычно $\Delta\Omega/\Omega$ – сравнительно большая величина ($10^{-3} \div 10^{-2}$), условие (27) является довольно слабым ограничением.

Инкремент расплывания равен, как следует из (23) после преобразований,

$$\delta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\langle U_{ш}^2 \rangle \cdot \Omega}{U_m^2 \cdot \frac{q^2 \langle z^2 \rangle}{R^2}}. \tag{28}$$

Это соотношение позволяет оценить допустимый уровень ВЧ шумов при заданном инкременте. Если по-прежнему положить $\frac{\langle z^2 \rangle \cdot q^2}{R^2} \simeq 1$, то получим

$$\frac{\langle U_{ш}^2 \rangle / F}{U_m^2} \simeq \frac{8\delta}{\Omega^2}, \tag{29}$$

где $F = \Omega/2\pi$ – частота синхротронных колебаний.

В левой части (29) записано отношение мощности шума в полосе 1 Гц к мощности ускоряющего напряжения.

Для оценки примем, например, $\delta = 3.10^{-5}$ сек$^{-1}$, что соответствует постоянной времени расплывания 10 часов, а также $\Omega = 2\pi \cdot 10^4$ сек$^{-1}$. Тогда (29) дает

$$\frac{\langle U_{ш}^2 \rangle / F}{U_m^2} = 6.10^{-14} \text{Гц}^{-1}$$

или около 130 дб. Такое требование к ВЧ системе, по-видимому, невозможно реализовать. Уменьшение синхротронной частоты (при неизменном ускоряющем напряжении) облегчает ситуацию. С другой стороны, уменьшение этой частоты ухудшает фильтрацию шумов высокодобротными резонаторами.

Более радикальным средством является введение цепи обратной связи.

3. Влияние обратной связи на расплывание сгустка

Предположим, что цепь обратной связи построена следующим образом. Установленный в вакуумной камере пикап-электрод вырабатывает сигнал, пропорциональный отклонению центра тяжести сгустка z_c от положения равновесия. Этот сигнал после усиления модулирует фазу ускоряющего ВЧ напряжения таким образом, чтобы уменьшить амплитуду колебаний центра тяжести под действием ВЧ шумов.

В этом случае на сгусток действует сумма исходного ВЧ шума и сигнала, полученного в конце цепи обратной связи. Переходя к анализу расплывания сгустка при наличии обратной связи, отметим прежде всего, что уравнение (19) описывает диффузию при произвольном спектре ВЧ шума, действующего на сгусток.

Поэтому для получения нужного нам уравнения необходимо определить спектр шума, действующего на сгусток при наличии обратной связи.

Этот спектр зависит в нашем случае от движения центра тяжести сгустка. Рассмотрим движение центра тяжести под действием шумового поля E_z.

Координата центра тяжести определяется соотношением

$$z_c = \int z\cdot f(\psi, J, t)\, d\psi\, dJ . \tag{30}$$

Подставив сюда разложение функции распределения (8) и выражение (4) для z, получим

$$z_c = -\frac{\pi}{i}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2J}{M\Omega}}\left(f_1 - f_{-1}\right) dJ \tag{31}$$

Подставляя сюда для $f_{\pm 1}$ выражение (13), найдем движение центра тяжести

$$z_c = -\frac{2\pi e}{M\Omega}\int_0^\infty J\cdot dJ\int_0^t E_z(t-\tau)\cdot\frac{\partial f_0(J, t-\tau)}{\partial J}\sin\Omega\tau\cdot d\tau . \tag{32}$$

Если положить приближенно

$$\Omega^2 \cong \Omega_0^2\left(1+\xi\cdot J\right), \tag{33}$$

То с помощью (32) можно вычислить средний квадрат отклонения центра тяжести под действием шума со спектральной плотностью S_ω. В частности, для белого шума результат равен

$$\langle z_c^2\rangle = \left(\frac{2\pi e}{M\Omega}\right)^2\cdot\frac{4\pi^2 S_\omega}{|\xi|\cdot\Omega_0}\int_0^\infty J^2\left(\frac{\partial f_0}{\partial J}\right)^2 dJ . \tag{34}$$

Как видно из (34), эта величина обратно пропорциональна $|\xi|$, то-есть нелинейности осцилляторов.

