

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 41  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

ОБ МГД-УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В  
ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ С БОЛЬШИМ  
ПРОБОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

ПРЕПРИНТ 80-130



Новосибирск



# ОБ МГД-УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ ЛОВУШКАХ С БОЛЬШИМ ПРОБОЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В аксиально-симметричном пробкотроне МГД-устойчивость плазмы относительно желобковых возмущений может быть обеспечена за счет контакта плазмы с хорошо проводящими торцами (см., например, обзор [1]). При этом чисто желобковые возмущения более невозможны, и потенциально опасными остаются только "баллонные" моды, которые локализованы в областях неблагоприятной кривизны силовых линий магнитного поля и неустойчивы при конечном значении

$$\beta > \beta_{\text{крит}}$$

С помощью простых оценок можно показать, что в пробкотроне с не слишком большим пробочным отношением  $K \sim 1$  предельное значение  $\beta$  по порядку величины равно единице [1]. Вместе с тем, в ряде практически важных случаев необходимо дать ответ на вопрос о величине  $\beta_{\text{крит}}$  при  $K \gg 1$ . В частности, такой вопрос возникает при анализе МГД-устойчивости газодинамической ловушки [2], где  $K$  достигает значений 30-100, и центрального пробкотрона амбиполярной ловушки [3,4], где  $K = 20-30$  (рис.1). Интуитивно кажется, что, вследствие уменьшения площади контакта плазмы с торцом, стабилизирующее влияние последнего на устойчивость должно уменьшиться - с соответствующим уменьшением  $\beta_{\text{крит}}$  до значений, малых по сравнению с единицей. Приводимое ниже исследование позволяет установить, когда это действительно так.

Анализ устойчивости проводится на основе энергетичес-



кого принципа [5] (см. также обзоры [1,6]). При этом для наглядного выявления эффекта большого пробочного отношения и установления соответствия с традиционной постановкой задачи мы считаем, что идеально проводящие торцы помещены непосредственно в пробках (рис.1). Тем самым мы сужаем класс возможных возмущений, допускаемых к соревнованию при минимизации потенциальной энергии, т.е. получаемые в настоящей работе условия неустойчивости имеют характер достаточных, а определяемые из них значения  $\beta_{\text{крит}}$  дают в действительности верхнюю границу этой величины. Вместе с тем, отличие между истинным значением  $\beta_{\text{крит}}$  и ее верхней границей должно быть малым, поскольку в обеих рассматриваемых системах непосредственно за пробкой располагается глубокая (и заполненная плазмой!) магнитная яма (область резко расходящихся силовых линий в газодинамической ловушке и крайний пробкотрон в амбиполярной ловушке); вследствие этого силовые линии оказываются фактически жестко закрепленными в пробках, и мы возвращаемся к условию вмороженности.

Помимо двух упомянутых систем, в работе рассмотрен также "плоский" пробкотрон, т.е. пробкотрон, в котором магнитное поле имеет только составляющие  $B_x = B_x(x, z)$  и  $B_z = B_z(x, z)$  (рис.2). Эта система представляет интерес в том отношении, что, будучи достаточно простой для исследования, она вместе с тем несет в себе многие черты аксиально-несимметричного пробкотрона при большой эллиптичности пробок. Кроме того, она имитирует участок  $ab$  (рис.3) аксиально-симметричной ловушки, рассмотренной в работе [7].

Дальнейший план изложения следующий: в разделе 2 на основе наглядных соображений оценивается возмущение магнитной энергии плазмы и выявляются условия, при которых большое пробочное отношение действительно приводит к уменьшению  $\beta_{\text{крит}}$ . В разделе 3 с учетом этих результатов проводится формальная минимизация полной потенциальной энергии системы и находится уравнение для собственных функций наиболее опасных возмущений. Это уравне-

ние решается в разделе 4, где в итоге получаются простые аналитические формулы для  $\beta_{\text{крит}}$ .

## 2. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ВОЗМУЩЕНИЯ МАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

В соответствии с ожидаемым результатом, рассмотрим с самого начала плазму с  $\beta \ll 1$ . Ответ на вопрос об устойчивости в этом случае существенно зависит от того, насколько малым может быть сделано возмущение магнитной энергии

$$\delta W_M = \int \frac{\delta \vec{B}^2}{8\pi} dV, \quad (1)$$

где  $\delta \vec{B}$  - возмущение магнитного поля. В частности, желобковые возмущения выделены именно тем, что в них  $\delta \vec{B} = 0$  и поэтому они могут быть неустойчивыми даже при  $\beta \rightarrow 0$ .

В нашем случае наличие идеально проводящих торцов исключает возможность развития чисто желобковых возмущений, и до проведения формальной минимизации полной потенциальной энергии возмущения полезно составить качественное суждение о величине  $\delta W_M$ .

Для простоты (и в соответствии с реальной ситуацией) будем считать, что силовые линии образуют малый угол с магнитной осью системы (параксиальное приближение), и что расстояние между пробками велико по сравнению с длиной пробок (так что устойчивость каждой из них может рассматриваться независимо от устойчивости противоположной). Малый параметр, характеризующий точность параксиального приближения, есть  $a/L_{\text{пр}}$ , где  $a$  - поперечник плазмы в однородной части ловушки,  $L_{\text{пр}}$  - длина пробки.

Оценим сначала  $\delta W_M$  для газодинамической ловушки и для плоского пробкотрона, т.е. для систем с плоскими силовыми линиями (в амбиполярной ловушке силовые линии, за исключением тех, которые лежат в плоскостях симметрии, не



являются плоскими кривыми). Для этих двух систем в параксиальном приближении магнитное поле полностью определяется заданием функции  $B(z)$  — напряженности магнитного поля на оси системы. С точностью до малых порядка

$(a/L_{np})^2$  уравнение силовых линий может быть записано в виде

$$x^\mu B(z) = \text{const},$$

где  $\mu = 1$  для плоского и  $\mu = 2$  для аксиально-симметричного пробкотронов.

Каждую силовую линию удобно маркировать ее расстоянием  $x_0$  от магнитной оси системы в области однородного магнитного поля (при  $z > L_{np}$ , рис.4), т.е. записывать уравнение силовой линии в форме

$$x = x(x_0, z). \quad (2)$$

В рассматриваемом случае

$$x = x_0 K^{-1/\mu}, \quad (3)$$

где через  $K$  обозначено текущее пробочное отношение  $B(z)/B_0$ ,  $B_0$  — напряженность магнитного поля в области однородности (при  $z > L_{np}$ ).

Для желобкового возмущения зависимость смещения  $\xi$  элемента плазмы от координаты  $z$  в параксиальном приближении определяется формулой

$$\xi(z) = \xi_{ж}(z) \equiv \xi_0 \frac{\partial x(x_0, z)}{\partial x_0}, \quad (4)$$

где  $\xi_0$  — смещение силовой трубки при  $z > L_{np}$  (рис.4). При таком смещении исходная силовая линия в точности совмещается с некоторой другой силовой линией невозмущенного магнитного поля. При этом путем подходящего изменения сечения трубки по ее длине можно добиться того, чтобы магнитное поле в смещенной трубке в точности совпадало с тем, которое было здесь ранее, т.е. чтобы магнитная энергия не возмущалась.

Смещение (4) не удовлетворяет условию вмороженности  $\xi(0)=0$ . Соответственно, в нашем случае вместо (4) следует рассмотреть смещение более общего вида:

$$\xi(z) = \xi_{ж}(z) \cdot \alpha(z),$$

где  $\alpha(z)$  — некоторая безразмерная функция. Наложим на нее два граничных условия:

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(L_{np}) = 1. \quad (5)$$

Первое из них обеспечивает выполнение условия вмороженности, а второе имеет смысл условия нормировки (оно фиксирует величину смещения на границе пробки).

