

42
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Д.Л.Шепелянский

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ
СИСТЕМ

ПРЕПРИНТ 80-132



Новосибирск

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Д. Л. Шепелянский

А Н Н О Т А Ц И Я

Проводится исследование условий применимости квазиклассического приближения для квантовых систем стохастических в классическом пределе. Показано, что квазиклассика применима на временах $t_0 \sim N_{\text{хар}} \sim 1/\hbar$ значительно превышающих время расплывания квазиклассического пакета $\tau_0 \sim \ln N_{\text{хар}} \sim \ln(1/\hbar)$. Получена общая оценка для времен t_0 . Численные эксперименты, проведенные для простых квантовых систем, подтверждают предсказания теории.

§ 1. Введение

За последние годы было открыто и подробно изучено так называемое стохастическое движение, позволившее понять каким образом в системах классической механики, описываемых чисто динамическими уравнениями может возникнуть случайное движение (см., например, /1-6/. Было обнаружено, что стохастичность появляется при выполнении некоторых условий на величину взаимодействия и нелинейность системы и связана с локальной неустойчивостью движения, т.е. с экспоненциально быстрой расходимостью близких траекторий в фазовом пространстве. При выполнении критерия стохастичности движение системы является перемешивающимся, что означает расцепление временных корреляций динамических переменных.

В то время, как стохастичность в классических системах достаточно хорошо изучена, исследование квантовых динамических систем, являющихся стохастическими в классическом пределе ($\hbar = 0$), началось сравнительно недавно (см., например, /7-11/). Исследование таких систем представляет большой интерес как и для построения квантовой статистической механики без привлечения дополнительных гипотез, так и для объяснения различных явлений в квантовых системах. Так с возникновением новых возможностей экспериментального исследования поведения атомов и молекул в поле сильной электромагнитной волны /12-14/ 24-25/ появилось большое количество работ, в которых изучаются квантовые особенности поведения нелинейных систем под действием внешнего периодического по времени возмущения (см., например, /15-21/). Одним из методов рассмотрения таких задач является квазиклассическое приближение /7-9, 15, 19, 26/. В то же время известно, что в нелинейных системах поправки к квазиклассическим выражениям нарастают со временем /см., например, 19/ и через некоторое время t_0 квазиклассическое разложение становится неприменимым. Для интегрируемых систем эти времена как правило пропорциональны характерному

квантовому числу или некоторому другому квантовому параметру, входящему в задачу ($t_0 \sim n_{\text{хар}} \sim 1/\hbar$), что следует непосредственно из теоремы Эрекфеста и является результатом того, что пока пакет не расплылся, он движется по классическим траекториям. Для стохастических систем вопрос о временах, на которых справедлив метод ВКБ является более сложным в силу локальной неустойчивости классических траекторий, приводящей к экспоненциально быстрому расплыванию квазиклассического пакета. Таким образом квазиклассика полностью сохраняется на временах $t_0 \sim \ln n_{\text{хар}} \sim \ln(1/\hbar)$. Поведение стохастических квантовых систем (СКС), под такими системами подразумеваются квантовые системы стохастические в классическом пределе, на таких временах аналитически исследовалось в /8/ на примере нелинейного осциллятора с внешним периодическим возмущением. В /9/ проводилось исследование СКС в квазиклассическом приближении, но применимость метода на больших временах не обосновывалась.

Аналитический и численный анализ СКС проводился в /10,20/ на примере квантового ротатора под действием периодического возмущения. Основным результатом /10/ состоит в том, что движение рассматриваемой СКС похоже ^{при} определенных условиях на стохастическое движение классической системы. В частности, наблюдался диффузионный рост энергии ротатора со временем. Вместе с тем наблюдались и существенные отличия в скорости диффузии на больших временах. В /20/ для бесконечной серии значений параметров была найдена асимптотическая зависимость энергии от времени, отличающаяся от классической.

Целью настоящей работы является исследование условий применимости метода ВКБ для СКС. На примере простых моделей найдены времена, на которых отклонения от классических значений малы. Найдены условия того, что квантовые поправки остаются малыми по сравнению с классическими значениями на всех временах. На основе результатов В.П.Маслова /22-23/ получено общее условие применимости квазиклассического приближения для СКС.

§ 2. Модель

Рассмотрим модель ротатора во внешнем поле с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2J} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{K} \cos \theta \delta_{\tilde{T}}(t) \quad (2.1)$$

где \tilde{K} - параметр, характеризующий величину возмущения, $\delta_{\tilde{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tilde{T})$ - временной частоток дельта-функций (толчков), J - момент инерции ротатора, θ - угловая переменная. В дальнейшем считаем $J = 1$.

Соответствующая классическая задача описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{p^2}{2} + \tilde{K} \cos \theta \delta_{\tilde{T}}(t) \quad (2.2)$$

и ввиду периодичности возмущения, движение ротатора можно описывать отображением:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + \tilde{K} \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + \tilde{T} \bar{p} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\bar{p}, \bar{\theta}$ - значения переменных после толчка.

Отображение (2.3) подробно исследовалось в /6/, где было показано, что значение $\tilde{K}\tilde{T} \approx 1$ является границей устойчивости. При $\tilde{K}\tilde{T} < 1$ движение устойчиво, и изменение величины p ограничено ($|\Delta p| \leq \sqrt{\tilde{K}\tilde{T}}$). При $\tilde{K}\tilde{T} \gg 1$, так уже при $\tilde{K}\tilde{T} = 5$, движение становится стохастическим. В этом случае θ является случайной переменной, Δp меняется по диффузионному закону, а функция распределения по импульсу имеет гауссовский вид:

$$\langle (p(t) - p_0)^2 \rangle = 2 \frac{\tilde{K}^2}{2} t \quad (2.3A)$$

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi t} \tilde{K}} \exp\left(-\frac{p^2}{\tilde{K}^2 t}\right)$$

$\langle \rho \rangle = \rho_0$, $\mathcal{D} \approx 1$. Здесь и далее t - безразмерное время, измеряемое в числе толчков. Скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по большому числу траекторий, отвечающих различным начальным данным. Отметим также, что такое простое отображение (2.3) описывает приближенно целый ряд интересных механических систем, например, движение заряженной частицы в магнитной ловушке, и что более существенно - движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса довольно общего вида [6].

Перейдем к квантовомеханическому рассмотрению. Решая уравнение Шредингера с гамильтонианом (2.1) получим отображение для волновой функции через один шаг, включающее свободное вращение в течении времени \tilde{T} и толчок (действие толчка сводится к умножению волновой функции на $\exp(-i\tilde{K}/\hbar \cos X)$ [10])

$$\bar{\Psi}(X) = (2\pi i\tilde{T})^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(X_1) \exp(-iK \cos X_1 + i\frac{(X-X_1)^2}{2\tilde{T}}) dX_1 \quad (2.4)$$

где $K = \tilde{K}/\hbar$, $\tilde{T} = \hbar \tilde{T}$, далее $\hbar = 1$.

В силу периодичности $\Psi(X)$ с периодом 2π также периодична и нормирована на период $\int_0^{2\pi} |\bar{\Psi}(X)|^2 dX = 1$. Из (2.4) получаем выражение для Ψ в момент времени t :

$$\Psi(X, t) = (2\pi i\tilde{T})^{-t/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(X_0) \exp(iS(X, X_{t-1}, \dots, X_0)) dX_0 \dots dX_{t-1} \quad (2.5)$$

$$\text{где } S(X, X_{t-1}, \dots, X_0) = \frac{(X-X_{t-1})^2}{2\tilde{T}} - K \cos X_{t-1} + \dots + \frac{(X_1-X_0)^2}{2\tilde{T}} - K \cos X_0 + S_0(X_0), \quad \Psi(X, 0) = \Psi_0(X_0) \exp(i\phi_0(X_0)).$$

В дальнейшем нас будет интересовать квазиклассика в области стохастичности, что соответствует $K \gg 1$ (число квантов в толчке велико), $\tilde{T} \ll 1$, $K\tilde{T} \gg 1$. В этом случае t -мерный интеграл вычисляется методом стационарной фазы [27]:

$$\Psi(X, t) = \sum_{k=1}^N |J_k|^{-1/2} \exp[iS_k(X) + i\frac{\pi}{4}\mu_k - i\frac{\pi}{4}t] \quad (2.6)$$

$$= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_k^m [\Psi_0(X_0) \exp(i\tilde{S})] \Big|_{X=\bar{X}^k} \right\} + O(K^{-\infty})$$

где $\bar{X} = \bar{X}^k$ - стационарная точка в t -мерном пространстве, являющаяся решением системы уравнений

$$\frac{\partial S(X, X_{t-1}, \dots, X_0)}{\partial X_i} = 0; \quad i = 0, \dots, t-1$$

N - полное число стационарных точек; $H_{ij}^k(X) = \frac{\partial^2 S}{\partial X_i \partial X_j} \Big|_{X=\bar{X}^k}$

$$= \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ \left(1 + \tilde{T} \frac{\partial^2 S_0(X_0)}{\partial X_0^2} \right) \delta_{i,0} + (2 + K\tilde{T} \cos X_i) \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} \right\} \Big|_{X_i = X_i^k}, \quad J_k(X) = \det(T H_{ij}^k(X)),$$

$$\mu_k = \text{sgn } H^k, \quad L_k = \frac{i}{2} \sum_{i,j=0}^{t-1} (H^k)^{-1}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j},$$

$$\tilde{S} = S - S_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{t-1} H_{ij}^k (X_i - X_i^k)(X_j - X_j^k).$$

Из системы уравнений для $S(X, X_{t-1}, \dots, X_0)$ и (2.3) следует, что стационарной точкой \bar{X}^k являются координаты классической траектории системы (2.3) в моменты времени i ($0 \leq i \leq t-1$), удовлетворяющей условиям

$$X = X(X_0, t), \quad \rho(X_0, 0) = \frac{\partial S_0(X_0)}{\partial X_0} \quad (2.7)$$

Число решений (2.7) равно числу стационарных точек N соответствующих различным траекториям $X^k(X_0, t)$ из начального распределения $\rho(X_0, 0)$, приходящим в момент времени t в точку X с различными импульсами. Для стохастических систем в силу локальной неустойчивости траекторий число членов в сумме (2.6) N и якобиан $J_k(X) = \frac{\partial X^k(X_0, t)}{\partial X_0}$

(см. /1-3/) растут экспоненциально со временем $N \sim \exp(ht)$ (см. рис.1), $J_k \sim \exp(ht)$, где $h = \frac{K^2}{2m} - \frac{2\pi}{h} S_k$ - энтропия /28,29/. Для (2.3) $h \approx \ln(KT/2)$ при $KT > 4$ /6/.

Из (2.6) видно, что квазиклассическое разложение несправедливо вблизи вырожденных стационарных точек, в которых $J_k(x) = 0$. В этом случае волновая функция в точке X имеет каустику (фактически каустика находится на K -ой траектории, при этом $\partial P_k(x,t)/\partial x = \infty$). Но даже при наличии q вырожденных стационарных точек в (2.6) наряду с этим в X имеется $N - q$ квазиклассических членов. Со временем q , также как и N , растет экспоненциально, а так как размер каустики конечен ($\sim K^{-2/3}$) и они распределены по X более ли менее равномерно, то

$q \sim K^{-2/3} N \ll N$. Отметим также, что высота пика по амплитуде вблизи вырожденной точки экспоненциально уменьшается со временем ($\sim K^{1/6} \exp(-ht)$). Это ясно уже из того, что через один шаг вырожденная стационарная точка возникает из какого-то квазиклассического члена суммы (2.6) имеющего экспоненциально малую предэкспоненту. Таким образом, в произвольную точку X через время $t > \tau_0 \sim \ln(K^{2/3})/h$ будет приходить $q \sim K^{-2/3} \exp(ht)$ классических траекторий, имеющих каустики (см.рис.1), в нее же будет приходить гораздо большее число классических траекторий

$N - q \sim \exp(ht)$. Из (2.5), (2.6) видно, что основной вклад в t -мерный интеграл дают области

$\Delta V \sim K^{-1/2}$, откуда следует, что стационарные точки являются хорошо изолированными. На основе сказанного, в отличии от /11/, приходим к выводу о том, что влияние каустик на всех временах является малым и им можно пренебречь. Этот результат подтверждается проведенными численными экспериментами (см. § 3).

Считая квантовые поправки к основному квазиклассическому члену ($m = 0$) в (2.6) малыми, найдем зависимость энергии ротатора от времени $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx$.