Для дальнейшего анализа нам необходимо определить реакцию центра тяжести на синусоидальный сигнал. Пусть синусоидальный сигнал частоты ω задан комплексной амплитудой. В силу линейности соотношения (32) центр тяжести под действием синусоидального сигнала будет совершать вынужденное колебание частоты ω, комплексная амплитуда которого пропорциональна комплексной амплитуде синусоидального сигнала. Для определения коэффициента пропорциональности $\eta(i\omega)$, который естественно назвать комплексной восприимчивостью центра тяжести, проще всего подвергнуть (32) преобразованию Лапласа, а затем произвести замену $s = i\omega + \sigma$, устремив затем $\sigma \to +0$. При этом производную $\frac{\partial f_0(J,t)}{\partial J}$ для упрощения будем считать независи-

щей от t, так как эта зависимость очень медленная (адиабатическая по отношению к синусоидальному сигналу). Пользуясь теоремой о преобразовании Лапласа свертки двух функций /3/, получим

$$z_c(s) = -\frac{2\pi e}{M\Omega}\cdot E_z(s)\cdot\int_0^\infty J\frac{\partial f_0(J,t)}{\partial J}\cdot\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}\, dJ . \tag{35}$$

Этот результат может быть записан в виде

$$z_c(s) = \eta(s)\cdot E_z(s), \tag{36}$$

где

$$\eta(s) = -\frac{2\pi e}{M}\int_0^\infty J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot\frac{dJ}{s^2+\Omega^2} \tag{37}$$

– восприимчивость центра тяжести. Чтобы найти восприимчивость по отношению к синусоидальной силе частоты ω следует, как указывалось выше, заменить s на $i\omega+\sigma$ и перейти к пределу $\sigma\to +0$:

$$\frac{1}{s^2+\Omega^2} \to \frac{1}{\Omega^2-\omega^2+2i\sigma\omega} = \frac{\Omega^2-\omega^2-2i\sigma\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\sigma^2\omega^2} \to$$

$$\to \frac{1}{\Omega^2-\omega^2} - \lim_{\sigma\to+0}\frac{2i\sigma\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\sigma^2\omega^2} .$$

Последний предел можно вычислить, исходя из известного равенства /3/:

$$\lim_{\sigma\to+0}\frac{\sigma}{\pi(x^2+\sigma^2)} = \delta(x),$$

из которого следует

$$\lim_{\sigma\to+0}\frac{2i\sigma\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2+4\sigma^2\omega^2} = i\pi\frac{\omega}{|\omega|}\cdot\delta(\Omega^2-\omega^2). \tag{38}$$

В результате, получаем

$$\eta(i\omega) = -\frac{2\pi e}{M}\int_0^\infty\frac{J\frac{\partial f_0}{\partial J}}{\Omega^2-\omega^2}dJ + i\frac{2\pi^2 e}{M}\cdot\frac{\omega}{|\omega|}\int_0^\infty J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot\delta(\Omega^2-\omega^2)\, dJ . \tag{39}$$

Заметим, что $\Omega^2\cong\Omega_0^2(1+\xi\cdot J)$; поэтому при $\xi>0$

$$\int_0^\infty J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot\delta(\Omega^2-\omega^2)\,dJ = \begin{cases} 0 & \text{при } |\omega|<\Omega_0 \\ \frac{1}{\xi\Omega_0^2}J\cdot\frac{\partial f_0}{\partial J}\Big|_{J=\frac{\omega^2-\Omega_0^2}{\xi\Omega_0^2}} & \text{при } |\omega|>\Omega_0 . \end{cases} \tag{40}$$

Подставляя, окончательно получаем (при $\xi > 0$)

$$\eta(i\omega)=\frac{2\pi e}{M}\left\{\int_0^\infty \frac{J\frac{\partial f_0}{\partial J}\,dJ}{\omega^2-\Omega^2}+\frac{i\pi}{\xi\Omega_0^2}\cdot\frac{\omega}{|\omega|}\cdot\varepsilon(\omega^2-\Omega_0^2)\cdot J\frac{\partial f_0}{\partial J}\Big|_{J=\frac{\omega^2-\Omega_0^2}{\xi\Omega_0^2}}\right\}, \quad (4I)$$

где $\varepsilon(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x>0.\end{cases}$

При $\xi < 0$ интеграл в мнимой части приобретает вид

$$\int_0^\infty J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot\delta\left(\omega^2-\Omega_0^2+|\xi|\Omega_0^2 J\right)dJ. \quad (42)$$

Если теперь заменить ω на ω' такое, что

$$\Omega_0^2-\omega'^2=\omega^2-\Omega_0^2,$$

то интеграл принимает свой первоначальный вид

$$\int_0^\infty J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot\delta\left(\Omega_0^2-\omega'^2+|\xi|\cdot\Omega_0^2 J\right)dJ. \quad (43)$$

Таким образом, мнимая часть $\eta(i\omega)$ не меняет знака при изменении знака ξ. Но при этом $\operatorname{Im}[\eta(i\omega)]$ принимает прежние значения для частот ω, симметричных относительно Ω_0, при $\omega<\Omega_0$.

