СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.М.Малкин

О НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

ПРЕПРИНТ 80-158

Новосибирск

О НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В. М. Малкин

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается модуляционная неустойчивость широкого спектра ленгмюровских волн со случайными фазами. Выводятся уравнения, описывающие её начальную стадию, и формулируются вытекающие из них условия стабилизации, связанной с эргодизацией спектра при рассеянии плазмонов на неустойчивых возмущениях плотности.

Обсуждается возможность статистического описания ленгмюровской турбулентности при большой амплитуде и произвольном пространственном масштабе модуляционных возмущений.

ON THE NONLINEAR STAGE OF MODULATIONAL INSTABILITY

V.M.Malkin

A b s t r a c t

The modulational instability of the broad spectrum of Langmuir waves with random phases is considered. The set of equations for its initial stage similar to the quasilinear one is derived, and the resulting conditions of the instabilities saturation due to the scattering of Langmuir waves by unstable density inhomogeneities are presented.

The possibility of the statistical description of the Langmuir turbulence for large modulational perturbations of arbitrary spatial scale is studied.

О НЕЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В.М.Малкин

I. Введение

Модуляционная неустойчивость плазмы без столкновений, обусловленная отрицательным давлением ленгмюровских волн, была обнаружена в работе [I]. В этой работе ленгмюровская турбулентность рассматривалась как газ статистически независимых волновых пакетов, движущихся по законам геометрической оптики. Позже было предложено упрощенное динамическое описание такой турбулентности, основанное на разделении быстрых и медленных движений и пренебрежении электронными нелинейностями [2]. Несмотря на простой вид динамических уравнений, получить достаточно полное представление о поведении их решений пока не удалось. В связи с этим представляет интерес возможность дальнейшего упрощения описания.

Заметим, что уравнения работы [I] легко получить из динамических разложением по двум малым параметрам: отношению длины ленгмюровских волн к характерному масштабу возмущения плотности плазмы (параметр квазиклассичности) и отношению частоты ионного звука или инкремента модуляционной неустойчивости к ширине ленгмюровского спектра по частоте (параметр адиабатичности). Требование длинноволновости модуляций плотности является весьма обременительным - подробнее речь об этом пойдет в разделе 4, - параметр же адиабатичности в ряде практически интересных случаев действительно мал. Можно попытаться использовать только этот параметр для получения более простых, чем в [2] уравнений. Такая попытка предпринималась ранее (см.[3]) и позволила, в частности, описать линейную стадию неустойчивости, не прибегая к приближению геометрической оптики. В настоящей работе эволюция небольших, не обязательно длинноволновых, возмущений плотности исследована при помощи уравнений, сходных с квазилинейными. Для не слишком малых возмущений получены другие уравнения, явным образом использующие параметр адиабатичности и в то же время более общие, чем исходная система работы [I].

2. Безразмерные переменные

В дальнейшем всюду, где не оговорено противное, предполагается, что: существует только одна характерная ширина спектра - порядка дисперсионной добавки $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega_p k_0^2 r_D^2$ к частоте ленгмюровских волн; относительное превышение (ε) плотности энергии ленгмюровских волн W над ее пороговым значением $W_n \sim n_0 T \omega_0/\omega_p$ не мало по сравнению с единицей ($\varepsilon \gtrsim$ I).

Пусть $(W/4n_0T)(\omega_p/\omega_0) = R$, а скорость ионного звука равна c_s. Будем измерять расстояние в единицах k_0^{-1}, время - $(k_0 c_s R^{1/2})^{-1}$, электрическое поле - $(8\pi W)^{1/2}$, возмущение концентрации плазмы n - $2n_0\omega_0/\omega_p$. Тогда динамические уравнения работы [2] примут следующий вид:

$$i g \Delta\varphi_t = -\Delta\Delta\varphi + \nabla(n\nabla\varphi) \tag{I}$$

$$n_{tt} = R^{-1}\Delta n + \Delta|\nabla\varphi|^2 \tag{2}$$

Здесь φ - амплитуда высокочастотной составляющей электрического потенциала, $g = R^{1/2}k_0 c_s/\omega_0$ - параметр адиабатичности.