Основной вклад в энергию дает дифференцирование действия S_k в экспоненте. Дифференцирование предэкспоненты и сдвига в фазе μ_k дает не нарастающие со временем поправочные члены порядка K^{-1} от основного вклада:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx \left\{ \sum_{K, K_1=1}^N P_K(x) P_{K_1}(x) / J_K J_{K_1} \right\}^{-1/2} \cdot \exp[i(S_K(x) - S_{K_1}(x) + \frac{\pi}{4}(\mu_K - \mu_{K_1}))] \cdot \psi_0(x_0^K(x,t)) \psi_0(x_0^{K_1}(x,t)) \quad (2.8)$$

где $P_K(x) = \frac{\partial S_K(x)}{\partial x}$ - классический импульс вдоль K -ой траектории, проходящий в точку X , $x_0^K(x,t)$ - начальная точка K -ой траектории как функция конечной. Оценим вклад от интерференционных членов с $K \neq K_1$. Их число $N_{\text{инт}} \sim N^2$, а величина каждого члена $A \sim J^{-1} \int_0^{2\pi} dx \exp(i(S_K(x) - S_{K_1}(x))) \sim \exp(-2ht) \cdot N^{-2}$. Входящий в A интеграл является типичной корреляционной функцией экспоненциально затухающей со временем из-за случайности классического действия. Таким образом в силу того, что классическая задача является стохастической мы имеем сумму $N_{\text{инт}}$ случайных величин с амплитудой $A \sim N^{-2}$, дающих величину $\sum_{\text{инт}} \sim \sqrt{N_{\text{инт}}} A \sim N^{-1}$. Кроме того при $K \neq K_1$ подинтегральное выражение в (2.8) не имеет стационарной точки. Действительно условие стационарности фазы дает $\partial S_K / \partial x = P_K(x) = \partial S_{K_1} / \partial x = P_{K_1}(x)$, но т.к. теперь импульсы в одной точке совпадают, то это означает, что либо $K = K_1$, либо X является каустикой, вкладом которых, как было показано, можно пренебречь. В силу отсутствия стационарных точек члены с $K \neq K_1$ имеют порядок $O(K^{-\infty})$. Следовательно интерференционными членами с $K \neq K_1$ в (2.8) можно пренебречь и остается только сумма по $K = K_1$, дающая классическое значение энергии /см.22,23/.

Таким образом для определения времен, на которых характеристики квантовой задачи совпадают с классическими с точностью до $O(K^{-1})$ в относительной величине, надо исследовать на каких временах остаются малыми члены с

$m \neq 0$ в (2.6) по сравнению с основным квазиклассическим членом ($m = 0$). Заметим, что при $KT \gg 1$ величина элементов матрицы $(H^K)^{-1}$ легко оценивается прямо из её явного вида: $(H^K)^{-1}_{i,i+m} \sim (KT)^{-m-1}$. Найдем вначале поправку $\delta_1 \sim K^{-1}$ к слагаемому с $m = 0$ в (2.6) с точностью до членов $(KT)^{-1}$, при этом будем учитывать действие L_K только на $\exp(i\tilde{S})$, т.к. это дает поправки наиболее быстрорастущие со временем. Сумму по m представим в виде:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} L_K^m [\psi_0(x_0) \exp(i\tilde{S})] \Big|_{x=x^K} = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(K)} \psi_0 \quad (2.9)$$

где $\delta_0 = 1$, $\delta_{j+1} \sim \delta_j / K$

Вычисления приводят к следующему выражению для δ_1 (в него дают вклад члены с $m = 2, 3$):

$$\delta_1^{(K)} = \frac{i}{8} \sum_{j=0}^{t-1} \frac{3 \cos^2 x_j^K + 5 \sin^2 x_j^K}{K \cos^3 x_j^K} + O(1/KT) \quad (2.10)$$

Отметим, что расходимость в знаменателе возникает при наличии каустики в точке x ($J_K(x) = 0$), но т.к. влияние каустик мало, то при суммировании по всем N траекториям вклад от этих расходимостей также будет мал. В силу случайности классической траектории сумма по j растет как $t^{1/2}$ и следовательно в среднем по времени

$$\delta_1 \sim i x t^{1/2} / K \quad (2.11)$$

где численный коэффициент $x \sim 1$. Заметим, что следующие члены по $(KT)^{-1}$ в выражении для δ_1 растут не быстрее $t^{1/2}$ и поэтому ими можно пренебречь. Анализ следующих членов разложения по K^{-1} показывает, что $\delta_j \sim (t/K^2)^{j/2}$. Таким образом,

на временах

$$t \leq t_0 \sim K^2 \quad (2.12)$$

квантовые поправки малы и характеристики квантовой системы совпадают с классическими с точностью до $O(K^{-1})$. Надо однако подчеркнуть, что величины экспоненциально уменьшающиеся в классике, например, разновременные корреляторы, за время $\tau_0 \sim \ln K$ становятся порядка $O(K^{-1})$ и для их дальнейшего вычисления требуется учет квантовых поправок.

На временах $t \sim t_0$ все поправки $\delta_j \sim 1$ и квазиклассическое приближение становится неприменимым! Таким образом, естественно ожидать, что со времен $t \geq t_0$ характеристики квантовой задачи, например энергия ротатора, будут существенно отклоняться от своих классических значений. Исходя из этого можно дать оценку для времен t^* , с которых начинается замедление диффузии по энергии, наблюдавшееся в /10/:

$$t^* \sim t_0 \sim K^2 \quad (2.13)$$

К сожалению прямую проверку функциональной зависимости t^* от K в численном эксперименте провести не удается, из-за резкого возрастания счета для больших K ($K \geq 100$). Полученные численные результаты обсуждаются в § 3.

Отметим, что в рассматриваемой системе (2.1) пара метрами квазиклассичности являются K, T и поэтому диффузия вверх по уровням не улучшает квазиклассического приближения. Вместе с тем во многих системах с увеличением номера уровня квазиклассичность улучшается. Можно поэтому ожидать, что при достаточно быстрой диффузии квантовые поправки в таких системах будут нарастать значительно медленнее чем в (2.1). В качестве модели рассмотрим систему с гамильтонианом (2.1), в котором K зависит от времени по закону $K(t) = K_0(1+t)^\alpha$. Как правило, K является растущей функцией действия $K = K(I)$, а следовательно и времени, т.к. при

наличии стохастики I растёт со временем, что и отражено в выбранной модели, удобной также для численного исследования. Тем не менее следует отметить, что в реальных системах с $K = K(I)$ ситуация может быть более сложной и поэтому предлагаемую модель следует рассматривать лишь как первое приближение.

При $K_0 T > 1$ переменная X уже после нескольких толчков становится случайной и

$$|\Delta p(t)|^2 = K_0^2 t^{2\alpha} \langle \sin^2 X(t) \rangle = \frac{K_0^2 t^{2\alpha}}{2} \quad (2.14)$$

Из (2.14) находим закон диффузионного роста энергии:

$$E(t) = \frac{K_0^2 t^{2\alpha+1}}{4(2\alpha+1)} + E(0) \quad (2.15)$$

Выражение для δ_1 такое же как и (2.10), но теперь уже с $K = K(j)$. В среднем δ_1^2 растёт как

$$\langle \delta_1^2 \rangle \sim \sum_{j=0}^{t-1} \frac{1}{K^2(j)} \approx \int_1^t \frac{dt}{K_0^2 t^{2\alpha}} \approx \frac{t^{1-2\alpha}}{K_0^2(1-2\alpha)} \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что при $\alpha > 1/2$ поправки всегда малы и зависимость энергии от времени описывается (2.15) на всех временах. Граничным значением является $\alpha = 1/2$. В этом случае

$$\langle \delta_1^2 \rangle \sim \frac{\ln t}{K_0^2} \quad (2.17)$$

и (2.15) справедливо на экспоненциально больших временах $t_0 \sim \exp(K_0^2)$. При $0 \leq \alpha < 1/2$ квазиклассическое приближение справедливо для

$$t \leq t_0 \sim [K_0^2(1-2\alpha)]^{\frac{1}{1-2\alpha}} \quad (2.18)$$

и в течении этого времени происходит рост энергии по

классическому закону (2.15).

§ 3. Численные эксперименты.

Для проверки полученных результатов проводилось численное исследование модели (2.1). При решении уравнения Шредингера использовалось то, что действие толчка сводится к умножению волновой функции на $\exp(-iV(x))$. Затем при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ) находились ее фурье-компоненты A_n , для которых свободное вращение давало сдвиг в фазе $-i\frac{Tn^2}{2}$. По полученным значениям A_n путем БПФ находилась волновая функция и т.д. При этом число уровней достигало $N_L = 4097$ (-2048, 2048), но ввиду симметрии начальных условий ($\Psi(x) = \Psi(-x)$) и гамильтониана (2.1) счет фактически велся с 2049 уровнями. Контроль за точностью счета заключался в проверке совпадения результатов (до 1%) при изменении N_L в два раза и малой населенности

$|A_n|^2$ верхних уровней. Кроме того был проведен проверочный счет на совпадение (до 10^{-7}) результатов с /10/ при одинаковых условиях. Основное ограничение на длительность счёта накладывает конечность выбранного числа уровней. При достаточно большом возмущении, особенно при $K = K(t)$, происходит быстрое возбуждение высоких уровней системы и ошибки счёта становятся значительными. Время счета на БЭСМ-6 в типичных экспериментах ($N_L = 1025, t = 300$) составляло 10 мин.

Начальные условия варьировались от возбуждения одного уровня (основное состояние) до возбуждения около 200 уровней (гауссовый пакет). Существенной зависимости от начальных условий не наблюдалось. При обработке результатов счёта вычислялась энергия ротатора

$E = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |A_n|^2$ и одновременно строились графики зависимости энергии от времени и функции распределения $f(n)$ в нормированных координатах:

$$X = \frac{n^2(2\alpha+1)}{K_0^2 t^{2\alpha+1}}$$

$$f_N(n) = f(n) \sqrt{\frac{\pi K_0^2}{(2\alpha+1)}} t^{2\alpha+1} \quad (3.1)$$

При классической диффузии (3.1) сводится к

$$f_N(n) = e^{-x} \quad (3.2)$$

На рисунках это распределение изображено прямой "а".

Результаты численных экспериментов для $f_N(n)$ интерполировались по формуле (см./10/):

$$f_N(n) = A \exp(-Bx) \quad (3.3)$$

где A и B - параметры, определяемые по методу наименьших квадратов. Доля диффундирующей компоненты определялась как

$$w_d = A \int_0^{\infty} e^{-Bx} \frac{dx}{\sqrt{\pi x}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \quad (3.4)$$

Результаты подгонки экспериментального распределения по (3.3) представлены на рисунках прямыми "б" (в конце счета)

Чтобы проверить существенно ли влияние каустик и островков устойчивости /6/ при квантовом рассмотрении, была исследована система, которая не имеет каустик и в которой мера устойчивой компоненты (островков) строго равна нулю /1/. Это модель того же ротатора, но с другим внешним возмущением по X :

$$V(x) = \begin{cases} -x^2/2 + \pi^2/8, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \frac{(x-\pi)^2}{2} - \pi^2/8, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (3.5)$$

$$V(x) = V(x+2\pi), \quad V(x) = V(-x)$$

Классическую динамику системы можно описывать отображением, аналогичным (2.3):

$$\bar{p} = p - k \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \bar{x} = x + T\bar{p} \quad (3.6)$$

При $kT > 4$ движение становится полностью стохастическим и энергия растет по диффузионному закону:

$$E(t) = \frac{\pi^3 K^2}{12} t + E(0) \quad (3.7)$$

Исследование квантовой задачи (3.5) показало, что качественное поведение системы остается таким же как и в системе (2.1) (см.рис.2) - начиная с некоторого времени t^* скорость диффузии по энергии резко падает. Эта качественная неизменность движения указывает на то, что замедление диффузии не связано с наличием каустик и островков устойчивости. Отметим, что в отличие от (2.1) фурье-спектр толчка $\exp(-ikV(x))$ спадает всего лишь степенным образом ($\sim 1/n^3$) (здесь оказалось незаменимым БПФ) и уже один толчок связывает практически все уровни, в то время как в (2.1) один толчок захватывает с экспоненциальной точностью $\sim 2k$ уровней.