В новом положении силовой трубки магнитное поле внутри нее отличается от окружающего на величину  $\delta \vec{B} = \delta \vec{B}_{\parallel} + \delta \vec{B}_{\perp}$ , где индексы  $\parallel$  и  $\perp$  относятся к направлению окружающего магнитного поля. В параксиальном приближении угол между направлением отклоненной силовой трубки и окружающим ее в новом положении магнитным полем равен, очевидно,

$$\varepsilon(z) = \xi_{ж}(z) \frac{d\alpha}{dz}.$$

В том же приближении  $\delta B_{\perp} = \varepsilon B(z)$ . Что касается  $\delta \vec{B}_{\parallel}$ , то эта величина может быть обращена в нуль подбором нового сечения трубки (так же, как и в случае желобкового возмущения). В результате получаем, что

$$\delta W_M = \int \frac{\delta B_{\perp}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int \xi_{ж}^2 B^2 \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 dV,$$

где интегрирование проводится по объему силовой трубки. В параксиальном приближении из условия сохранения магнитного потока  $\Delta\Phi$  внутри силовой трубки имеем

$$dV \approx \Delta\Phi dz / B(z), \quad \text{т.е.}$$

$$\delta W_M = \frac{\Delta\Phi}{8\pi} \int \xi_{ж}^2 B \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 dz \quad (6)$$



Далее, учитывая (3) и (4), находим, что

$$\delta W_M = \frac{\Delta \Phi \xi_0^2 B_0}{8\pi} \int_K^{1-\frac{z}{M}} \left( \frac{d\alpha}{dz} \right)^2 dz.$$

Минимизация  $\delta W_M$  приводит к следующему уравнению Эйлера:

$$\frac{d}{dz} \left( K^{1-\frac{z}{M}} \frac{d\alpha}{dz} \right) = 0.$$

Отсюда (с учетом граничных условий (5)) легко находится

$$\alpha = \left( \int_0^z K^{\frac{z}{M}-1} dz \right) \left( \int_0^{L_{np}} K^{\frac{z}{M}-1} dz \right)^{-1}, \quad (7)$$

и соответственно определяется минимальное значение

$$\min \delta W_M = \frac{\Delta \Phi \xi_0^2 B_0}{8\pi L_{np}} \left( \int_0^{L_{np}} K^{\frac{z}{M}-1} \frac{dz}{L_{np}} \right)^{-1}.$$

Замечательным образом оказывается, что в аксиально-симметричном случае функция  $B(z)$  вообще выпадает из выражения для  $\min \delta W_M$ , что свидетельствует о нечувствительности  $\beta_{\text{крит}}$  к пробочному отношению:  $\beta_{\text{крит}}$  остается порядка единицы даже при  $K \gg 1$ . Напротив, в плоском случае  $\min \delta W_M \sim 1/\bar{K}$  где  $\bar{K} = \int_0^{L_{np}} K dz / L_{np}$ , и можно ожидать уменьшения  $\beta_{\text{крит}}$  при росте пробочного отношения, если длина области сильного поля достаточно велика, так что  $\bar{K} \gg 1$ .

Качественно разница между плоским и аксиально-симметричным случаями состоит в том, что в первом из них желобковое возмущение спадает в направлении сильного поля существенно быстрее ( $\xi_{\text{ж}} \sim B_0/B$ ), чем во втором ( $\xi_{\text{ж}} \sim \sqrt{B_0/B}$ ), и поэтому в плоском случае требуется меньшее искажение поля, чтобы осуществить переход от почти желобкового возмущения в области  $B \sim B_0$  к нулевому смещению в пробке. И в самом деле, как видно

из формулы (7), при  $\bar{K} \gg 1$  функция  $\alpha(z)$ , описывающая этот переход, в плоском случае достигает значения  $\alpha \approx 1$  значительно раньше, чем в аксиально-симметричном (см. рис. 5).

Приведенные соображения указывают на то, что в случае центрального пробкотрона амбиполярной ловушки при большой эллиптичности пробок наиболее опасными будут возмущения, локализованные вблизи плоскости  $y=0$  (рис. 16), поскольку в этой области структура поля подобна той, которая имеется в плоском пробкотроне. При анализе таких возмущений возникает важное упрощение, связанное с тем, что силовые линии в рассматриваемой области являются плоскими кривыми. Соответственно, для вычисления  $\delta W_M$  можно воспользоваться формулами (4), (6), только теперь при нахождении  $\xi_{\text{ж}}$  соотношение (3) следует заменить уравнением силовой линии в плоскости симметрии квадрупольной пробки. Известно (см., например, [8]), что в параксиальном приближении форма силовых линий в этой плоскости может быть выражена в терминах текущего пробочного отношения  $K(z)$  и эллиптичности магнитных поверхностей  $E(z)$ :

$$x = x_0 (KE)^{-1/2}. \quad (8)$$

Дальнейшие вычисления идентичны вышеприведенным и дают

$$\min \delta W_M = \frac{\Delta \Phi \xi_0^2 B_0}{8\pi L_{np}} \left( \int_0^{L_{np}} E \frac{dz}{L_{np}} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом, если в пробке имеется участок с достаточно большой эллиптичностью, то  $\beta_{\text{крит}}$  может быть существенно меньше единицы:  $\beta_{\text{крит}} \sim 1/\bar{E}$ . При

\*) Под эллиптичностью понимается отношение максимального и минимального диаметров сечения магнитной поверхности плоскостью, перпендикулярной к магнитной оси.



этом необходимо отметить, что этот вывод, основанный на выражении (9) для магнитной энергии, справедлив только для амбиполярных ловушек с достаточно длинной областью однородного поля между пробками. В противном случае возмущение магнитной энергии в области однородности может превышать величину  $\delta W_M$  (9), приводя к возрастанию значения  $\beta_{\text{крит}}$  (см. раздел 4).

В заключение отметим, что в приводившихся выше формулах для  $\min \delta W_M$  величина  $L_{\text{пр}}$  не имеет строго количественного смысла для пробок, плавно стыкующихся с областью однородного поля. Поэтому соответствующие выражения носят характер оценок. Неопределенность, связанная с выбором  $L_{\text{пр}}$ , устраняется при формальном анализе задачи, к изложению которого мы переходим.

### 3. МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ

Переходя к описанию минимизации функционала энергии, мы будем для определенности говорить об амбиполярной ловушке, хотя все те же рассуждения применимы к плоской и аксиально симметричной геометрии поля\*), а полученный результат (формула (20)) справедлив для всех трех случаев.

В качестве исходного воспользуемся следующим выражением для потенциальной энергии возмущения [5]:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma p (\text{div} \hat{\xi})^2 + \frac{1}{4\pi} (\delta \vec{B} + (\hat{\xi} \hat{e}) [\text{rot} \hat{B} \times \hat{e}])^2 - \frac{1}{2\pi} (\hat{\xi} \hat{e})^2 [\text{rot} \hat{B} \times \hat{e}] (\hat{B} \nabla) \hat{e} \right\}, \quad (10)$$

\*) Более того, для плоского пробкотрона (так же как и для аксиально-симметричного пробкотрона, см. [5]) минимизация выражения (10) может быть проведена совершенно строго (без априорного предположения об узости желобка).