Предположение $g \ll$ I совместимо с условием модуляционной неустойчивости $R \gtrsim$ I, если групповая скорость плазмонов гораздо больше скорости звука.

3. Слабая нелинейность

Перейдем в уравнениях (I), (2) к представлению Фурье по координатам и введем обозначение $E_{\vec k} = k\varphi_{\vec k}$:

$$i g \frac{\partial E_{\vec k}}{\partial t} = k^2 E_{\vec k} + \int d\vec k_1 d\vec q\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1} n_{\vec q} E_{\vec k_1} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 n_{\vec q}}{\partial t^2} = -q^2\left[R^{-1} n_{\vec q} + \int d\vec k d\vec k_1\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1} E_{\vec k} E^*_{\vec k_1}\right] \tag{4}$$

В начальный момент времени фазы ленгмюровских волн будем считать случайными, а возмущение концентрации плазмы – пренебрежимо малым. Для выполнения последнего условия необходимо создавать спектр достаточно быстро, так как биения электрического поля порождают звук.

До тех пор, пока возмущение концентрации не станет большим – каким именно, выяснится ниже, – различные фурье-компоненты электрического и звукового полей можно считать некоррелированными:

$$\langle E_{\vec k}(t)\, E^*_{\vec k_1}(t') \rangle = N_{\vec k}(t,t')\,\delta(\vec k - \vec k')$$

$$\langle n_{\vec q}(t)\, n_{\vec q_1}(t') \rangle = F_{\vec q}(t,t')\,\delta(\vec q + \vec q')$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю, т.е. по начальным фазам ленгмюровских волн.

Корреляционные функции $N_{\vec k}(t,t')$, $F_{\vec q}(t,t')$ удовлетворяют в первом приближении по величинам $F_{\vec q}$ уравнениям

$$\begin{aligned} &\left[ig\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_{\vec k}(t)\right]\left[-ig\frac{\partial}{\partial t'} - \lambda^*_{\vec k}(t')\right] N_{\vec k}(t,t') = \\ &= \int d\vec k_1 d\vec q\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 F_{\vec q}(t,t')\, N_{\vec k_1}(t,t') \quad , \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + S^2_{\vec q}(t)\right]\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + S^2_{-\vec q}(t')\right] F_{\vec q}(t,t') = \\ &= \int d\vec k d\vec k_1\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 N_{\vec k}(t,t')\, N_{\vec k_1}(t',t) \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\lambda_{\vec k}$ и $S^2_{\vec q}$ – перенормированные частота ленгмюровских волн и квадрат скорости звука:

$$\lambda_{\vec k}(t) = k^2 + \int d\vec k_1 d\vec q\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 \frac{F_{\vec q}(t)}{k^2 - k_1^2 + i0} \equiv \omega_{\vec k} - i\gamma_{\vec k} \quad ,$$

$$S^2_{\vec q}(t) = R^{-1} + \int d\vec k d\vec k_1\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 \frac{N_{\vec k}(t) - N_{\vec k_1}(t)}{k^2 - k_1^2 - i0} \quad ;$$

$$F_{\vec q}(t) \equiv F_{\vec q}(t,t) \quad , \quad N_{\vec k}(t) = N_{\vec k}(t,t) \quad .$$

Уравнения (5), (6) легко получить с помощью диаграммной техники Уайльда. Подробное изложение ее стационарного варианта имеется, например, в работах [4], [5]. Переход к нестационарному случаю в данном пункте тривиален.