Аналогичные рассуждения относительно вещественной части восприимчивости показывают, что она меняет знак при изменении знака ξ, принимая прежние по абсолютной величине значения для частот ω, симметричных относительно Ω_0, при $\omega<\Omega_0$:

$$\int_0^\infty \frac{J\frac{\partial f_0}{\partial J}\,dJ}{\Omega_0^2-\omega^2-|\xi|\Omega_0^2 J}=-\int_0^\infty \frac{J\frac{\partial f_0}{\partial J}\,dJ}{\Omega_0^2-\omega'^2+|\xi|\Omega_0^2 J}, \quad (44)$$

при $\Omega_0^2-\omega'^2=\omega^2-\Omega_0^2$.

Заметим, что выражение для $\eta(i\omega)$ можно переписать в более симметричной форме, не зависящей от знака ξ:

$$\eta(i\omega)=\frac{2\pi e}{M}\left\{\frac{1}{\xi}\int_0^\infty \frac{J\frac{\partial f_0}{\partial J}\,dJ}{J_\omega-J}+i\pi\frac{\omega}{|\omega|}\frac{\varepsilon(J_\omega)}{|\xi|}J_\omega\cdot\frac{\partial f_0}{\partial J}\Big|_{J=J_\omega}\right\}, \quad (45)$$

где

$$J_\omega=\frac{\omega^2-\Omega_0^2}{\xi\Omega_0^2}.$$

Уравнение (I9)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}-\frac{\pi e^2}{M\Omega}\cdot\frac{\partial}{\partial J}\left[J\frac{\partial f_0}{\partial J}\cdot S_\omega(\Omega)\right]=0$$

описывает диффузию частиц при действии на сгусток шумового поля со спектральной плотностью $S_\omega(\Omega)$. Задача состоит в нашем случае в определении спектральной плотности суммарного поля, действующего на сгусток при наличии обратной связи. Для этого можно воспользоваться известным свойством линейного преобразования случайных процессов /3/. А именно, если комплексные амплитуды синусоидальных величин на входе(x) и выходе (y) некоторого устройства связаны линейным соотношением

$$y=H(i\omega)\cdot x,$$

то спектральные плотности стационарных случайных процессов на входе и выходе этого же устройства оказываются связанными соотношением

$$S_y=|H(i\omega)|^2\cdot S_x. \quad (46)$$

При наличии обратной связи движение центра тяжести определяется соотношением

$$z_c=\eta(i\omega)\cdot\left(E_{z\,внеш}+E_{z\,ос}\right). \quad (47)$$

Если положить, что

$$E_{z\,ос}=K(i\omega)\cdot z_c, \quad (48)$$

где $K(i\omega)$ – коэффициент обратной связи, то равенство (47) можно переписать в виде

$$\frac{E_{z\,ос}}{K(i\omega)}=\eta(i\omega)\left(E_{z\,внеш}+E_{z\,ос}\right), \quad (49)$$

откуда легко найти

$$E_{z\,ос}=\frac{\eta K}{1-\eta K}\cdot E_{z\,внеш}. \quad (50)$$

Суммарное поле, действующее на сгусток, равно

$$E_z = E_{z\,внеш} + E_{z\,ос} = \frac{E_{z\,внеш}}{1-\eta K} \,. \tag{5I}$$

Имея соотношение (5I), легко найти спектральную плотность суммарного шумового поля, действующего на сгусток, с помощью соотношения (46). При этом необходимо иметь в виду, что внешнее шумовое поле $E_{z\,внеш}$ складывается из шумов ускоряющего ВЧ поля и шумов усилителя в цепи обратной связи. Эти шумы можно считать некоррелированными между собой. Поэтому

$$S = \frac{S_{ВЧ} + S_{ус\,вых}}{|1-\eta K|^2} \,, \tag{52}$$

где $S_{ВЧ}$ – спектральная плотность ускоряющего ВЧ поля, а $S_{ус\,вых}$ – спектральная плотность шумового поля на выходе усилителя обратной связи.