где  $\delta \vec{B} = \text{rot} [\hat{\xi} \times \hat{B}]$ ,  $\hat{e}$  — единичный вектор, направленный вдоль  $\nabla p$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Подынтегральное выражение в (10) представляет собой квадратичную форму относительно компонент вектора  $\hat{\xi}$  и их первых производных, коэффициенты которой являются функциями координат. Формальная задача минимизации функционала  $\delta W$  существенно упрощается, если ограничиться рассмотрением таких возмущений, в которых функция  $\hat{\xi}(\vec{r})$  отлична от нуля только в узкой окрестности некоторой силовой линии  $L$ . Это позволяет при вычислении (10) пренебречь изменением коэффициентов квадратичной формы на масштабе порядка поперечного размера желобка и подставлять в подынтегральное выражение их значения, взятые в точках самой силовой линии  $L$ . В результате эти коэффициенты становятся функциями только одной переменной (в качестве которой, например, можно выбрать длину силовой линии  $s$ ) а соответствующая вариационная задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

В соответствии с результатами предыдущего раздела мы будем считать, что опорная силовая линия  $L$  лежит в плоскости симметрии амбиполярной ловушки, как изображено на рис.16. В окрестности  $L$  введем систему локальных координат с единичными векторами  $\hat{s}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{b}$ , направленными соответственно по касательной, нормали и бинормали к силовой линии, проходящей через данную точку пространства. Очевидно на самой силовой линии  $L$  входящий в выражение (10) вектор  $\hat{e}$  совпадает с  $\hat{n}$  (либо антипараллелен ему).

Как следует из вывода энергетического принципа (см., например, [1]), составляющая смещения вдоль поля  $\xi_s$  дает вклад только в первое слагаемое в подынтегральном выражении (10), поэтому при вычислении возмущения магнитного поля  $\delta \vec{B}$  можно положить  $\xi_s = 0$  (при этом мы, фактически, отбрасываем в  $\delta W$  члены, которые интегрированием по частям сводятся к поверхностному интегралу). С учетом этого замечания, пользуясь тождеством



$$\text{rot} [\vec{\xi} \times \vec{B}] = (\vec{B} \nabla) \vec{\xi} - (\vec{\xi} \nabla) \vec{B} - B \text{div} \vec{\xi},$$

для компонент  $\delta \vec{B}$  находим

$$\delta B_s = \vec{B} \frac{\partial \vec{\xi}_n}{\partial s} - \vec{\xi}_n \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} - B \text{div} \vec{\xi}, \quad (11)$$

$$\delta B_b = \vec{b} B \frac{\partial \vec{\xi}_b}{\partial s} - \vec{\xi}_b \frac{\partial \vec{B}}{\partial b}, \quad (12)$$

$$\delta B_n = B \vec{n} \frac{\partial \vec{\xi}_n}{\partial s} - \vec{\xi}_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}. \quad (13)$$

В формулах (11)-(13) отброшены члены, пропорциональные  $\vec{n} \cdot \partial \vec{B} / \partial s$ ,  $\vec{b} \cdot \partial \vec{n} / \partial s$ , обращающиеся в нуль на  $\mathcal{L}$ , а также учтено, что в плоскости симметрии ловушки вектор  $\partial \vec{B} / \partial b$  направлен вдоль  $\vec{b}$ , так что  $\vec{n} \cdot \partial \vec{B} / \partial b = \vec{s} \cdot \partial \vec{B} / \partial b = 0$ .

Выражение  $[\text{rot} \vec{B} \times \vec{e}]$ , в соответствии со сказанным выше, достаточно вычислить на силовой линии  $\mathcal{L}$ . Воспользовавшись уравнением равновесия

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{B}], \quad (14)$$

находим

$$\frac{1}{4\pi} [\text{rot} \vec{B} \times \vec{n}] = -\frac{\vec{s}}{B} \frac{\partial p}{\partial n} + \vec{b} \frac{j_n}{c}, \quad (15)$$

где  $j_n$  — составляющая тока вдоль силовой линии. Как следует из результатов работы [9], в плоскостях симметрии центрального пробкотрона амбиполярной ловушки продольные токи не текут, поэтому второе слагаемое в правой части (15) равно нулю.

С помощью соотношений (11)-(13), (15) выражение для  $\delta W$  можно теперь записать в следующем виде:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma p (\text{div} \vec{\xi})^2 + \frac{1}{4\pi} (B \vec{\xi}_n \vec{s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} - \vec{\xi}_n \frac{\partial B}{\partial n} - B \text{div} \vec{\xi}_\perp - \frac{4\pi}{B} \vec{\xi}_n \frac{\partial p}{\partial n})^2 + \frac{1}{4\pi} (B \frac{\partial \xi_b}{\partial s} - \vec{\xi}_b \vec{b} \frac{\partial \vec{B}}{\partial b})^2 + \frac{1}{4\pi} (B \frac{\partial \xi_n}{\partial s} - \vec{\xi}_n B \vec{n} \frac{\partial \vec{s}}{\partial n})^2 + 2 \vec{\xi}_n^2 \frac{\partial p}{\partial n} \vec{s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s} \right\}. \quad (16)$$

Если ввести проекцию  $\alpha_n$  вектора кривизны силовой линии на направление  $\vec{n}$ :

$$\alpha_n = \vec{n} \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} = -\vec{s} \frac{\partial \vec{n}}{\partial s}$$

и заметить, что из (14) следует соотношение

$$4\pi \frac{\partial p}{\partial n} = -B \frac{\partial B}{\partial n} + B^2 \alpha_n,$$

то выражение (16) несколько упрощается:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int dV \left\{ \gamma p (\text{div} \vec{\xi})^2 + \frac{1}{4\pi} (2B \vec{\xi}_n \alpha_n + B \text{div} \vec{\xi}_\perp)^2 + \frac{1}{4\pi} (B \frac{\partial \xi_b}{\partial s} - \vec{\xi}_b \vec{b} \frac{\partial \vec{B}}{\partial b})^2 + \frac{1}{4\pi} (B \frac{\partial \xi_n}{\partial s} - \vec{\xi}_n B \vec{n} \frac{\partial \vec{s}}{\partial n})^2 - 2 \vec{\xi}_n^2 \alpha_n \frac{\partial p}{\partial n} \right\}. \quad (17)$$

Функционал (17) удается строго минимизировать относительно переменной  $\vec{\xi}_b$ . Процесс минимизации заключается в том, что одновременно устремляются к нулю  $\vec{\xi}_b$  и размер желобка в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии, так, чтобы производная  $\vec{\xi}_b$  по этому направлению, входящая в  $\text{div} \vec{\xi}_\perp$ , оставалась конечной, причем значение этой производной подбирается таким, чтобы выполнялось равенство

$$\text{div} \vec{\xi}_\perp = -2 \vec{\xi}_n \alpha_n, \quad (18)$$

то есть второе слагаемое в (17) обратилось в нуль. Одновременно вместе с  $\vec{\xi}_b$  стремится к нулю и третье слагаемое. Что же касается члена, пропорционального

$(\text{div} \vec{\xi})^2$ , то в рассматриваемом нами параксиальном приближении он оказывается малым по сравнению с последним слагаемым в (17). Действительно, даже не проводя минимизации по  $\vec{\xi}_s$ , а просто положив  $\vec{\xi}_s = 0$ , имеем  $\text{div} \vec{\xi} = \text{div} \vec{\xi}_\perp$ , и с помощью (18) находим, что отношение первого и последнего членов в подынтегральном выражении (17) по порядку величины равно



$a\kappa_n \sim a^2/L_{np}^2 \ll 1$ . В результате в формуле (17) под интегралом остаются только два последних слагаемых. Принимая, что функция  $\xi_n$  постоянна в перпендикулярном к силовой линии сечении желобка и заменяя  $dW = \Delta\Phi ds/B$  где  $\Delta\Phi$  — магнитный поток внутри желобка, окончательно имеем

$$\delta W = \frac{1}{2} \Delta\Phi \int \frac{ds}{B} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left( B \frac{\partial \xi_n}{\partial s} - \xi_n B \vec{n} \frac{\partial \vec{s}}{\partial n} \right)^2 - 2 \xi_n^2 \kappa_n \frac{\partial p}{\partial n} \right\}. \quad (19)$$