$N_{\vec k}(t,t')$ является быстроосциллирующей функцией разности $t - t'$:

$$N_{\vec k}(t,t') = \bar N_{\vec k}(t,t') \exp\left\{-ig^{-1}\int_{t'}^{t} \omega_{\vec k}(t_1)\,dt_1\right\} , \tag{7}$$

где $\bar N_{\vec k}(t,t')$ плавно зависит от обоих времен. Подставляя (7) в (5), (6) и проводя преобразования, понятные из результата, получим:

$$\begin{aligned} &\left[g\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_{\vec k}(t)\right]\left[g\frac{\partial}{\partial t'} + \gamma_{\vec k}(t')\right] \bar N_{\vec k}(t,t') = 2\pi g\,\delta(t-t')\, L_{\vec k}(t) \\ &L_{\vec k} = \int d\vec k_1 d\vec q\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\,\delta(\omega_{\vec k} - \omega_{\vec k_1})\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 F_{\vec q}\, N_{\vec k_1} \, , \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + S^2_{\vec q}(t)\right]\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + S^2_{-\vec q}(t')\right] F_{\vec q}(t,t') = 2\pi g\,\delta(t-t')\,\Phi_{\vec q}(t) \\ &\Phi_{\vec q} = \int d\vec k d\vec k_1\, \delta(\vec k - \vec k_1 - \vec q)\,\delta(\omega_{\vec k} - \omega_{\vec k_1})\left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 N_{\vec k} N_{\vec k_1} \, . \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнение (8) позволяет выразить $\bar N_{\vec k}(t,t')$ через автокорреляционную функцию $N_{\vec k}(t)$:

$$\bar N_{\vec k}(t,t') = \begin{cases} N_{\vec k}(t') \exp\left[-g^{-1}\int_{t'}^{t} \gamma_{\vec k}(t_1)\,dt_1\right] , & t > t' ; \\ N_{\vec k}(t) \exp\left[-g^{-1}\int_{t}^{t'} \gamma_{\vec k}(t_1)\,dt_1\right] , & t < t' . \end{cases} \tag{10}$$

Вычисляя скачок при $t' = t$ первой производной $\bar N_{\vec k}(t,t')$ по какому-либо из времен двумя различными способами – из (8) и из (10) – и приравнивая результаты, получим уравнение, описывающее эволюцию $N_{\vec k}(t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_{\vec k}}{\partial t} = 2\pi g^{-1}\int d\vec k_1\, \delta(\omega_{\vec k} - \omega_{\vec k_1})\, P_{\vec k \vec k_1}(N_{\vec k_1} - N_{\vec k}) \\ &P_{\vec k \vec k_1} = \left(\frac{\vec k \vec k_1}{k k_1}\right)^2 F_{\vec k - \vec k_1} \end{aligned} \tag{11}$$

Это обычное уравнение для рассеяния волн на случайных квазистатических неоднородностях плотности. Его, разумеется, можно получить и более простым способом. Преимущества данного способа становятся ощутимее при описании эволюции $F_{\vec q}(t)$.

Двухвременная корреляционная функция $F_{\vec q}(t,t')$ выражается через две одновременные – $F_{\vec q}(t)$ и $A_{\vec q}(t) = i\left[\frac{\partial}{\partial t'}F_{\vec q}(t,t') - \frac{\partial}{\partial t}F_{\vec q}(t,t')\right]_{t'=t}$ – с помощью следующих из (9) уравнений:

$$\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + S^2_{\vec q}(t)\right]F_{\vec q}(t,t') = 0, \quad t>t';$$

$$\left[\frac{1}{q^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + S^2_{-\vec q}(t')\right]F_{\vec q}(t,t') = 0, \quad t<t'.$$

Вычисляя скачки третьих производных $\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial t'}F_{\vec q}(t,t')$, $\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial t'^2}F_{\vec q}(t,t')$ при $t'=t$ и приравнивая их известным из (9) величинам, получим искомые уравнения:

$$\frac{1}{q^2}\frac{\partial^3 F_{\vec q}}{\partial t^3} + 4\,\mathrm{Re}\,S^2_{\vec q}\frac{\partial F_{\vec q}}{\partial t} + 2\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,S^2_{\vec q}}{\partial t}F_{\vec q} + 2\,\mathrm{Im}\,S^2_{\vec q}A_{\vec q} = 4\pi g q^2\Phi_{\vec q} \qquad \text{(I2)}$$

$$\frac{1}{q^2}\frac{\partial A_{\vec q}}{\partial t} + 2\,\mathrm{Im}\,S^2_{\vec q}F_{\vec q} = 0 \qquad \text{(I3)}$$