Заметим, что подставляя в уравнение (I9) величины, входящие в (52), следует рассматривать их как функции частоты Ω, зависящей от J :

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 (1 + \xi J) \,. \tag{53}$$

Подставляя (52) в уравнение (I9), получим уравнение диффузии при наличии обратной связи:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\pi e^2}{M\Omega} \cdot \frac{\partial}{\partial J} \left\{ J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \left[\frac{S_{ВЧ}}{|1-\eta K|^2} + \frac{S_{ус\,вых}}{|1-\eta K|^2} \right] \right\} = 0 \,. \tag{54}$$

Отметим, что $K(i\Omega)$ в полосе частот $\Delta\Omega$ можно считать постоянной комплексной величиной, в то время, как $\eta(i\Omega)$ определяется соотношением (45).

Для нормальной работы обратной связи должны выполняться условия устойчивости. Для этого дисперсионное уравнение

$$1 + K(s) \cdot \frac{2\pi e}{M} \int_0^\infty \frac{J \frac{\partial f_0}{\partial J}}{s^2 + \Omega^2} \, dJ = 0 \,, \tag{55}$$

которое легко получить из (37) и (50), не должно иметь корней в правой полуплоскости. Однако, анализ устойчивости легче про-

извести по явному выражению для $\eta(i\Omega)$ (45), считая $K(i\Omega)$ комплексной постоянной величиной.

Мы не будем здесь подробно анализировать устойчивость. Заметим лишь, что для спадающей функции $f_0(J)$, т.е. при $\frac{\partial f_0}{\partial J} < 0$ и $Im\,\eta(i\Omega) < 0$ цепь обратной связи устойчива, если коэффициент обратной связи равен $K = K_0 e^{i\varphi}$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, при любой величине $K_0 > 0$.

Заметим еще, что в уравнении (54) спектральная плотность шума на выходе усилителя зависит, естественно, от коэффициента усиления K . Поэтому для дальнейшего анализа целесообразно шум усилителя на выходе выразить через шум, приведенный ко входу, не зависящий непосредственно от коэффициента усиления:

$$S_{ус\,вых} = S_{ус\,вх} \cdot \frac{|K|^2}{a^2} \,. \tag{56}$$

Здесь a – фактор, учитывающий отличие полного коэффициента обратной связи K, определенного соотношением (48), и коэффициента усиления самого усилителя. Величина a определяется устройством и размерами пикап-электрода, а также током пучка; увеличивая коэффициент обратной связи K , первое слагаемое в скобках диффузионного уравнения (54) можно в принципе уменьшить до сколь угодно малой величины. Но второе слагаемое с учетом (56) с ростом $|K|$ стремится к конечному пределу

$$\frac{S_{ус\,вх}}{a^2|\eta|^2} \,. \tag{57}$$

Этот предел, по-видимому, и определяет минимальную скорость расплывания сгустка под действием, при этих условиях, шумов усилителя обратной связи.

Величина a – это коэффициент пропорциональности между амплитудой колебаний центра тяжести сгустка z_c и полем E_z на входе усилителя обратной связи (то-есть, на выходе пикап-электрода):

$$a = \frac{E_{пикап}}{z_c} \,.$$

Если предположить, что пикап-электрод работает на h-й гармонике частоты обращения сгустка, причем сгусток достаточно короток, то напряжение, наведенное пучком, равно

$$U_n = 2I_o \cdot R_n$$

где I_o – средний ток пучка, R_n – сопротивление в цепи пикап-электрода.

Колебания центра тяжести сгустка вызывают фазовую модуляцию h-й гармоники с индексом модуляции $h \cdot \frac{\dot{z}_c}{R}$. Это приводит к появлению боковых частот $h\omega_o \pm \Omega$, которые, собственно и являются полезным сигналом. В результате можно получить, с учетом двух боковых частот

$$E_{пикап} = \frac{2}{2\pi R} \cdot 2I_o R_n \cdot J_1\left(h\frac{\dot{z}_c}{R}\right),$$

где J_1 – функция Бесселя I-го порядка.

В линейном приближении

$$E_{пикап} = \frac{2}{2\pi R} \cdot I_o \cdot h\frac{\dot{z}_c}{R},$$

откуда

$$a = \frac{I_o R_n}{\pi R} \cdot \frac{h}{R}. \qquad (58)$$

Величина η является функцией частоты Ω и зависит, естественно, от функции распределения $f_o(J)$. Для оценки примем распределение гауссовским

$$f_o(J) = \frac{1}{2\pi J_o} \cdot e^{-\frac{J}{J_o}}, \qquad (59)$$

где J_o характеризует длину сгустка.