В параксиальном приближении с достаточной точностью можно заменить длину дуги  $S$  на  $z$ , а поле на силовой линии  $B$  на  $B_0$ . Если учесть, что во всех трех типах рассматриваемых нами ловушек уравнение опорной силовой линии имеет вид  $X(X_0, z) = X_0 q(z)$  (см. формулы (3) и (7)), и выразить кривизну  $\kappa_n$  и параметр  $\vec{n} \cdot \partial \vec{s} / \partial n$  через функцию  $q$ , то в результате получается:

$$\delta W = \frac{\Delta\Phi B_0}{8\pi} \int dz \left[ \kappa q^2 \left( \frac{d\xi_n q^{-1}}{dz} \right)^2 + \beta \frac{q''}{q\kappa} \xi_n^2 \right], \quad (20)$$

где

$$\beta = -8\pi \frac{X_0}{B_0^2} \frac{\partial p}{\partial X_0},$$

а штрих обозначает дифференцирование по  $z$ . Учитывая определение функции  $\alpha(z)$  в (6), легко видеть, что первое слагаемое в правой части (20), представляющее собой возмущение магнитной энергии, в точности совпадает с  $\delta W_M$  из формулы (6). Отметим, что входящий в формулу (20) параметр  $\beta$  определяется через градиент давления на рассматриваемой силовой линии в области однородного поля и не зависит от  $z$ .

Для амбиполярной ловушки согласно (7)

$$q(z) = (\kappa E)^{-1/2} \quad (21)$$

и выражение (20) можно записать в более удобном для

анализа виде:

$$\delta W = \frac{\Delta\Phi B_0}{8\pi} \int dz \left[ E^{-1} \left( \frac{d\xi_n q^{-1}}{dz} \right)^2 + \beta q q'' E \xi_n^2 \right]. \quad (22)$$

Что же касается плоской и аксиально-симметричной геометрии поля, то функции  $q(z)$  для них можно получить как частные случаи зависимости (21): для плоского пробкотрона  $E \equiv \kappa$  ( $q = \kappa^{-1}$ ), для аксиально-симметричного —  $E \equiv 1$  ( $q = \kappa^{-1/2}$ ). Поэтому функционал  $\delta W$  для этих двух типов ловушек получается из (22) указанным выбором функции  $E$ .

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ $\beta_{\text{крит}}$ ДЛЯ АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКИ

Варьируя функционал (22), мы приходим к следующему уравнению для смещения  $\xi_n$ :

$$\left( \frac{1}{E} \left( \frac{\xi_n}{q} \right)' \right)' - \beta q^2 q'' E \xi_n = 0. \quad (23)$$

Граничные условия к этому уравнению, как обсуждалось во Введении, состоят в обращении  $\alpha$  в нуль в пробках (в плоскостях 1 и 2 на рис.6). Задача, однако, упростится, если второе граничное условие  $\alpha = 0$  поставить в области однородного поля перед входом в пробку 2 (в плоскости 2' на рис.6). Это не приводит к ошибке, если на участке 2-2 силовая линия имеет благоприятную кривизну, так как длина ловушки  $L$  велика по сравнению с длиной пробки  $L_{np}$ .

Вводя функцию  $\alpha \equiv \xi_n / q$  и новую независимую переменную  $\zeta$ ,

$$\zeta(z) = \int_0^z E(z') dz', \quad (24)$$

запишем уравнение (23) в следующем виде:



$$\frac{d^2 \alpha}{d \zeta^2} - \beta q^3 q'' \alpha = 0. \quad (25)$$

Как видно, нахождение значения  $\beta_{\text{крит}}$ , при котором существует отличное от нуля решение (25) (с указанными выше граничными условиями), сводится к квантовомеханической задаче об определении условий возникновения уровня нулевой энергии в потенциале  $V(\zeta)$  (см. рис. 7):

$$V(\zeta) = \begin{cases} \infty, & \zeta < 0 \\ \beta q^3 q'', & 0 < \zeta < \zeta_L \\ \infty, & \zeta_L < \zeta \end{cases}$$

где  $\zeta_L$  — значение  $\zeta$ , соответствующее точке  $z = L$ . Заметим теперь, что функция  $\beta q^3 q'' = -(1/2)\beta(kE)^{-4}[kE(kE)'' - \frac{3}{2}(kE)'^2]$  равна нулю вне пробки (при  $z > L_{\text{пр}}$ ) и быстро спадает в глубь пробки вместе с ростом  $kE$ . Таким образом, характерный размер потенциальной ямы  $\Delta z$  равен  $\sim L_{\text{пр}}$ , а сама она расположена в области пробки, где  $k \sim E \sim 1$ , т.е. в области, примыкающей к однородному магнитному полю. На шкале  $\zeta$  этому соответствует потенциальная яма ширины  $\Delta \zeta \sim L_{\text{пр}}$ , расположенная в точке  $\zeta_0 \sim E L_{\text{пр}}$  на расстоянии  $\zeta_L - \zeta_0 \sim L$  от правой границы.

В шкале  $\zeta$  ширина ямы много меньше ее расстояния до границ. Если бы расстояние до границ было вообще бесконечным, то, как известно, локализованное решение существовало бы при сколь угодно малом значении  $\beta$  [10]. Поэтому конечность предельного значения  $\beta$  связана именно с конечностью расстояний до стенки, и  $\beta_{\text{крит}}$  будет мало, пока выполняются условия  $E \gg 1$ ,  $L \gg L_{\text{пр}}$ . Таким образом при  $E \gg 1$ ,  $L \gg L_{\text{пр}}$ , должно быть  $\beta \ll 1$ , и мы приходим к задаче о возникновении уровня нулевой энергии в мелкой яме, находящейся между двумя бесконечно высокими стенками. При ее решении, так же как и в известной задаче о мелкой яме [10], можно пренебречь изменением функции  $\alpha(\zeta)$  на масштабе ямы, задав скачок производной  $d\alpha/d\zeta$  в точке  $\zeta_0$ :

$$\left. \frac{d\alpha}{d\zeta} \right|_{\zeta_0+0} - \left. \frac{d\alpha}{d\zeta} \right|_{\zeta_0-0} = \beta \alpha(\zeta_0) \int q^3 q'' d\zeta,$$

где интегрирование ведется по области, в которой подынтегральное выражение существенно отлично от нуля. В результате получается следующее выражение для  $\beta_{\text{крит}}$ :

$$\beta_{\text{крит}}^{-1} = - \frac{1}{\zeta_L} \int_0^{\zeta_L} (\zeta_L - \zeta) \zeta q^3 q'' d\zeta. \quad (26)$$

Разумеется, формула (26) справедлива только если вычисленное по ней значение  $\beta_{\text{крит}}$  мало по сравнению с единицей.

Из (26) легко получить грубую оценку  $\beta_{\text{крит}}$ , содержащую зависимость  $\beta_{\text{крит}}$  от длины ловушки  $L$ . Оценивая  $q'' \sim 1/L_{\text{пр}}^2$ , имеем

$$\beta_{\text{крит}}^{-1} \sim \frac{1}{L_{\text{пр}}} \frac{\zeta_0(\zeta_L - \zeta_0)}{\zeta_L},$$

что с помощью приведенных выше значений  $\zeta_0$  и  $\zeta_L - \zeta_0$  дает

$$\beta_{\text{крит}} \sim \frac{L_{\text{пр}}}{L} + \frac{1}{E}. \quad (27)$$

Таким образом при  $L \lesssim L_{\text{пр}} E$   $\beta_{\text{крит}}$  возрастает по сравнению с оценкой, полученной в предыдущем разделе без учета конечной длины ловушки.