Легко проверить, что при низком уровне ленгмюровской турбулентности, когда первым и третьим слагаемыми в левой части (I2) можно пренебречь, система (II)-(I3) сводится к стандартным уравнениям, описывающим трехволновое взаимодействие ленгмюровских волн с ионнозвуковыми в адиабатическом приближении.[I)]

В дальнейшем функция $N_{\vec k}(t)$ считается четной по $\vec k$ ($N_{\vec k} = N_{-\vec k}$). При этом мнимая часть $S^2_{\vec q}$, обусловленная резонансом и не имеющая прямого отношения к модуляционной неустойчивости, обращается в нуль. Уравнение (I3) дает $A_{\vec q} = 0$, а (I2) приобретает вид:

$$\frac{1}{q^2}\frac{\partial^3 F_{\vec q}}{\partial t^3} + 4S^2_{\vec q}\frac{\partial F_{\vec q}}{\partial t} + 2\frac{\partial S^2_{\vec q}}{\partial t}F_{\vec q} = 4\pi g q^2\Phi_{\vec q} \qquad \text{(I4)}$$

I) Заметим, во избежание недоразумений, что в (II) не учтен квадратичный по $N_{\vec k}$ член, описывающий процесс, аналогичный индуцированному рассеянию ленгмюровских волн на ионах в изотермической плазме. Этот член нетрудно учесть, однако в рассматриваемой ситуации он пренебрежимо мал.

Уравнения (II), (I4) образуют замкнутую систему, которую естественно назвать квазилинейной системой со слабым нелинейным источником звука.

Некоторое представление о поведении ее решений можно получить, считая спектр плазмонов неизменным. Практически этот случай реализуется, если начальный спектр изотропен (эргодичен). При постоянных $\Phi_{\vec q}$ и $S^2_{\vec q}$ уравнение (I4) легко интегрируется. Для неустойчивых звуковых возмущений ($S^2_{\vec q} < 0$) получаем:

$$F_{\vec q} = \pi g q^2/|S^2_{\vec q}|\,\Phi_{\vec q}\,t\left(\frac{\mathrm{sh}\,2|S_{\vec q}|qt}{2|S_{\vec q}|qt} - 1\right),$$

а для устойчивых –

$$F_{\vec q} = \pi g q^2 S^{-2}_{\vec q}\Phi_{\vec q}\,t\left(1 - \frac{\sin 2S_{\vec q}qt}{2S_{\vec q}qt}\right).$$

И те, и другие возникают в области $q \lesssim$ I, где отлична от нуля функция $\Phi_{\vec q}$. Наиболее неустойчивыми являются возмущения с $q \sim$ I (см.[3]). Они отрываются от источника и выходят на стадию экспоненциального роста при $t \sim$ I ($F_{\vec q} \sim g$). Неустойчивые длинноволновые возмущения, если таковые имеются, начинают экспоненциально расти, когда $t \sim q^{-1}$ ($F_{\vec q} \sim g$). Применимость при $F_{\vec q} \gg g$ линейной теории неустойчивости обусловлена не слабостью рассеяния, а постоянством распределения плазмонов. Это сразу проявляется в случае первоначально анизотропных спектров. Для них рассеяние существенно, начиная с момента $t \sim$ I, когда $F = \max_{\vec q} F_{\vec q}$ достигает значения g.