Для системы (2.1) было проведено сравнение более тонких характеристик классической и квантовой задач, а именно - зависимости коэффициента диффузии D на временах меньших t^* от параметра kT . Результаты экспериментов (см.рис.3А) указывают на хорошее согласие зависимостей $D(kT)$ для классического (эти результаты взяты из /6/) и квантового случаев. Для квантовой задачи наблюдаются такие же осцилляции D и с тем же периодом, что и в классике. Некоторая разница в значениях D объясняется тем, что начальные условия в /6/ и в этой работе вообще говоря различны. В случае одинаковых начальных условий (в классике - линия $p(x) = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$, в квантовой задаче - основное состояние с $n = 0$, $k \approx 40$) экспериментальные данные для $D(kT)$ приведенные на рис.3В. Имеющееся небольшое различие находится на уровне квантовых поправок.

По полученным экспериментальным данным определялось время t^* , в течении которого энергия растет по закону, близкому к классическому, при этом за t_a^* и t_b^* принималось время t начиная с которого энергия

квантового ротатора отличалась на 25% и 50% от значения энергии в классическом случае (см. табл. 1,2). Для проверки функциональной зависимости (2.12), (2.18) вычислялась величина $\delta_{a,b} = [(t_{a,b}^*)^{1-2\alpha} / (K_0^2(1-2\alpha))]^{1/2} \approx const$. Проверялась также зависимость $\Delta_{a,b} = (t_{a,b}^*)^{1-\alpha} / K_0(1-\alpha) \approx const$ соответствующая линейному росту квантовых поправок со временем ($\delta_1 \sim \int_0^t dt / K(t)$). Отдельные случаи движения квантового ротатора при $K = K(t)$ представлены на рис. 4-6. Результаты экспериментов показывают, что в согласии с предсказаниями § 2 с увеличением K и ростом α время t^* резко возрастает. При $\alpha \geq 0,35$ машинные возможности уже не позволяют наблюдать падение скорости диффузии, что затрудняет экспериментальную проверку соотношения (2.18). Важно также подчеркнуть, что при $\alpha \geq 0,35$ не только закон диффузии совпадает с классическим, но и функция распределения по уровням близка к классическому гауссову распределению.

§ 4. Общий критерий

Воспользуемся полученным В.П. Масловым [22,23] квазиклассическим выражением для волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_0(x) + \epsilon V(x, z) \quad (4.1)$$

и начальным условием $\psi|_{z=0} = \psi_0(x) \exp(iS(x)/\hbar)$ (подчеркнем, что ψ_0 не зависит от \hbar , а S - действительно):

$$\psi(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} |J_k|^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_k(x, z) - i\frac{\pi}{2} \mu_k\right]. \quad (4.2)$$

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} [\hat{L}_k^m \psi_0(x_0)] \Big|_{x_0 = x_0^k(x, z)} \right\} + o(\hbar^\infty)$$

Здесь, как и в (2.6), суммирование проводится по всем классическим траекториям, проходящим в точку X в момент времени τ и удовлетворяющим начальным условиям

$$X_0(x, \tau) = X_0^k, \quad p_0(x_0^k) = \left. \frac{\partial S(x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0 = x_0^k} \quad (4.3)$$

$$J_k = \det \frac{\partial X(x_0, \tau)}{\partial x_0} \Big|_{x_0 = x_0^k}$$

(задача может быть n -мерной), $S_k(x, z)$ - действие вдоль классической траектории, соединяющей точки x_0^k, x и μ_k - индекс Морса этой траектории; оператор \hat{L}_k действует на произвольную функцию следующим образом

$$\hat{L}_k \psi(x_0, z) = \frac{i\hbar}{2m} \int_0^z |J_k(x_0, \tau)|^{1/2} \Delta_x (\psi(x_0, \tau) |J_k(x_0, \tau)|^{-1/2}) d\tau \quad (4.4)$$

где $\Delta_x = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_{0i}} \right)^2$ - оператор Лапласа в криволинейных координатах.

Формально разложение (4.2) применимо в точках X не являющимися каустиками [22,23], но как было показано в § 2, хотя в СКС через очень короткое время ($\tau_0 \sim \ln N_{\text{caust}} \sim \ln(1/\hbar)$) в X всегда приходят классические траектории, содержащие каустики, их относительное число мало и вкладом каустик можно пренебречь.

Сумма по m в (4.2) является разложением по степеням \hbar . При этом член с $m=0$ дает классическое значение для средних [22,23], а следующие члены с $m \neq 0$ - квантовые поправки к ним. Поэтому, если на всех временах

$$\delta_m^{(k)} = [\hat{L}_k^m \psi_0(x_0)] \Big|_{x_0 = x_0^k(x, z)} \ll \psi_0 \quad (4.5)$$

то и поправки к средним будут всегда малыми. Таким образом вопрос о том, на каких временах применима квазиклассика сводится к исследованию зависимости δ_m от времени.

Из (4.4) и (4.5) получаем выражение для δ_1 в одномерном случае:

$$\delta_1^{(k)} = \frac{i\hbar}{2m} \int_0^{\tau} \left\{ \left[J_k^{-2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_0^2} - 2 J_k^{-3} \frac{\partial J_k}{\partial x_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \right] + \left[\frac{5}{4} J_k^{-4} \left(\frac{\partial J_k}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{1}{2} J_k^{-3} \frac{\partial^2 J_k}{\partial x_0^2} \right] \varphi_0 \right\} dz_1 \quad (4.6)$$

Т.к. $J_k \sim \exp(hz)$ и $\frac{\partial J_k}{\partial x_0} \sim \exp(2hz)$, то первое слагаемое дает поправку, не нарастающую со временем и ее вкладом можно пренебречь. Таким образом, условие (4.5) сводится к

$$|\tilde{\delta}_1^{(k)}| = \left| \frac{i\hbar}{2m} \int_0^{\tau} \left[\frac{5}{4} J_k^{-4} \left(\frac{\partial J_k}{\partial x_0} \right)^2 - \frac{1}{2} J_k^{-3} \frac{\partial^2 J_k}{\partial x_0^2} \right] dz_1 \right| \ll 1 \quad (4.7)$$

Непосредственной проверкой (см. Приложение А) можно убедиться, что для системы (2.1) поправка (4.7) совпадает с (2.10), при этом надо учесть, что интеграл по времени в (4.2-7) следует понимать в смысле разности первообразных в моменты времени τ и 0 и т.к. в промежуточные моменты времени J_k может обращаться в ноль, то ни от первого, ни от второго члена в (4.7) интеграл не является знакоопределенным (сравни с (2.10)). Оценка более высоких поправок показывает, что $\delta_j \sim \delta_1^j$ и условие их малости эквивалентно (4.7).

В силу стохастичности классической системы имеют место следующие оценки:

$$J_k \sim e^{hz}, \quad \frac{\partial J_k}{\partial x_0} \sim e^{2hz}/L, \quad \frac{\partial^2 J_k}{\partial x_0^2} \sim e^{3hz}/L^2 \quad (4.8)$$

где L — некоторый характерный размер. Из (4.7), (4.8) следует, что экспоненциальная зависимость от времени в (4.7) сокращается и таким образом квантовые поправки в СКС растут со временем не быстрее, чем по степенному закону. Для нахождения зависимости δ_1 от времени удобно перейти в классическом гамильтониане к переменным действие — угол невозмущенной задачи. В случае, когда

возмущение является малым и выполнено условие "умеренной" нелинейности /2/ достаточно ограничиться разложением гамильтониана вблизи начального I_0 вплоть до членов $(\Delta I)^2$. При $I_0/\hbar \gg 1$ стандартное квантование (см., например, 15,19) приводит к гамильтониану:

$$\hat{H} = \omega \hat{I} + \gamma \hat{I}^2 + \varepsilon \left[V_0(I_0, \theta, \tau) + \frac{1}{2} (\hat{I} V_1(I_0, \theta, \tau) + V_1(I_0, \theta, \tau) \hat{I}) + \frac{1}{2} \hat{I} V_2(I_0, \theta, \tau) \hat{I} \right] \quad (4.9)$$

где $\omega = \frac{dE(I)}{dI}|_{I=I_0}$, $2\gamma = \frac{d^2E(I)}{dI^2}|_{I=I_0}$, $V_1 = \frac{dV}{dI}$, $V_2 = \frac{d^2V}{dI^2}$, $\hat{I} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}$

Следуя В.П. Маслову /22,23/ ищем решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (4.9) в виде $\Psi = \varphi J^{-1/2} \exp(iS/\hbar)$, где J, S — якобиан и действие классической задачи. После подстановки Ψ в уравнение и учета того J и S являются решениями уравнений Лиувилля и Гамильтона-Якоби соответственно, получим уравнение для $\varphi(\theta_0, \tau)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \hat{G}(\theta_0, \tau) \varphi$$

$$\hat{G}(\theta_0, \tau) = i\hbar \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} V_2(\theta_0, \tau) \right) J^{1/2} \left(J^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \theta_0} \right)^2 J^{-1/2} + \frac{i\varepsilon\hbar}{2} J^{-3/2} \left(\frac{\partial V_2(\theta_0, \tau)}{\partial \theta_0} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_0} J^{-1/2} \quad (4.10)$$

с начальным условием $\varphi(\theta_0, 0) = \varphi_0(\theta_0)$. Введя оператор $\hat{F} = \int_0^{\tau} \hat{G}(\theta_0, \tau_1) d\tau_1$ аналогичный (4.4) можно представить $\varphi(\theta_0, \tau)$ в виде ряда по \hat{F} или, что тоже самое, по \hbar :

$$\varphi(\theta_0, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{F}^m \varphi_0(\theta_0) \quad (4.11)$$

Таким образом, $\varphi(\theta, \tau)$ имеет вид (4.2) с заменой x на θ , \hat{L} на \hat{F} . Выражение для δ_1 аналогично (4.7):

$$|\tilde{\delta}_1^{(k)}| = \left| i\hbar \int_0^{\tau} \left\{ \left(\gamma + \frac{\varepsilon}{2} V_2(\theta_0, \tau_1) \right) \left[\frac{5}{4} J_k^{-4} \left(\frac{\partial J_k}{\partial \theta_0} \right)^2 - \frac{1}{2} J_k^{-3} \frac{\partial^2 J_k}{\partial \theta_0^2} \right] - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^{\tau_1} J_k^{-3} \frac{\partial V_2(\theta_0, \tau_2)}{\partial \theta_0} \frac{\partial J_k}{\partial \theta_0} d\tau_2 \right\} d\tau_1 \right| \ll 1 \quad (4.12)$$

Учет следующих членов разложения гамильтониана по ΔI приведет лишь к малому (на величину $\sim \epsilon$) изменению γ и V_2 в (4.12), которым можно пренебречь. Таким образом, квантовая поправка для системы, описываемой в классике гамильтонианом $H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, \tau)$ дается (4.12), где $\gamma = \frac{1}{2} \frac{d^2 H_0}{dI^2} |_{I=I_k}$, $V_2 = d^2 V / dI^2 |_{I=I_k}$, $J_k = \partial \theta^{(k)}(\theta_0, \tau) / \partial \theta_0$.

В качестве примера рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta) g(\tau) \quad (4.13)$$

где $g(\tau)$ имеет вид толчков, действующих в течении времени T_0 и следующих друг за другом с интервалом T ($T \gg T_0$). Как будет видно ниже при малых ϵ вкладом V_2 в (4.12) можно пренебречь, поэтому далее учитывается только член с γ . Обозначим изменение действия за время толчка через ΔI (при $\omega T_0, \gamma T_0 \ll 1, \Delta I \sim \epsilon V T_0$) и будем считать, что выполнен критерий стохастичности $\chi = \gamma T \Delta I \gg 1$. Для вычисления δ_1 разобьем интеграл в (4.12) на сумму интегралов по T_0 и T :

$$|\tilde{\delta}_1^{(k)}| = \hbar \left| \sum_{m=0}^t (\tilde{z}_m^{(k)} + \eta_m^{(k)}) \right|,$$

$$\tilde{z}_m^{(k)} = \int_{mT}^{mT+T_0} \gamma^{(k)} q_k(\tau, \theta_0) d\tau \sim \gamma_m^{(k)} T_0 \quad (4.14)$$

$$\eta_m^{(k)} = \int_{mT+T_0}^{mT+T} \gamma^{(k)} q_k(\tau, \theta_0) d\tau$$

$$q_k(\tau, \theta_0) = \left[\frac{5}{4} J_k^{-4} \left(\frac{\partial J_k}{\partial \theta_0} \right)^2 - \frac{1}{2} J_k^{-3} \frac{\partial^2 J_k}{\partial \theta_0^2} \right].$$

Т.к. $J(mT+T_0+\tau) \sim J(mT+T_0)(1+2\gamma\Delta I\tau)$,

$$J'(mT+T_0+\tau) \sim J^2(mT+T_0)(1+2\gamma\Delta I\tau)$$

и т.д. (подобные соотношения имеют место для системы (2.1) с $\Delta I \sim \kappa$), то $\eta_m^{(k)} \sim \hbar / \Delta I_k(mT)$. Поскольку члены суммы по m в (4.14) статически независимы из-за стохастичности классической системы, то в среднем δ_1 растет по закону

$$\langle |\tilde{\delta}_1^{(k)}|^2 \rangle \sim \hbar^2 \sum_{m=0}^t \left(\frac{1}{\Delta I_k(mT)} + \gamma_m^{(k)} T_0 \right)^2 \ll 1 \quad (4.15)$$

где $\overline{\Delta I_k(mT)} = \langle (\Delta I_k(mT))^2 \rangle^{1/2}$ - изменение действия за толчок, усредненное по случайной фазе θ . Также как и в системе (2.1) условие квазиклассичности выполнено, когда число уровней, захватываемым одним толчком, велико.