В обратном предельном случае  $L \gtrsim L_{\text{пр}} E$  формулу (26) можно упростить, заменив  $\zeta_L - \zeta$  на  $\zeta_L$ :

$$\beta_{\text{крит}}^{-1} = - \int_0^{\infty} q^3 q'' E dz \int_0^z E(z') dz' \quad (28)$$

(мы вернулись к переменной  $z$  и в качестве верхнего предела взяли  $\infty$ , имея в виду, что основной вклад в (28) вносит область  $z \sim L_{\text{пр}} \ll L$ ). Поскольку выражение (28) определяется только конфигурацией магнитного поля внутри пробки, то его можно рассматривать как характеристику "качества" асимметричной пробки по отношению к балонным модам. Для примера укажем, что для ловушки АМБАЛ, функции  $E$  и  $k$  которой приведены на рис. 8, вычисления по формуле (28) дают  $\beta_{\text{крит}} = 0,09$ . При этом необходимо подчеркнуть, что фактически в



АМБАЛе параметр  $L_{np}/L \sim 1$ , так что, согласно (27), для реальной установки  $\beta_{крит}$  будет порядка единицы.

Полученные выше выражения для  $\beta_{крит}$  могут быть использованы для оптимизации магнитного поля амбиполярной ловушки с целью увеличения значения  $\beta_{крит}$ . То, что даже при большой эллиптичности существуют "хорошие" магнитные пробки, для которых  $\beta_{крит} \sim 1$ , доказывает рассмотрение конфигурации поля, характеризующегося функциями  $E(z)$  и  $k(z)$  следующего вида:

$$k(z) = E(z) = 1 + \frac{2(E_m - 1)}{1 + (\frac{z^2}{\ell^2} + 1)^{p/2}}$$

где  $E_m$  — максимальное значение  $E$ , а  $\ell$  имеет размерность длины<sup>\*</sup>. В предположении, что  $E_m \gg 1$ , результаты вычислений по формуле (28) показывают, что класс "хороших" пробок ( $\beta_{крит} \sim 1$ ) характеризуется показателями степени  $p < 1$ , при  $p > 1$   $\beta_{крит} \sim E_m^{(1/p)-1} \ll 1$ .

В заключение авторы благодарят Б.Н.Брейзмана и Г.В.Рослякова за полезную критику и П.Б.Лысянского за предоставление результатов расчета магнитного поля установки АМБАЛ.

\* Заметим, что выражение (28) инвариантно относительно преобразования  $z \rightarrow \text{const} \cdot z$ , так что величина масштаба  $\ell$  не влияет на значение  $\beta_{крит}$ .

### Л и т е р а т у р а :

1. Б.Б.Кадомцев. В сб. "Вопросы теории плазмы", вып.2, стр.132. М., Госатомиздат, 1963.
2. В.В.Мирнов, Д.Д.Рютов. Письма в ЖТФ, 5, 678, 1979.
3. Г.И.Димов, В.В.Закайдаков, М.Е.Кишиневский. Физика плазмы, 2, 597, 1976.
4. T.K. Fowler, B.G. Logan. Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 2, 167, 1977.
5. I.V. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, R.M. Kulstad. Proc. Roy. Soc., 244, 17, 1958.
6. А.Б.Михайловский. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М., Атомиздат, 1978.
7. B.G. Logan. Preprint UCRL-83555, Livermore, 1979.
8. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. Физика плазмы 4, 501, 1978.
9. Г.В.Ступаков. Физика плазмы 5, 871, 1979.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М., Наука, 1963, § 45



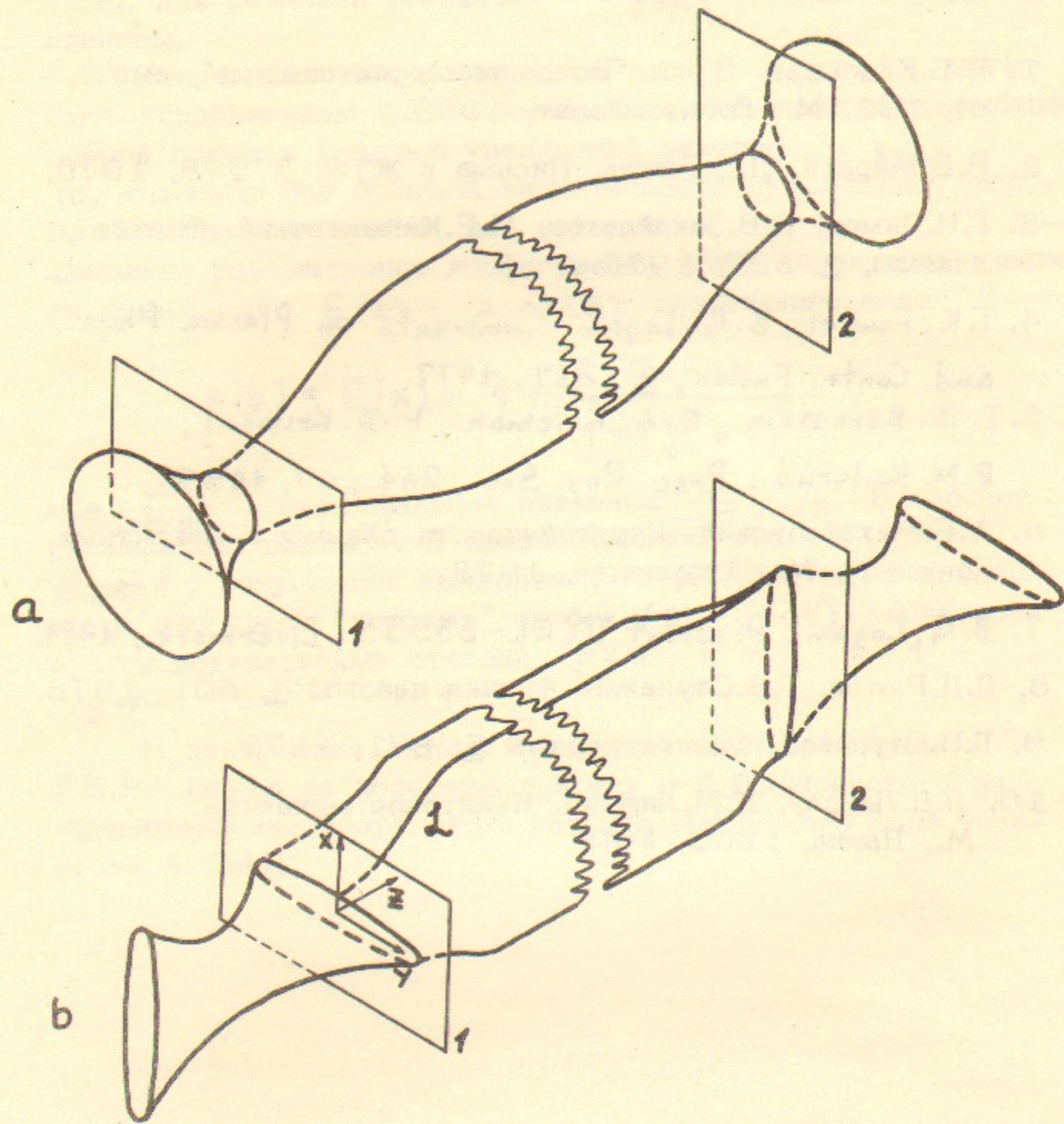


Рис.1. Геометрия магнитного поля газодинамической (а) и амбиполярной (б) ловушек. Цифрами 1 и 2 обозначены плоскости, в которых ставится условие вмороженности.