Обращаясь к выражению для $\eta(i\Omega)$ (45), легко показать, что для функции f_o вида (59) вещественная и мнимая части η – величины одного порядка, и поэтому достаточно ограничиться оценкой более простой мнимой части (при $\xi > 0$):

$$\eta'' = \frac{2\pi e}{M\xi\Omega_o^2} \cdot \pi J_\Omega \cdot \left.\frac{\partial f_o}{\partial J}\right|_{J=J_\Omega}, \quad J_\Omega = \frac{\Omega^2 - \Omega_o^2}{\xi\Omega_o^2}. \qquad (60)$$

Подставляя сюда f_o из (59) и полагая для определенности $J_\Omega = J_o$, получим для η'':

$$\eta'' \cong -\frac{0{,}4\pi e}{M \cdot \xi \cdot \Omega_o^2 \cdot J_o}. \qquad (61)$$

Это выражение упрощается, если учесть, как это следует из (60), что

$$\xi\Omega_o^2 J_o = \Omega_{cp}^2 - \Omega_o^2 \cong 2\Omega_o \cdot \Delta\Omega, \qquad (62)$$

где Ω_{cp} – частота, соответствующая J_o, а $\Delta\Omega = \Omega_{cp} - \Omega_o$ – характеризует величину разброса частот в сгустке.

Подставляя (62) в (61) и производя простые преобразования можно получить оценку η'':

$$\eta'' \cong -\frac{0{,}4\pi^2 R^2}{\frac{\Delta\Omega}{\Omega_o} \cdot U_m \cdot q}, \qquad (63)$$

где U_m – амплитуда ускоряющего напряжения, q – кратность радиочастоты, R – средний радиус накопителя.

Из (58) и (63) следует, что знаменатель (57) может быть оценен следующим образом

$$(a \cdot \eta'')^2 \cong \left(\frac{0{,}4\pi I_o R_n}{U_m}\right)^2 \cdot \frac{h^2}{q^2}\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_o}\right)^{-2} \qquad (64)$$

Для оценки выигрыша, который в пределе может дать обратная связь следует сравнить (29) с (57), используя оценку (64). С этой целью проще всего вычислить спектральную плотность действующего на пучок шумового напряжения, которое может быть определено с помощью (57)

$$\frac{\langle U_ш^2 \rangle}{\Delta f} = \frac{S_{ус\,вх} \cdot (2\pi R)^2}{a^2|\eta|^2} = \frac{\langle U_{ш\,ус\,вх}^2 \rangle}{a^2|\eta|^2 \cdot \Delta f}. \qquad (65)$$

Приняв $\langle U_{ш\,ус\,вх}^2 \rangle = 4kT \cdot R_n \cdot F_ш$, где $F_ш$ – коэффициент шума усилителя, а также следующие числовые значения для величин, входящих в (64):

$$I_o = 10^{-2}\,А, \quad R_n = 10^3\,Ом, \quad U_m = 10^7\,В, \quad \frac{h}{q} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega_o} = 10^{-2},$$

получим для $\langle U_ш^2\rangle/\Delta f$ из (65) при $F_ш=3$:

$$\frac{\langle U_ш^2\rangle}{\Delta f} = 1,2.10^{-8}\ \text{В}^2/\text{Гц}.$$

Подставляя эту цифру в (29), получаем оценку для инкремента при этих условиях

$$\delta \cong 1,2.10^{-13}\text{сек}^{-1},$$

то-есть цифру, удовлетворяющую, вероятно, самым высоким требованиям. Полученная предельная оценка показывает, что введение обратной связи, вероятно,позволит существенно уменьшить скорость расплывания сгустка в протонном накопителе. Возможные ограничения могут быть связаны с упомянутым в начале работы шумовым возбуждением мультипольных колебаний сгустка, не учтенных здесь при анализе действия обратной связи. Возвращаясь к (57), можно еще отметить, что для хвостов распределения $f_0(J)$ величина $|\gamma|^2$ падает. Поэтому даже при глубокой обратной связи диффузия хвостов будет происходить быстрее, чем сердцевины сгустка.

Литература

1. Г.Брук. Циклические ускорители заряженных частиц, Атомиздат, М. 1970.
2. М.М.Карлинер. Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой, препринт ИЯФ 74-105, Новосибирск, 1974 г.
3. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике, Наука, М., 1968.