В случае, когда классическая система является потоком /2/, например, система с частотной модуляцией, её динамику нельзя свести к действию толчков и тогда $J' \sim J^2, J'' \sim J^3$ и т.д.. Тогда интеграл в (4.12) можно разбить на сумму интегралов по интервалам времени $\Delta \tau \sim \tau_0 = 1/\hbar$ (τ_0 - обратная КС - энтропия), которые уже будут статически независимыми и таким образом получим:

$$|\tilde{\delta}_1^{(k)}|^2 \sim \hbar^2 \int (\gamma^{(k)} / \hbar)^2 \hbar d\tau \ll 1 \quad (4.16)$$

При $\gamma = \text{const}$ (4.16) дает $|\tilde{\delta}_1| \sim \frac{\hbar \gamma}{\hbar} (\hbar \tau)^{1/2}$.

§ 5. Заключение.

Основной целью настоящей работы было определить на каких временах применимо квазиклассическое приближение для СКС. В результате проведенных исследований показано, что несмотря на экспоненциально быстрое расплывание квазиклассического пакета квазиклассика применима на временах $t_0 \sim n_{\text{хар}} \sim 1/\hbar$. Более того - в результате классической диффузии вверх по уровням рост квантовых поправок со временем может замедляться. На основе результатов В.П.Маслова /22,23/ получен общий

критерий (4.12) для определения времен, на которых при - менима квазиклассика для СКС.

Проведенное исследование системы (2.1), аналитичес- ки и численно изучавшейся в /10,20/, показано, что в дан- ной системе квантовые поправки нарастают за время

$t_0 \sim K^2$ и таким образом, была получена оценка (2.12) для времени t^* , с которого скорость диффузии резко замедляется /10/. К сожалению, имеющихся эксперименталь- ных данных для проверки предсказываемого соотношения оказывается недостаточно. Вместе с тем численные иссле- дования показали, что на временах $t < t^*$ квази - классика хорошо описывает даже ^{ТАКЖЕ} тонкие характеристики, как зависимость коэффициента диффузии от параметра сто - хастичности (см.рис.3).

Численные эксперименты для модели ротатора с воз - мущением (3.5) подтверждают сделанный в § 2 вывод о несущественности каустик и островков устойчивости. В слу- чае системы (2.1) с $K = K(t)$ результаты числен- ного счета подтверждают вывод о резком увеличении t^* с ростом α , при этом уже при $\alpha \geq 0.35 t^*$ не наблюдаемо на протяжении времени счета. К сожалению количественную проверку зависимости (2.18) провести не удастся ввиду резкого возрастания t^* при $\alpha \rightarrow 0.5$. В целом можно сделать вывод, что проведенные численные эксперименты подтверждают предсказания развитой теории.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю бла - годарность Б.В.Чирикову за внимание к работе и ценные замечания, Г.М.Заславскому, Ф.М.Израйлеву, Дж.Казати, А.И.Мильштейну, Дж.Форду - за стимулирующие дискуссии, В.В.Соколову и С.А.Хейфецу - за критическое обсуждение, а также В.В.Вечеславу за консультации по методу БПФ и Л.Ф.Хайло за помощь в проведении вычислений.

Приложение А.

Вычислим поправку $\tilde{\delta}_1$ для системы (2.1), исполь- зуя (4.7). Согласно (2.1), (2.3) получаем выражение для p, θ между t и $t+1$ толчком ($k=1, m=1$):

$$\begin{aligned} p(z) &= p_t + K \sin \theta_t \\ \theta(z) &= \theta_t + p_t z + K z \sin \theta_t \quad (A.1) \end{aligned}$$

Из (2.3) следует соотношение:

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_0} = (KT)^{t-1} \cos \theta_{t-1} \cos \theta_{t-2} \dots \cos \theta_0 + O(1/KT) \quad (A.2)$$

Согласно (A.2) имеем:

$$\frac{\partial \theta(z)}{\partial \theta_0} = \frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_0} (1 + Kz \cos \theta_t) + O(1/KT) \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial^2 \theta(z)}{\partial \theta_0^2} = - \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_0} \right)^2 Kz \sin \theta_t + O(1/KT)$$

$$\frac{\partial^3 \theta(z)}{\partial \theta_0^3} = - \left(\frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_0} \right)^3 Kz \cos \theta_t + O(1/KT)$$

Разбивая интеграл в (4.7) на сумму интегралов от t до $t+1$ получим

$$\tilde{\delta}_1^{(k)} = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^t \int_0^\pi \left[\frac{5}{4} (Kz)^2 \sin^2 X_j^{(k)} + \frac{1}{2} \frac{Kz \cos X_j^{(k)}}{(1 + Kz \cos X_j^{(k)})^3} \right] dz + O(1/KT) \quad (A.4)$$

После элементарного интегрирования получаем выражение (2.10).

Л и т е р а т у р а :

1. V.I. Arnold, A. Avez. *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (Benjamin, New York, 1968); J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems* (Princeton University Press, 1973); 3. Нитецки, Введение в дифференциальную динамику, "Мир", И., 1975.
2. Б.В. Чириков. Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Препринт ИЯФ СО АН СССР №267, Новосибирск, 1969; *Trans. 71-40 CERN, Geneva, 1971.*
3. Г.М. Заславский. Статическая необратимость в нелинейных системах, "Наука", М., 1970.
4. Г.М. Заславский, Б.В. Чириков. УФН, 105, 3, 1971.
5. J. Ford. *The Statistical Mechanics of Classical Analytic Dynamics, 215-255, in "Fundamental Problems in Stat. Mech., 3"*, Ed. E. G. D. Cohen, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1975.
6. B.V. Chirikov. *Phys. Reports, 52, 265, 1979*
7. Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко. ЖЭТФ, 65, 643, 1973. Г.М. Заславский. ЖЭТФ, 73, 2089, 1977.
8. G.P. Berzhan, G.M. Zaslavsky. *Physica, 91A*, 450, 1978; ДАН СССР, 240, 1082, 1978.
9. Г.П. Берман, Г.М. Заславский. Условие стохастичности в квантовых нелинейных системах. II кинетическое описание квантовых K -систем. Препринт ИФСО-78ф, Красноярск, 1978.

10. G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford and F.M. Izraelev. *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Vol. 93 of Lecture Notes in Physics, ed. G. Casati and J. Ford, Springer New York, 1979;* препринт ИЯФ СО АН СССР 78-46, 1978.
11. M.V. Bezzy, N.L. Balas et. al.. *Ann. Phys., 122, 26, 1979.*
12. V.S. Letokhov, E.A. Ryabov, O.A. Tumanov. *Optics. Comm., 5, 168, 1972.*
13. N.R. Isenor, V. Merchant et. al.. *Canad. J. Phys., 51, 1281, 1973.*
14. Р.В. Амбарцумян, В.С. Должников, В.С. Летохов и др. ЖЭТФ, 69, 72, 1975.
15. Э.В. Шуряк. ЖЭТФ, 71, 2039, 1976.
16. G.P. Berzhan, G.M. Zaslavsky. *Phys. Lett., 61A, 295, 1977.*
17. М.В. Кузьмин, В.Н. Сазонов. ЖЭТФ, 73, 422, 1977.
18. В.Н. Сазонов, В.Ю. Финкельштейн. ДАН СССР, 231, 78, 1977.
19. В.В. Соколов. Нелинейный резонанс квантового осциллятора, Препринт ИЯФ СО АН, 78-50, 1978.
20. Ф.М. Израйлев, Д.Л. Шепелянский. Квантовый резонанс для ротатора в нелинейном периодическом поле. Препринт ИЯФ СО АН 78-97, 1978; ДАН СССР, 249, 1103, 1979.
21. Н.Б. Делоне, Б.А. Зон, В.П. Крайнов. ЖЭТФ, 75, 445, 1978.
22. В.П. Маслов. Журн. Вычисл. матем. и матем. физики. 1, 638, 1961.

23. В.П.Маслов, Н.В.Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. "Наука", М., 1976.
24. J.E. Bayfield, P.M. Koch. *Phys. Rev. Lett.*, 33, 258, 1974.
25. J.E. Bayfield, L.D. Gardner, P.M. Koch. *Phys. Rev. Lett.*, 39, 76, 1977.
26. Б.И.Меерсон, Е.А.Окс, П.В.Сасоров. Письма ЖЭТФ, 29, 79, 1979.
27. М.В.Федорюк, Метод перевала, "Наука", М., 1977, стр.120.
28. А.Н.Колмогоров, ДАН СССР, 119, 861, 1958; 124, 754, 1959.
29. Я.Г.Синай, Изв. АН СССР, матем., 30, 15, 1966.

Подписи к рисункам:

- Рис.1. Образ линии $\rho(\theta, t=0) = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ после действия преобразования (2.3)
 А) $t = 3$, В) $t = 4$, $\bar{K} = 5$, $\bar{T} = 1$.
 Фазовая плоскость сведена в квадрат размером 2π .
- Рис.2А. Зависимость энергии ротатора E от времени для возмущения типа "пила" (3.5). $K = 5$, $T = 1$, $t = 200$. Прямая "а" соответствует классической диффузии (3.7), прямая "в" - линейная интерполяция в момент времени t (конец счета), ломаная линия - экспериментальный результат.
- Рис.2В. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (3.5) в нормированных координатах $f_N(n)$ и X (см.(3.1) с $K^2 \rightarrow \pi^3 K^2 / 3$) для значений рис.2А. Прямая "а" соответствует теоретической формуле (3.2), "в" - подгонка по формуле (3.3), ломаная линия - экспериментальный результат.
- Рис.3А. Зависимость отношения экспериментального коэффициента диффузии D_E к теоретическому $D_T = 1$ от дробной части $\{KT/2\pi\}$: \bullet - для классической системы (2.3); $+$ - для квантовой системы (2.1) с $K \approx 40$; Цифры у некоторых точек - значения KT ; Начальные условия различны.
- Рис. 3В. То же, что и на рис.3А, но для одинаковых начальных условий в классической и квантовой задачах.
- Рис.4А. Зависимость энергии ротатора E от времени для системы (2.1) с $K = K_0(1+t)^\alpha$, $K_0 = 5$, $T = 1$, $\alpha = .2$, $t = 600$. Плавная линия соответствует классической диффузии (2.15). Ломаная линия - экспериментальный результат.

Рис.4В. Функция распределения по невозмущенным уровням системы (2.1) с $K = K_0 (1+t)^\alpha$ в нормированных координатах $f_N(n)$ и X (см.(3.1)) для значений рис.4А. Прямая "а" соответствует теоретической формуле (3.2), "в" - подгонка по формуле (3.3), ломаная линия - экспериментальный результат.

Рис.5А. То же, что и на рис.4А для $K_0 = 5, T = 1, \alpha = .35, t = 500$.

Рис.5В. То же, что и на рис.4В для значений рис.5А.

Рис.6А. То же, что и на рис.4А для $K_0 = 5, T = 1, \alpha = .5, t = 200$.

Рис.6В. То же, что и на рис.4В для значений рис.6А.