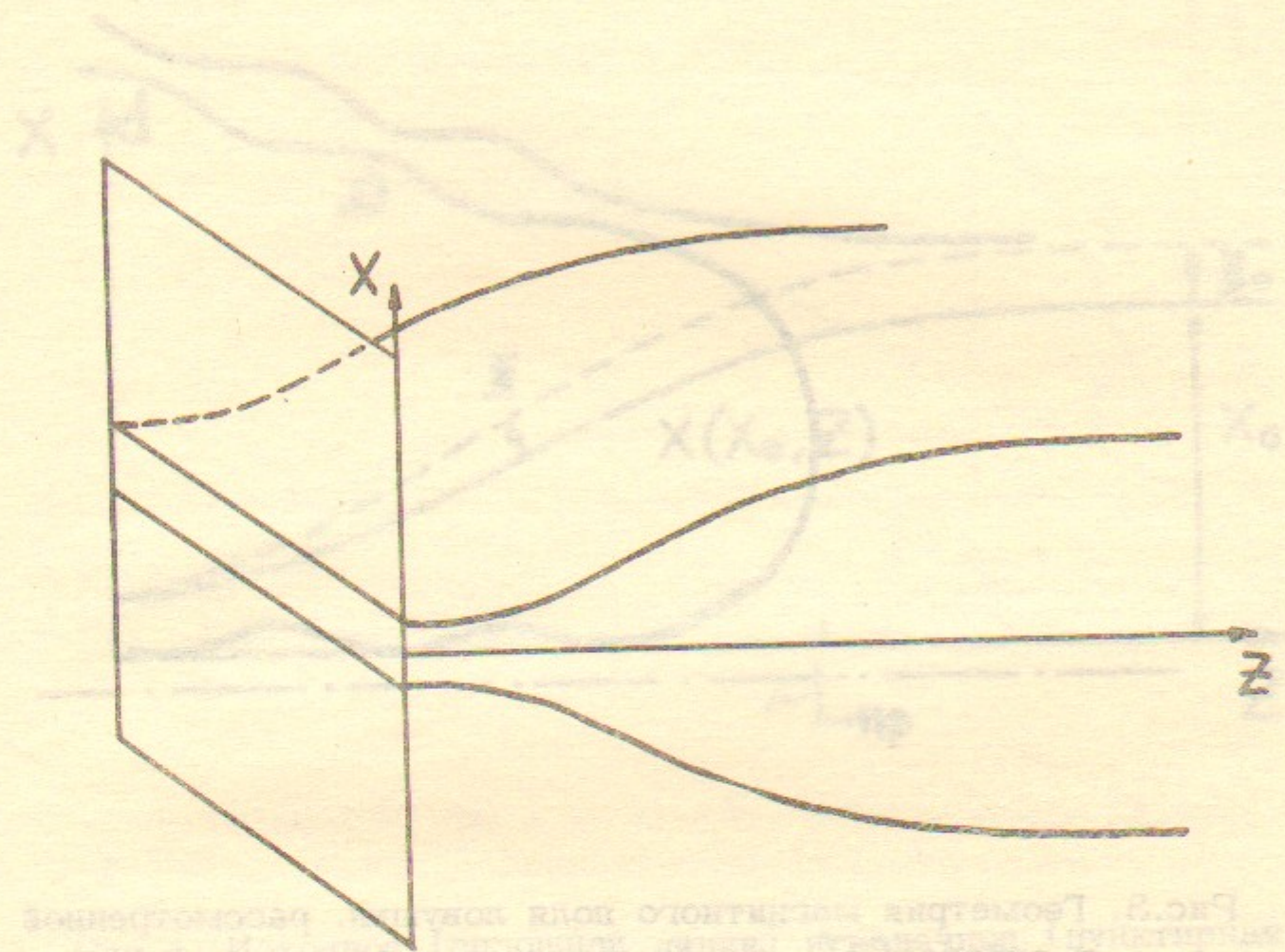


Рис.2. Геометрия магнитного поля плоского пробкотрона. Силовые линии "вморожены" в плоскость  $z = 0$ .



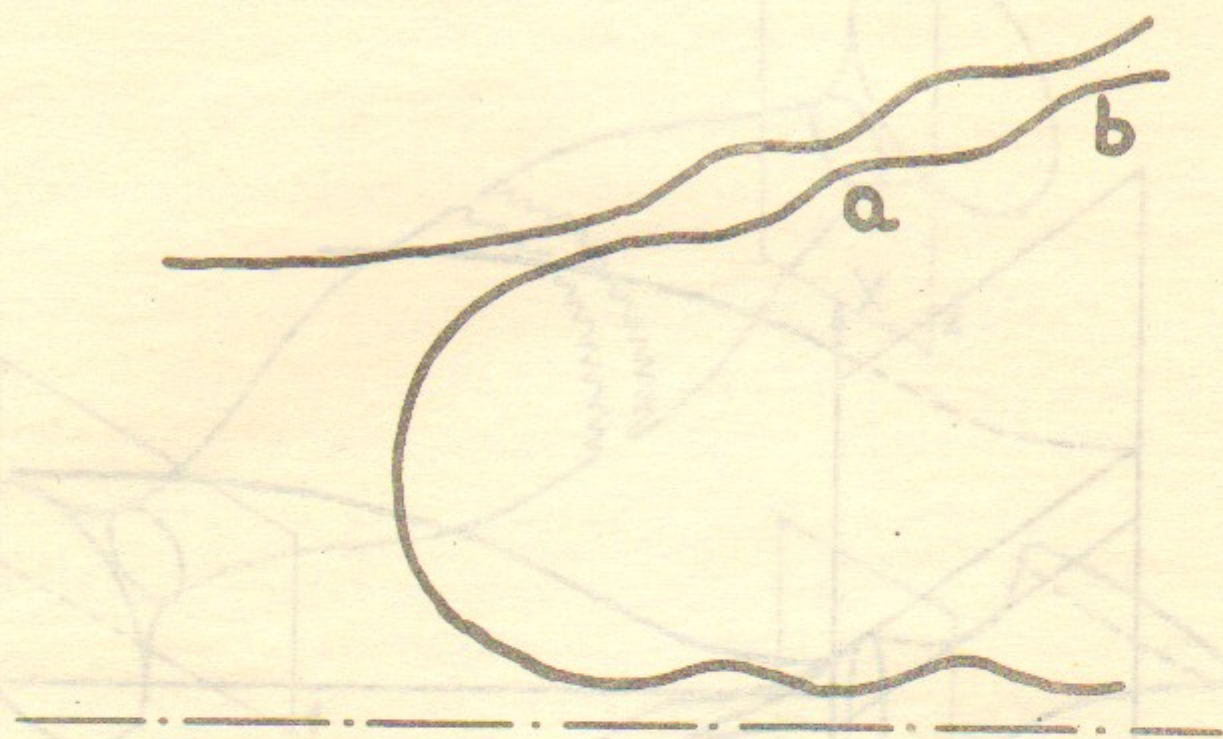


Рис.3. Геометрия магнитного поля ловушки, рассмотренной в работе [7]. Система аксиально-симметрична относительно осевой линии.