Таблица 1.

$$\alpha = 0, K_0 = K$$

$$\langle \Delta_a \rangle = 2.4, \quad \langle (\Delta_a - \langle \Delta_a \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle \Delta_a \rangle = .58$$

$$\langle \Delta_b \rangle = 5.7, \quad \langle (\Delta_b - \langle \Delta_b \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle \Delta_b \rangle = .59$$

$$\langle \delta_a \rangle = .27, \quad \langle (\delta_a - \langle \delta_a \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle \delta_a \rangle = .32$$

$$\langle \delta_b \rangle = .49, \quad \langle (\delta_b - \langle \delta_b \rangle)^2 \rangle^{1/2} / \langle \delta_b \rangle = .28$$

KT	K	t^*		Δ		δ	
		t_a^*	t_b^*	Δ_a	Δ_b	δ_a	δ_b
5	5	5	10	1	2	.45	.63
5	10	25	35	2.5	3.5	.50	.59
5	20	30	70	1.5	3.5	.27	.42
5	22.5	35	300	1.6	13	.26	.77
5	25	50	>300	2	12	.28	.69
5	27.5	80	200	2.9	7.3	.33	.51
5	30	80	245	2.7	8.2	.30	.52
5	32.5	40	200	1.2	6.2	.19	.44
5	35	75	>300	2.1	8.6	.25	.49
5	37.5	225	-	6	-	.41	-

Продолжение таблицы 1.

5	40	120	3	.27
5	42,5	75	1,8	.20
5	45	165	3,7	.29
5	50	305	6,1	.35
5	55	320	5,8	.33
5	60	225	3,75	.25
5	65	170	2,6	.20
5	70	240	3,4	.22
5	75	260	3,5	.21
5	80	215 >400	2,7	.18

Продолжение таблицы 1.

КТ	К	t_a^*	t_b^*	Δ_a	Δ_b	δ_a	δ_b
6	40	130	> 300	3,25		.29	
7	10	5	10	.5	1	.22	.32
7	20	10	55	.5	2,75	.16	.37
7	30	40	95	1,3	3,17	.21	.32
10	10	20	30	2,0	3	.45	.55
10	20	20	50	1,0	2,5	.22	.35
10	30	35	135	1,2	4,5	.20	.39
10	80	85	> 400	1,1		.12	
11.28	11.28	10	50	.89	4,4	.28	.63
11.28	23,85	80		3,4		.38	
12.5	40	115	260	2,9	6,5	.27	.40
20	20	50	205	2,5	10,3	.35	.72
20	30	55	225	1,8	7,5	.25	.50
20	40	115	320	2,9	8,0	.27	.45
20	60	240	> 400	4,		.26	

Продолжение таблицы 1.

23,85	23,85	15	.63	.16
		50	2.1	.30
36,42	36,42	35	.96	.16
36,42	40	30	.75	.14

Таблица 2

$$K = K(t), \alpha \neq 0$$

$$\langle \Delta_a \rangle = 16, \quad \langle (\Delta_a - \langle \Delta_a \rangle)^2 \rangle^{1/2} = .53 \cdot \langle \Delta_a \rangle$$

$$\langle \Delta_b \rangle = 24.7, \quad \langle (\Delta_b - \langle \Delta_b \rangle)^2 \rangle^{1/2} = .59 \cdot \langle \Delta_b \rangle$$

$$\langle \delta_a \rangle = 1.1, \quad \langle (\delta_a - \langle \delta_a \rangle)^2 \rangle^{1/2} = .31 \cdot \langle \delta_a \rangle$$

$$\langle \delta_b \rangle = 1.5, \quad \langle (\delta_b - \langle \delta_b \rangle)^2 \rangle^{1/2} = .33 \cdot \langle \delta_b \rangle$$

K_0	T	α	t_a^*	t_b^*	Δ_a	Δ_b	δ_a	δ_b
5	1	.10	170	265	22.6	33.7	1.7	2.1
5	1	.15	40	60	5.4	7.6	.87	1.0
5	1	.20	330	≈ 700	25.9	47	1.5	1.8
5	1	.25	500		28		1.3	
5	1	.35	7500					
7	1	.10	20	35	2.4	3.9	.53	.66
7	1	.15	190	430	14.5	29	1.1	1.4
7	1	.20	400		21.6		1.1	
10	1	.10	160	450	10.7	27	.85	1.8
10	1	.15	260		13.3		.84	
10	1	.20	600					

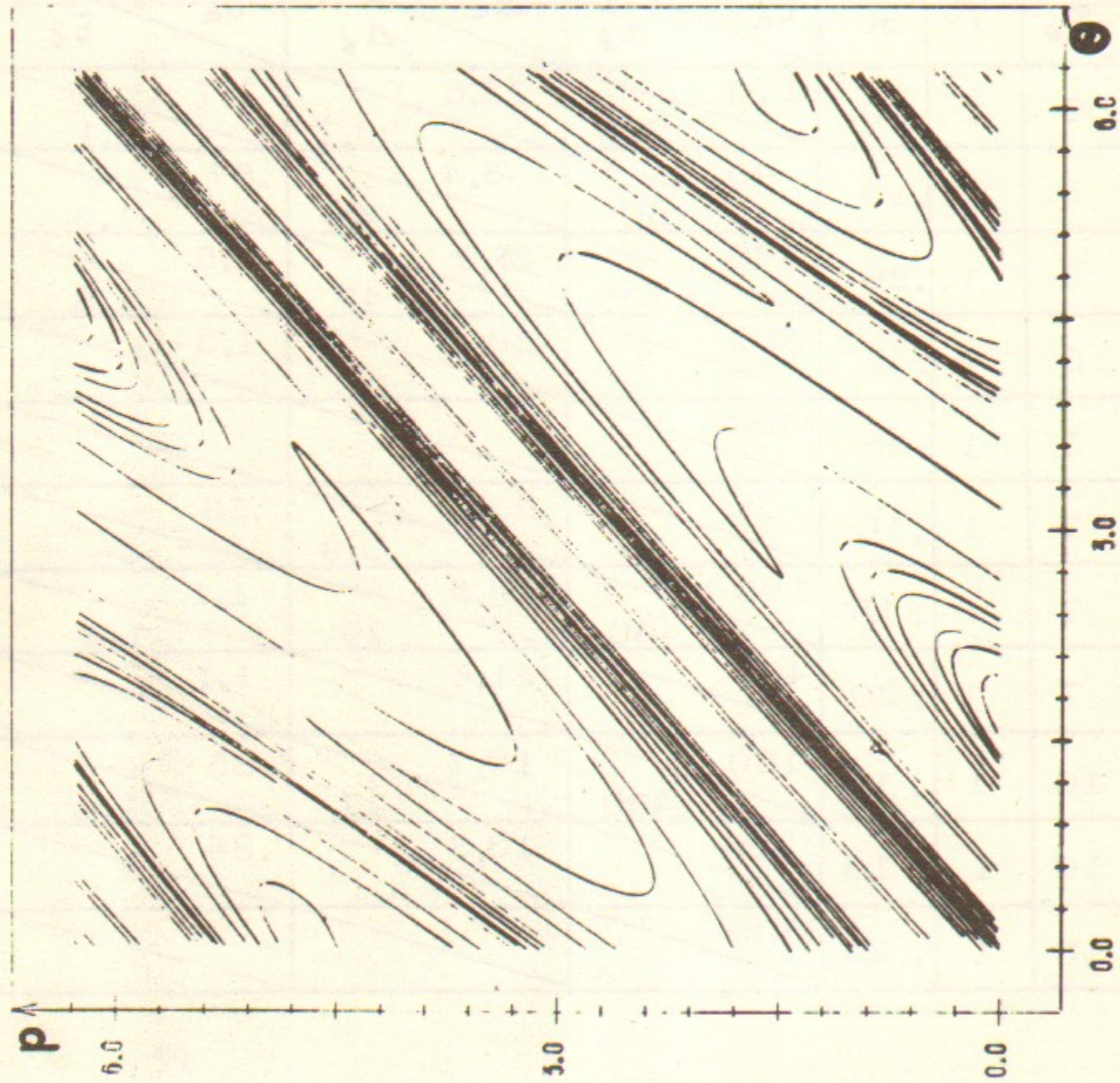


Рис.1А.

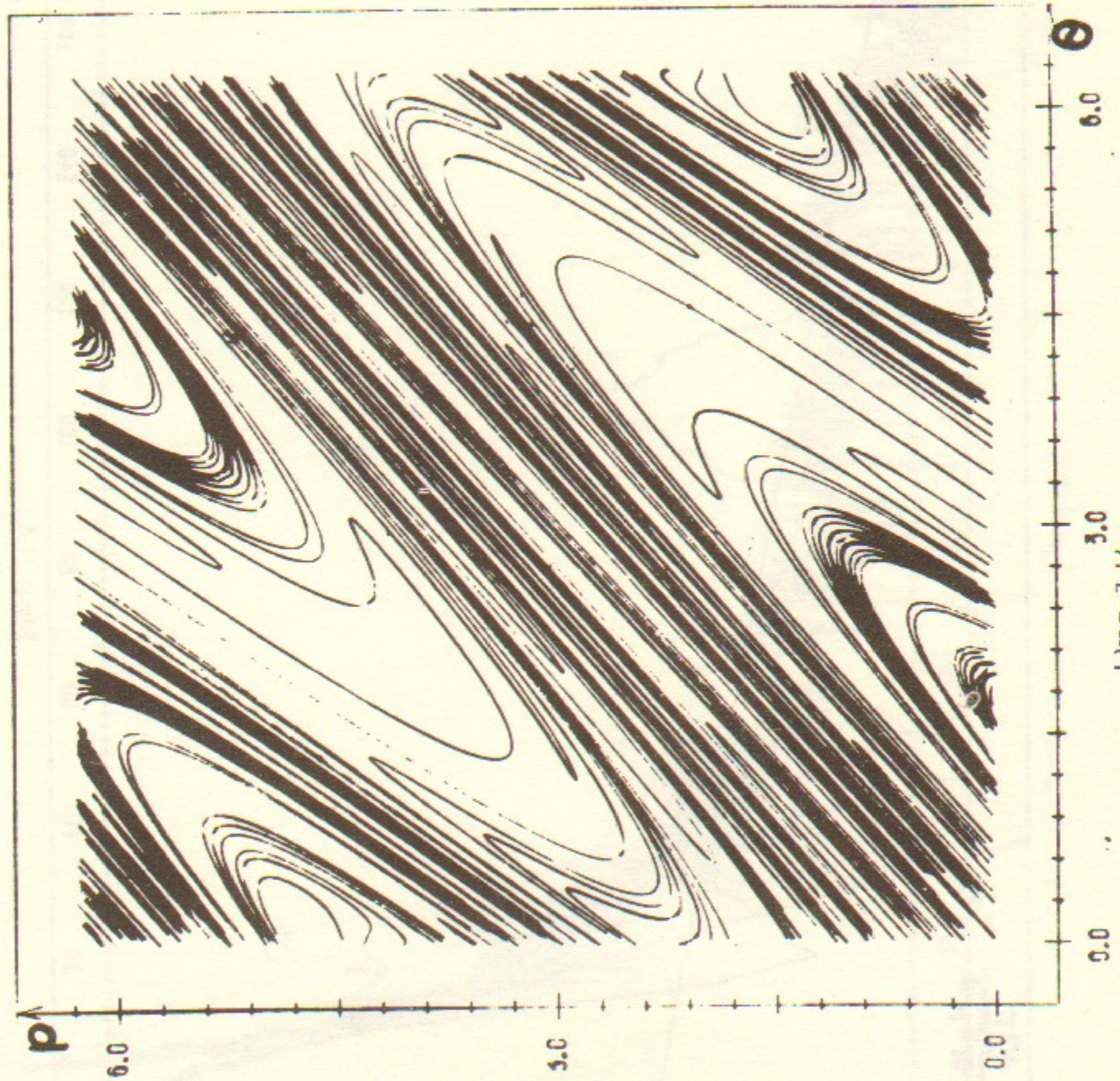


Рис.1Б.

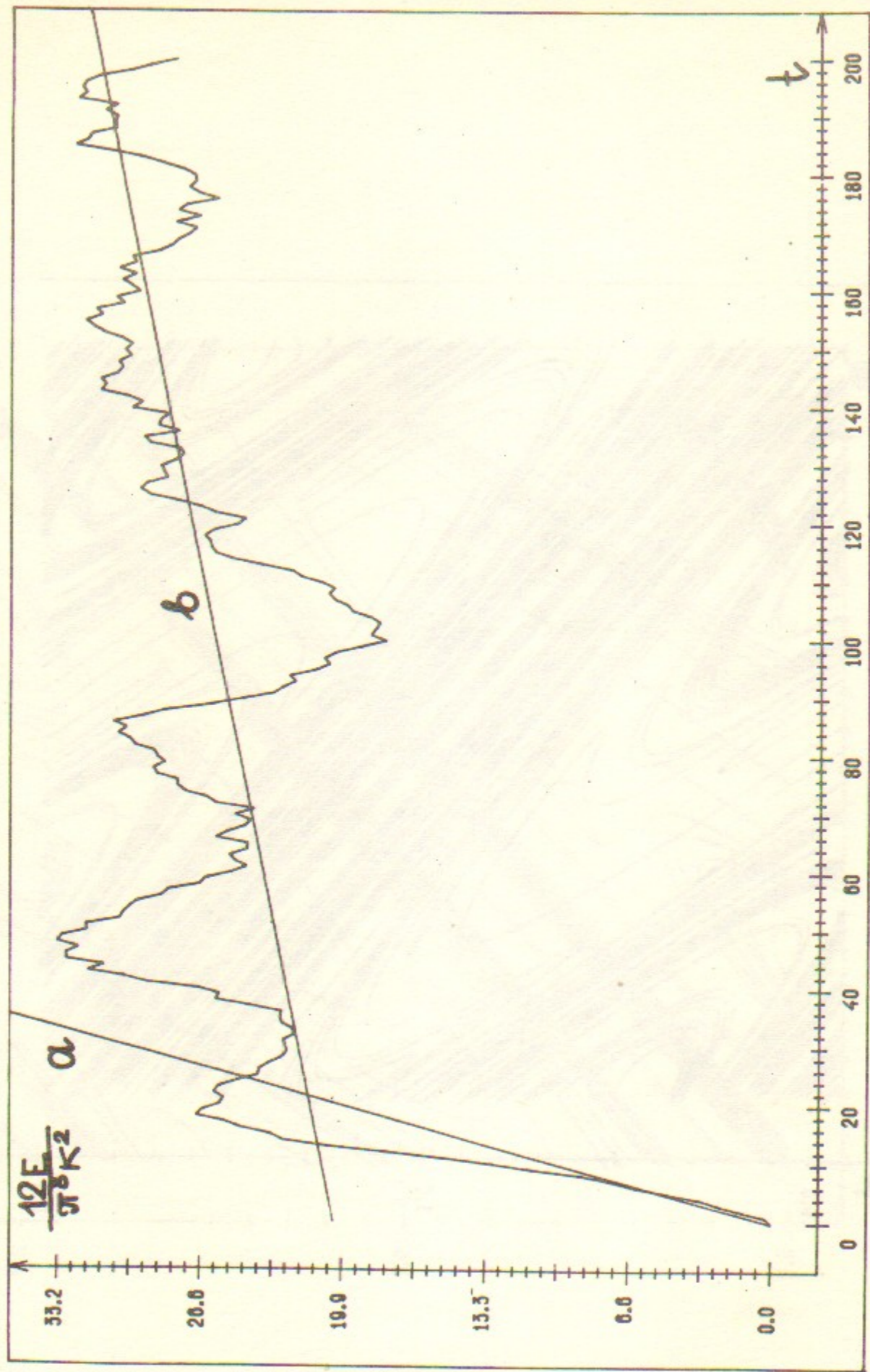


Рис.2А.

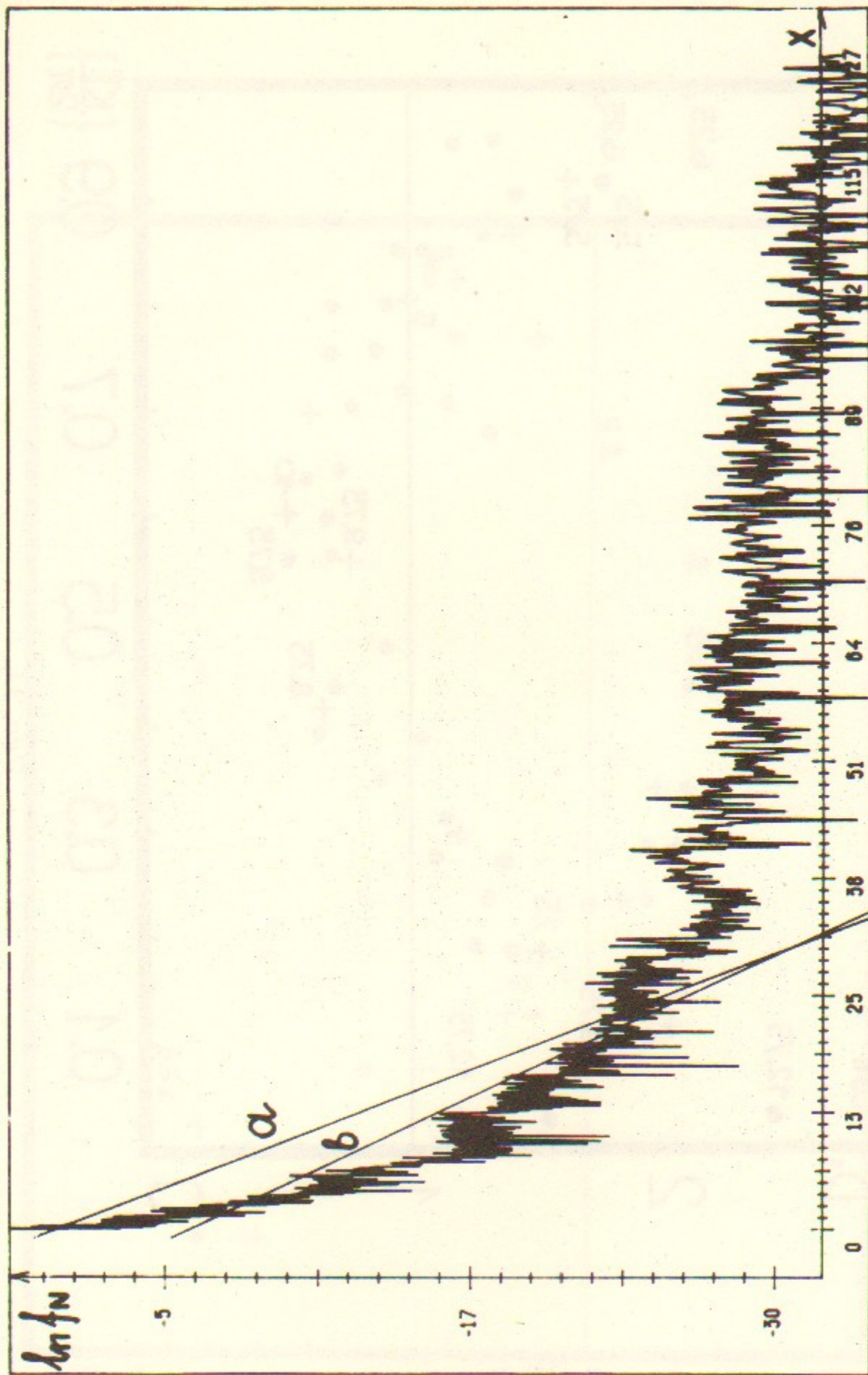


Рис.2В.

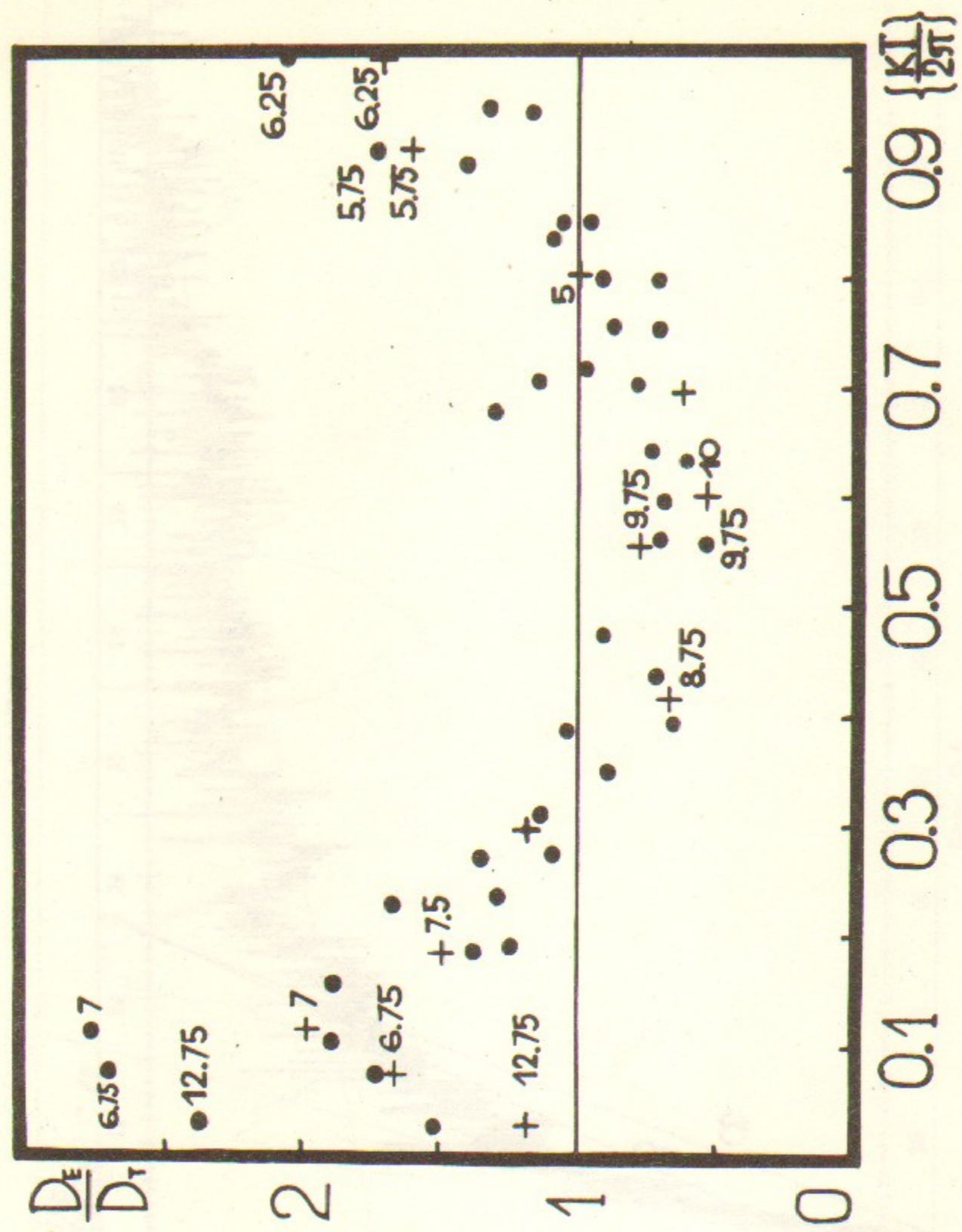


Рис.3А.

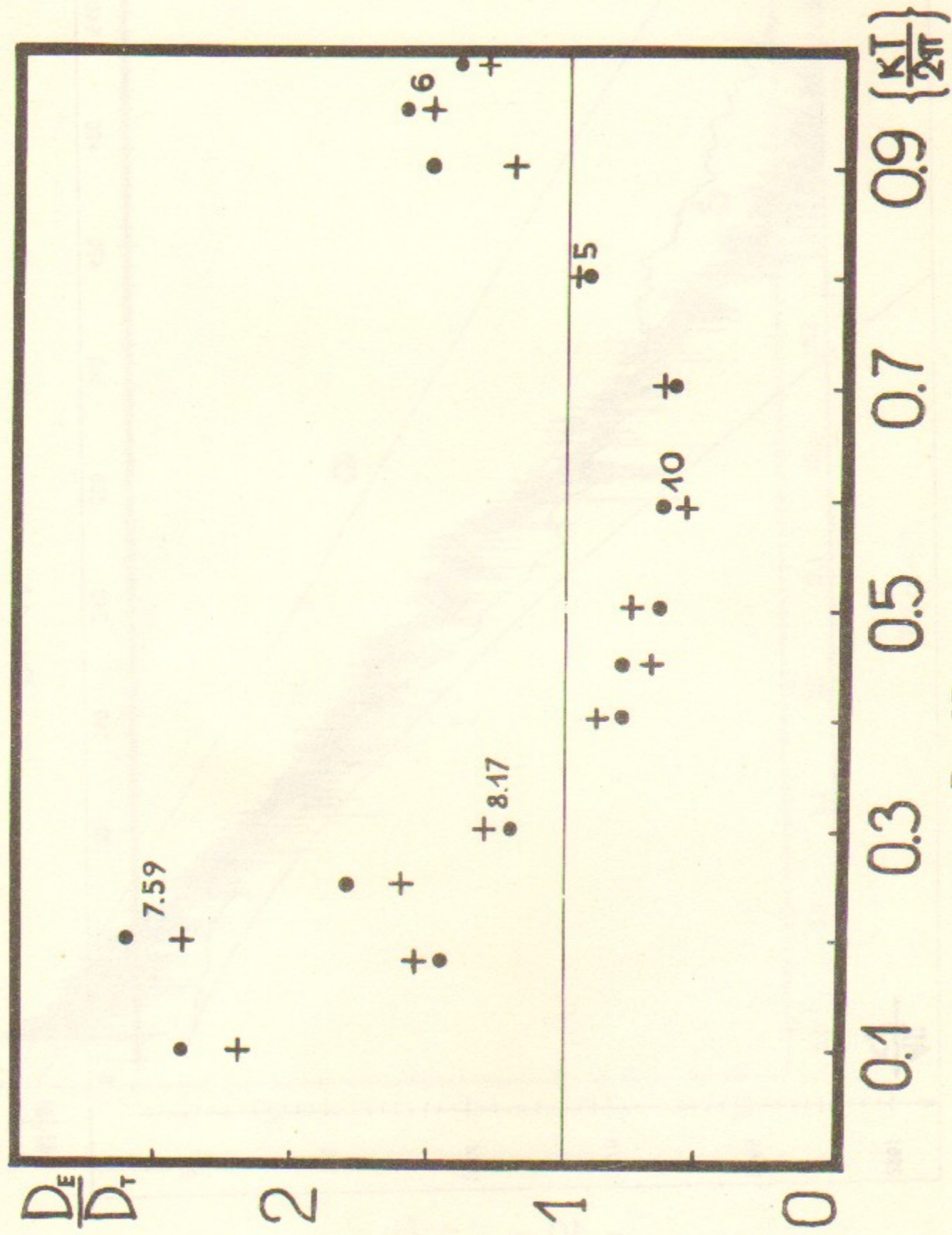


Рис.3В.