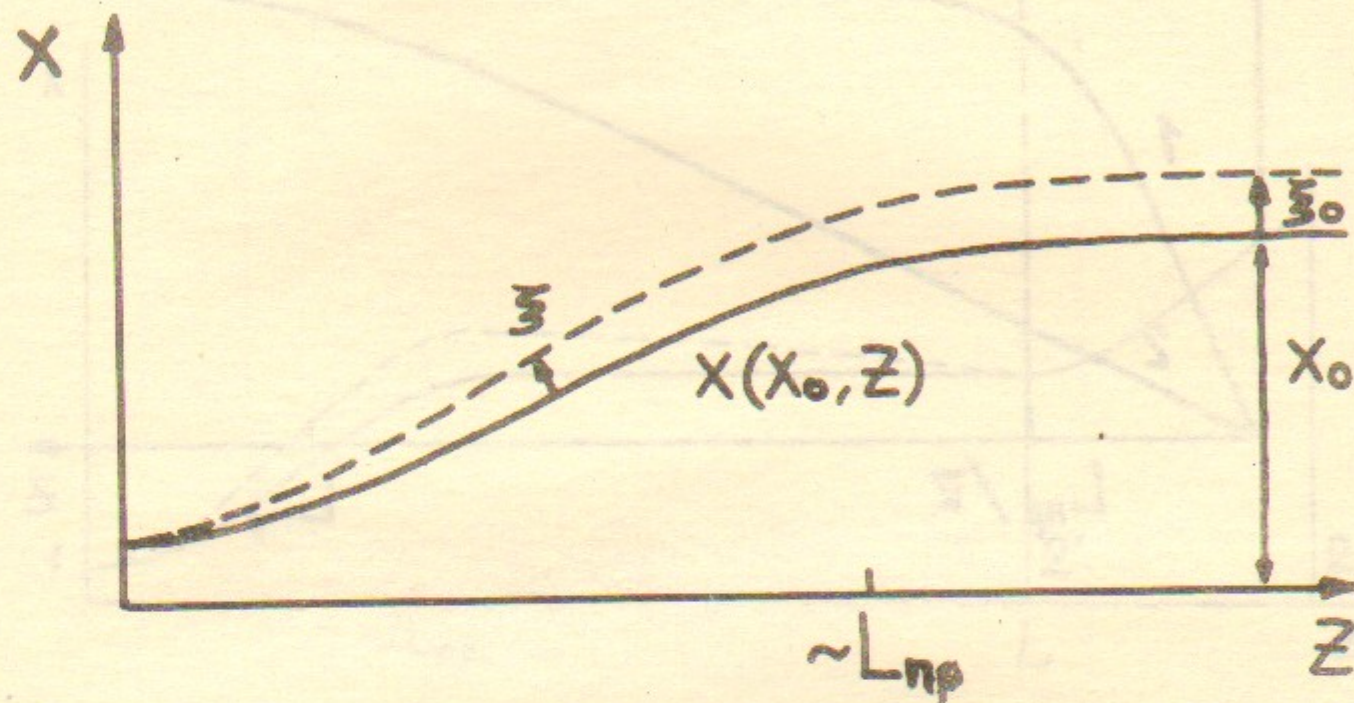


Рис.4. Исходное (сплошная линия) и конечное (пунктирная линия) положения силовой линии при возмущении магнитного поля.



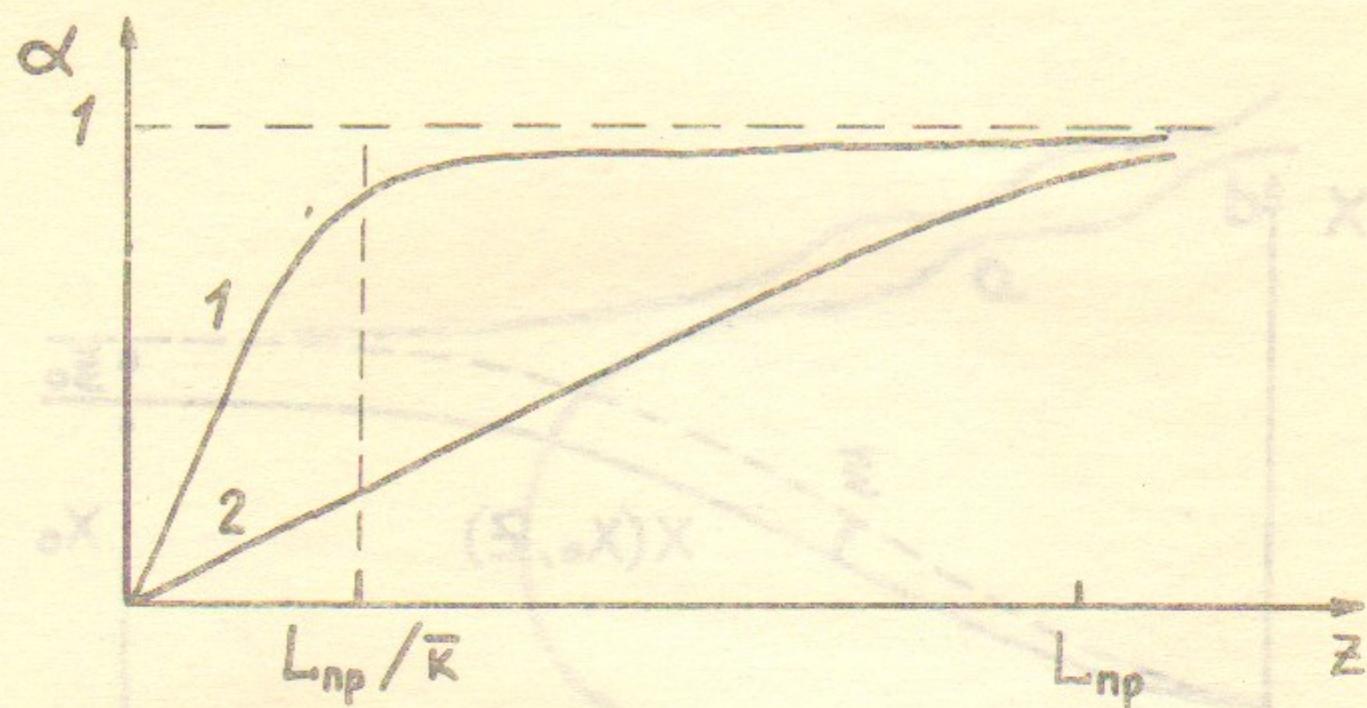


Рис.5. Вид функции  $\alpha(z)$  в плоском (кривая 1) и аксиально-симметричном (кривая 2) пробкотронах при

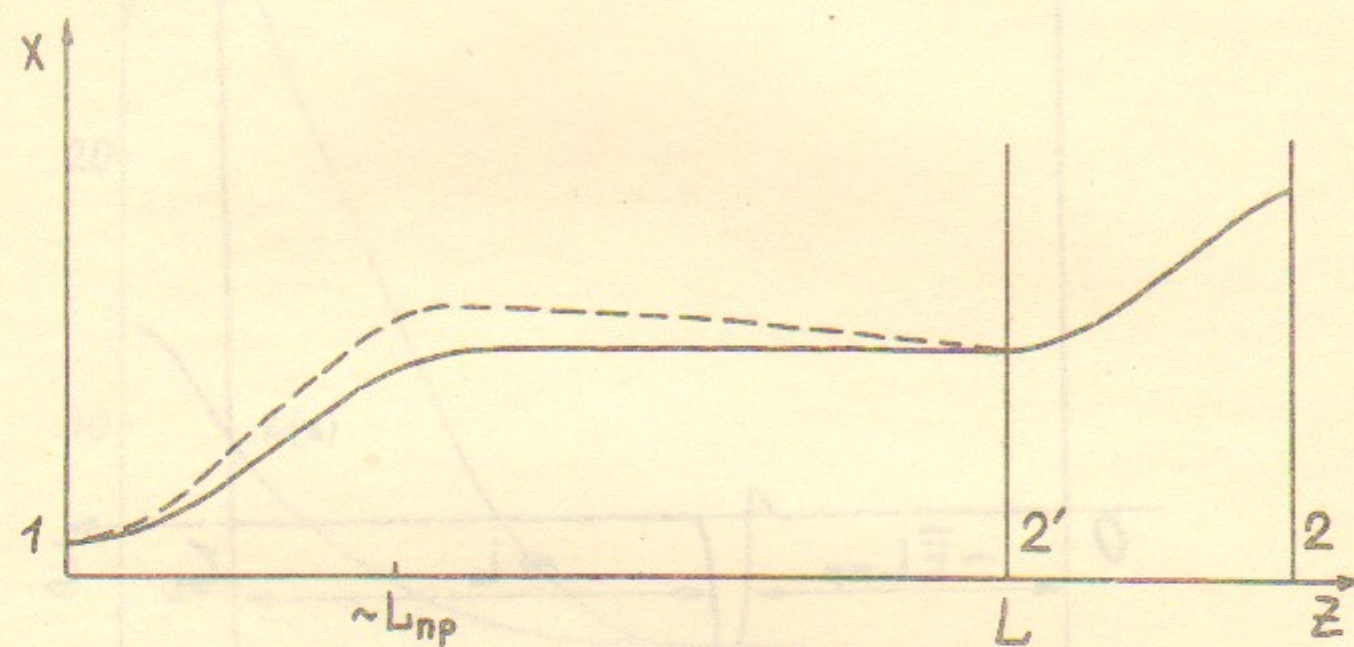


Рис.6. К задаче об определении  $B_{\text{крит}}$  в амбиполярной ловушке. Пунктиром изображено положение силовой линии после возмущения магнитного поля.