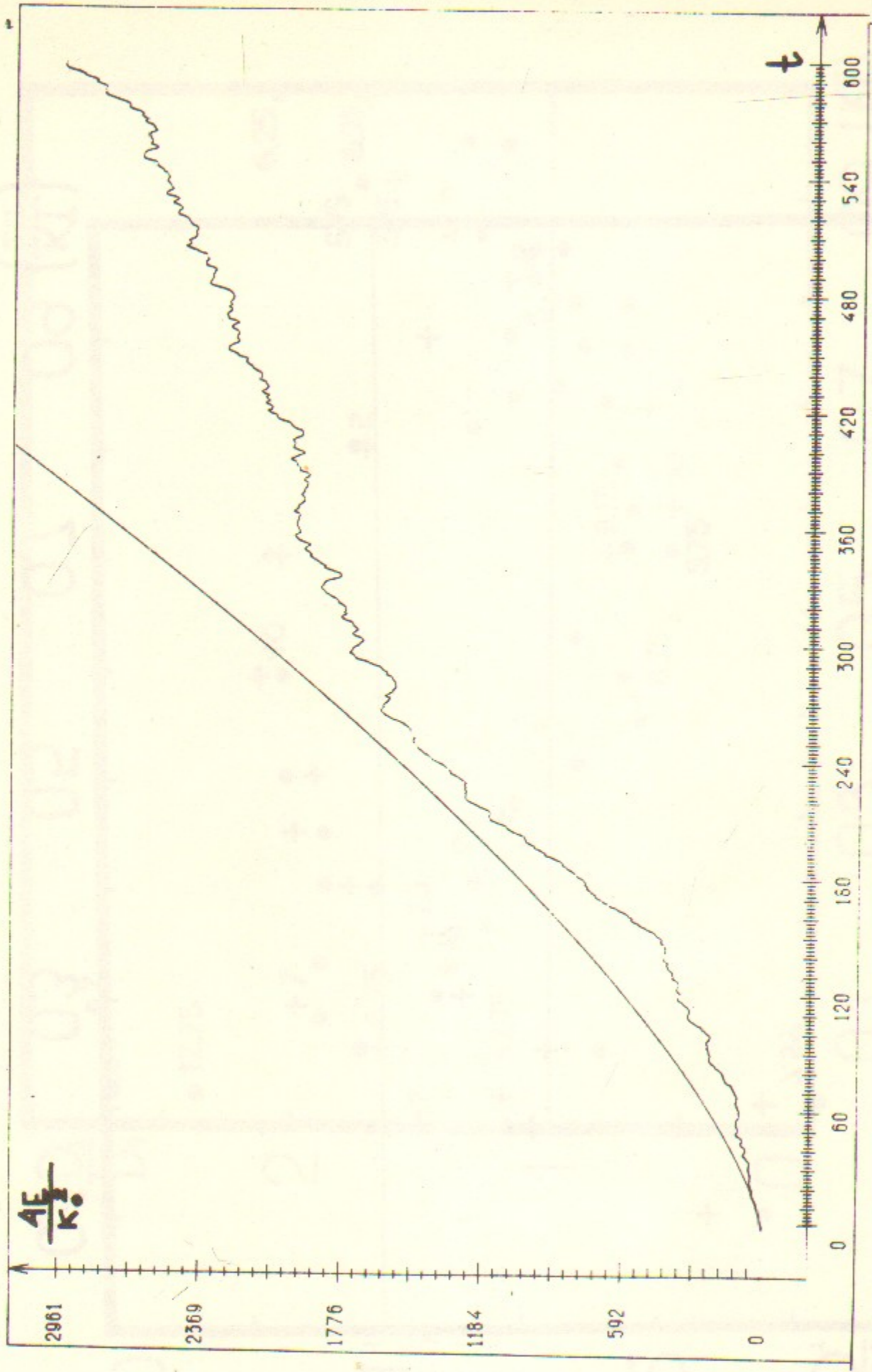


Рис.4А.

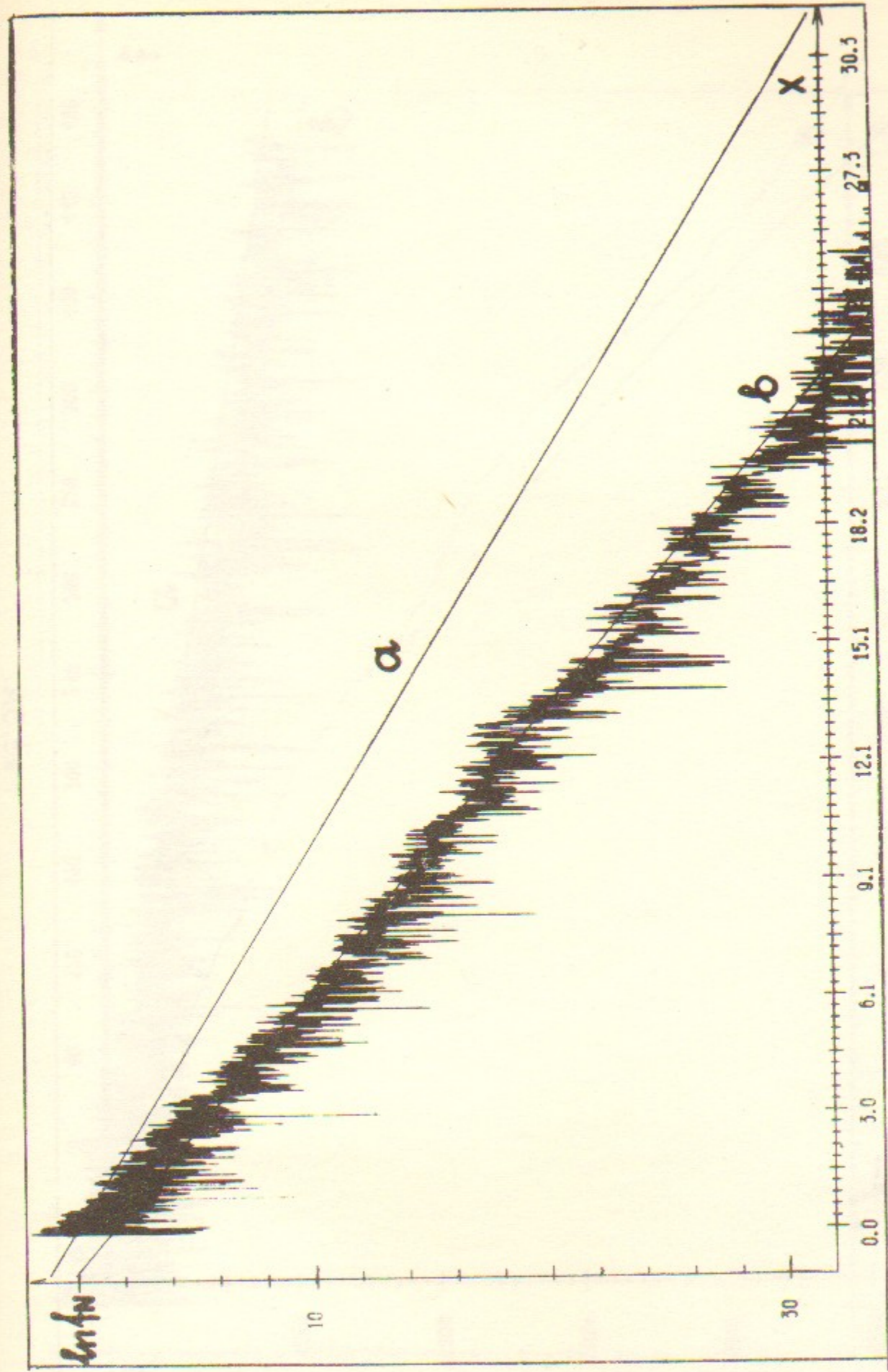


Рис.4В.

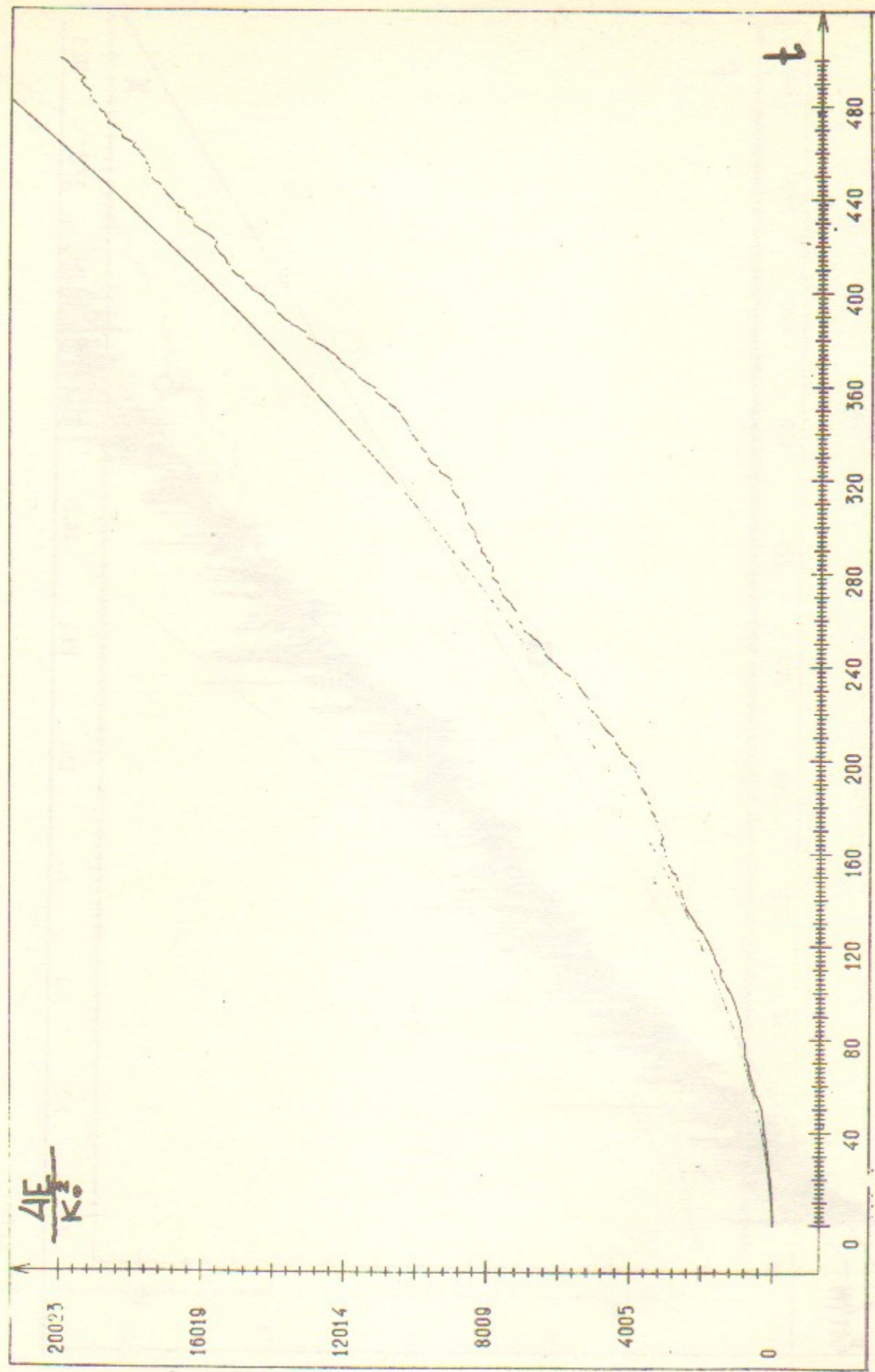


Рис. 5А.

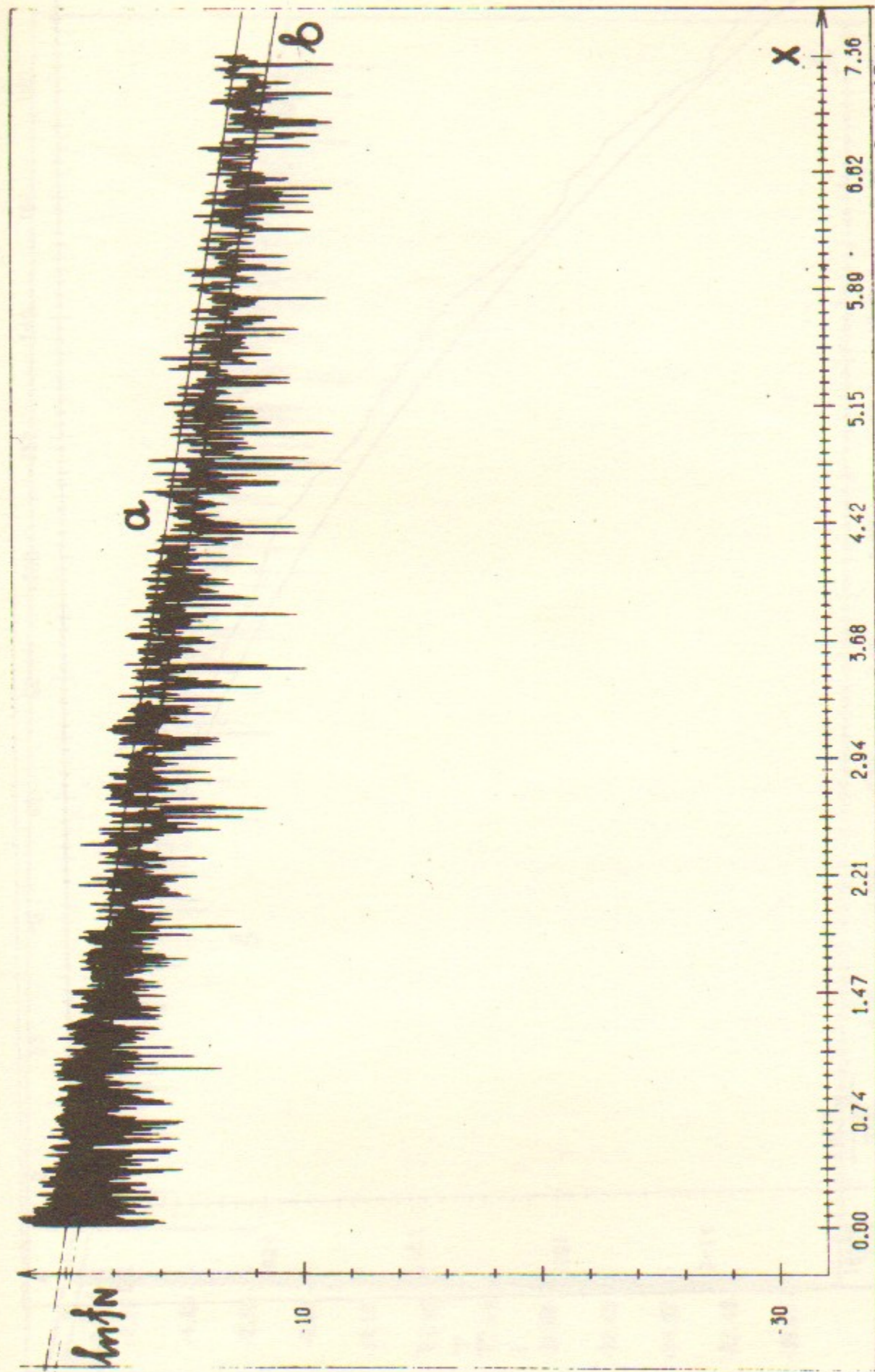


Рис. 5В.

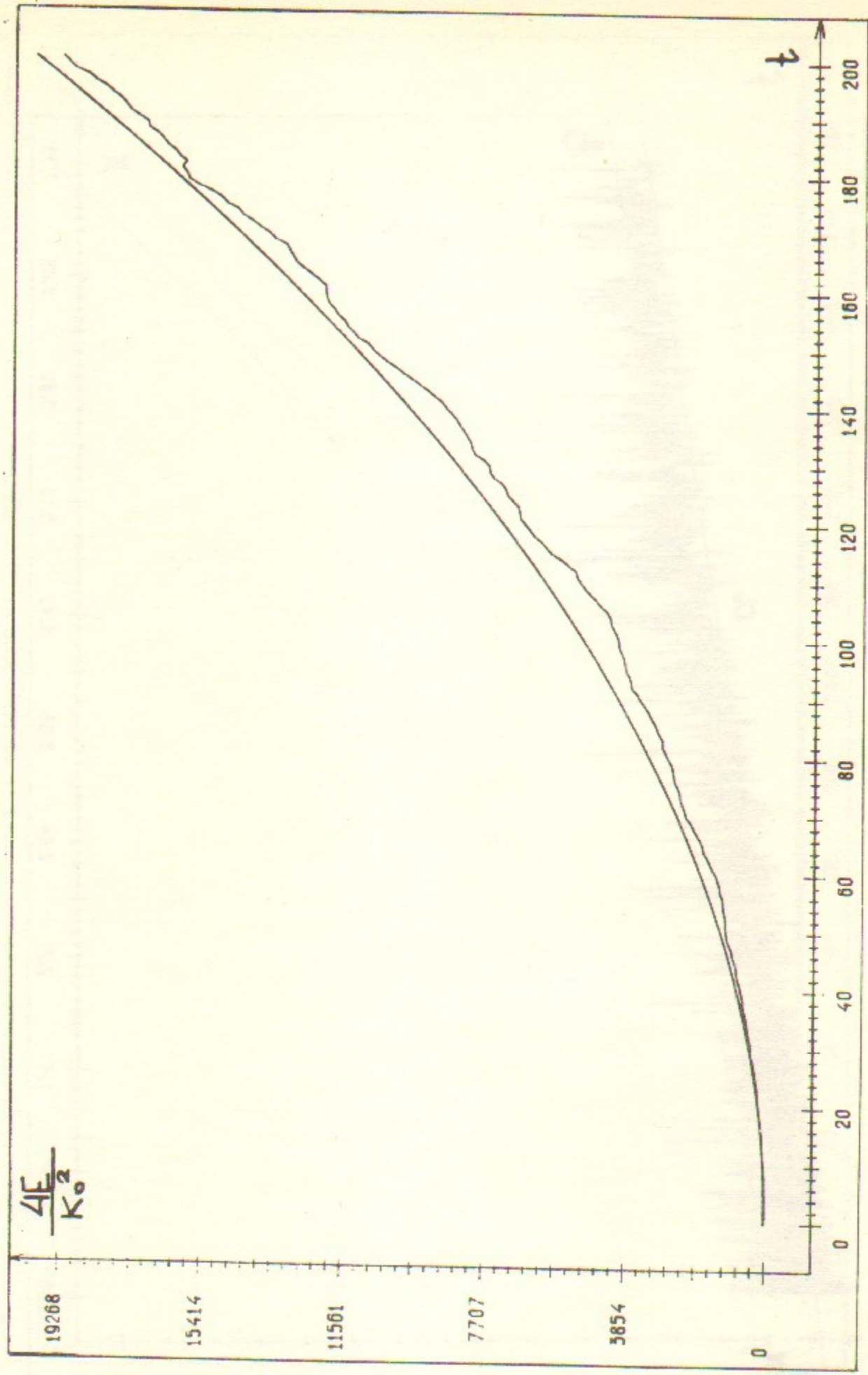


Рис.6А.

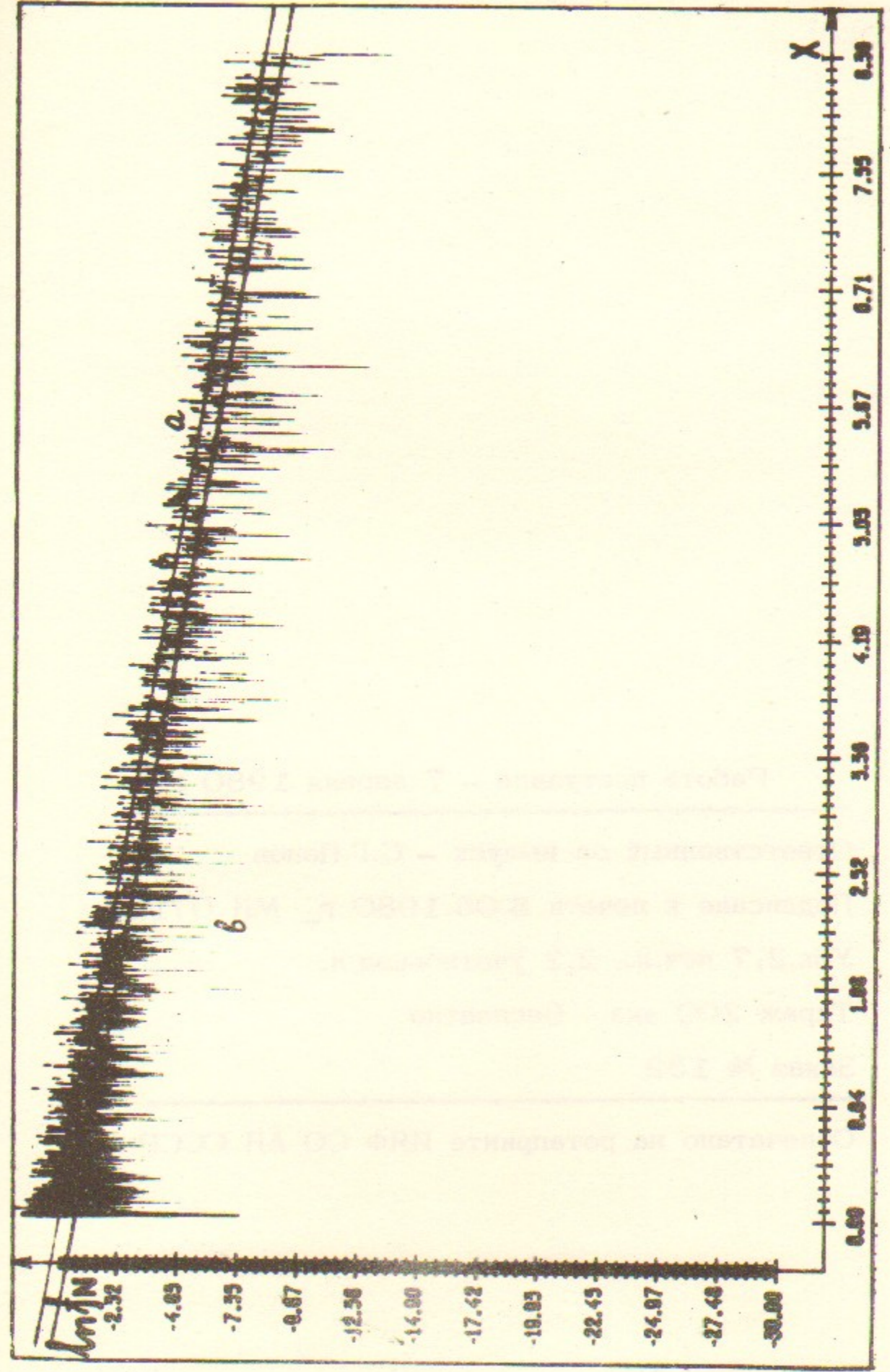


Рис.6В.