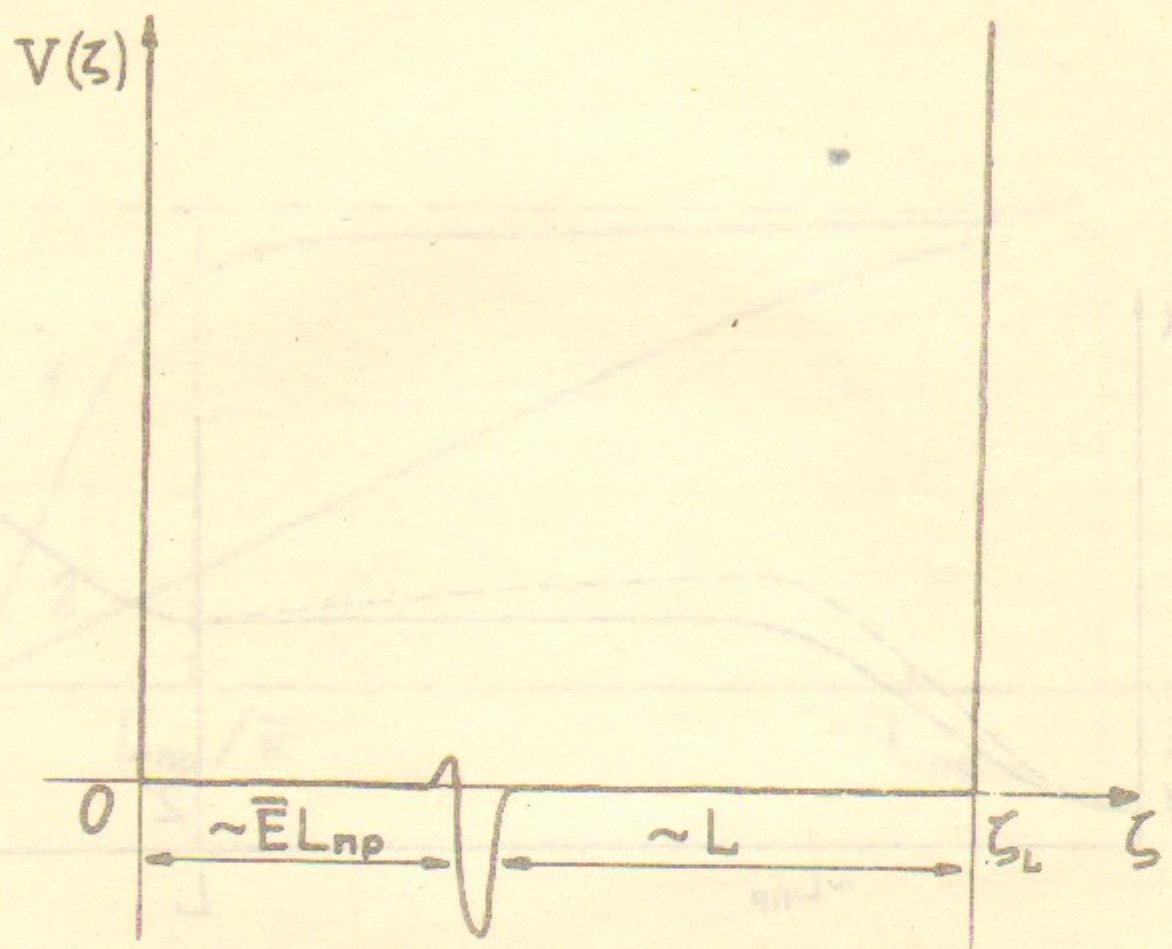


Рис.7. Форма потенциальной ямы в задаче об определении

в крит.

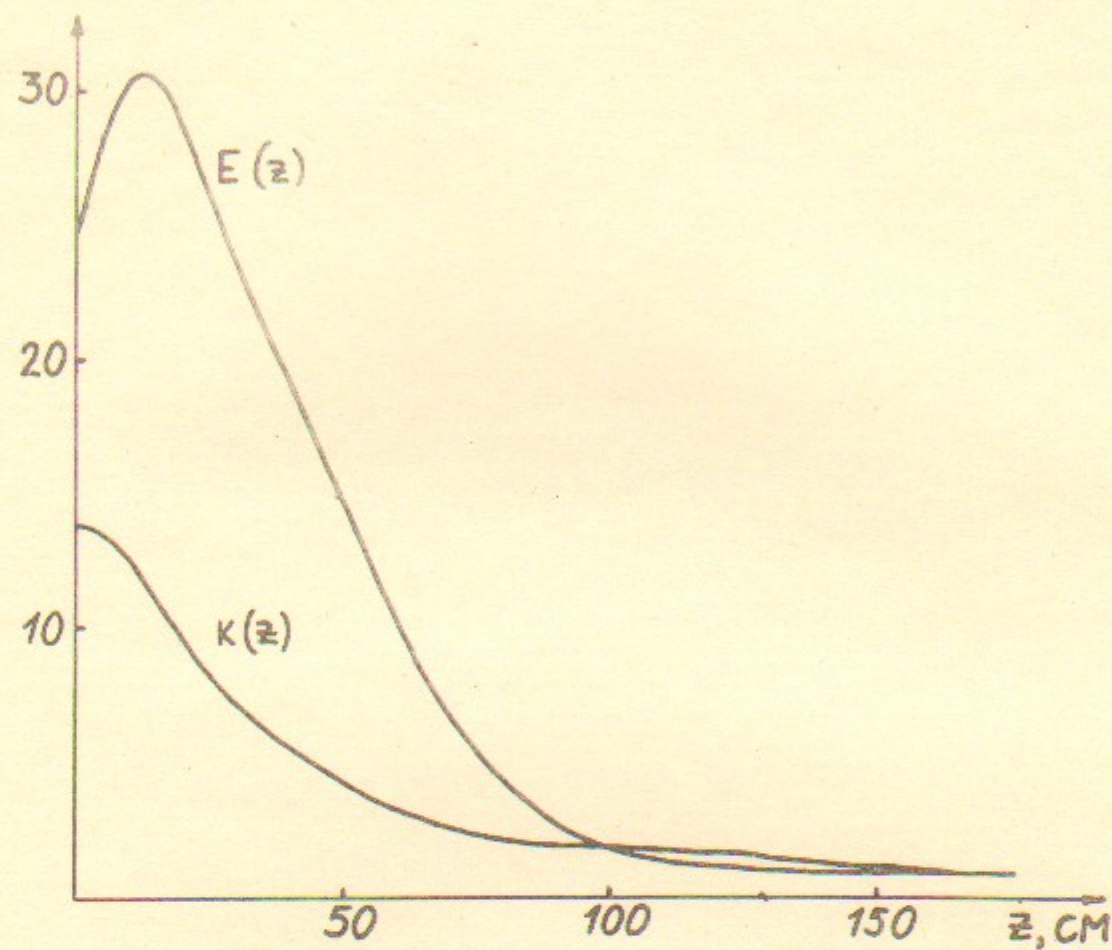


Рис.8. Эллиптичность  $E$  и пробочное отношение  $K$  для ловушки АМБАД.