В пренебрежении малыми поправками, связанными с изменением частот $\omega_{\vec k}$, число плазмонов на каждой энергетической поверхности $\omega_{\vec k} = const$ сохраняется, а их энтропия растет:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\vec k\,\delta(\omega_{\vec k}-\omega)\left[\ln\frac{N_{\vec k}}{N(\omega)} + 1 - \frac{N_{\vec k}}{N(\omega)}\right] =$$

$$= 2\pi g^{-1}\int d\vec k\,d\vec k_1\,\delta(\omega_{\vec k}-\omega)\,\delta(\omega_{\vec k_1}-\omega)\,P_{\vec k\vec k_1}\frac{(N_{\vec k}-N_{\vec k_1})^2}{N_{\vec k}N_{\vec k_1}}$$

Следовательно, рассеяние ведет к эргодизации ленгмюровского спектра. При $t \sim$ I этот процесс охватывает область $k \sim$ I. По мере роста длинноволновых возмущений плотности плазмы он распространяется на область $k \ll$ I. Полная эргодизация происходит при $F \sim g^{1/2}$ ($t \sim \ln g^{-1}$), когда становятся существенными процессы рассеяния второго порядка по F. Их учет сводится к замене в уравнении (11) вероятности рассеяния $P_{\vec{k}\vec{k}_1}$ её перенормированным значением $\tilde{P}_{\vec{k}\vec{k}_1}$. Поправка состоит из нескольких слагаемых, соответствующих вероятностям различных процессов. Все слагаемые можно вычислить с помощью диаграммной техники Уайльда. Величина $\tilde{P}_{\vec{k}\vec{k}_1}$ не мала по сравнению с g в длинноволновой области, если этим свойством обладает хоть одно из них, например, вероятность $P'_{\vec{k}\vec{k}_1}$ рассеяния плазмонов через виртуальное состояние:

$$P'_{\vec{k}\vec{k}_1} = \frac{\partial}{\partial\omega}\int d\vec{k}_2 \frac{P_{\vec{k}\vec{k}_2}P_{\vec{k}_2\vec{k}_1}}{\omega_{\vec{k}_2}-\omega}\Big|_{\omega=\omega_{\vec{k}_1}=\omega_{\vec{k}}}$$

Отсюда следует, что при $F\sim g^{1/2}$ распределение плазмонов становится эргодическим, а так как перенормировка частоты все еще мала, его можно считать изотропным.

В процессе изотропизации ленгмюровского спектра функция $S^2_{\vec{q}}$ заменяется своим усредненным по углу значением, и максимальный инкремент уменьшается. Условие стабилизации, состоящее в устойчивости изотропизированного распределения плазмонов, выполнимо при надпороговости порядка единицы. В противном случае $R \gg 1$, и возмущения с $1 \ll q \ll R^{1/2}$ неустойчивы независимо от вида спектра (см. [3]). В отсутствие стабилизации величина F достигает со временем единицы, после чего используемая теория возмущений становится неприменимой, далее нельзя усреднять по начальным фазам ленгмюровских волн и необходимо учитывать корреляцию различных фурье-компонент электрического и звукового полей.

Заметим, что для сильно вытянутых в каком-либо направлении спектров, которые пока исключались из рассмотрения, стабилизация неустойчивости возможна и при большой надпороговости, поскольку в процессе их изотропизации пороговая энергия плазмонов вырастает во много раз.

В заключение данного раздела остановимся на случае малой надпороговости ($\varepsilon \ll 1$), также пока не рассматривавшемся. В этом случае неустойчивость возникает лишь в узкой области $\vec{q}$-пространства, и её инкремент мал – порядка ε для длинноволно-

вой неустойчивости и $\varepsilon^{1/2}$ для коротковолновой (см. [3]). За время, обратное инкременту, устойчивый звук вырастает настолько, что рассеяние плазмонов становится существенным практически во всем $\vec{k}$-пространстве. Если первоначально спектр не был изотропным, то он становится таким, и неустойчивость, очевидно, стабилизируется. Если начальный спектр изотропен, стабилизация на рассматриваемой стадии не происходит. Простые оценки показывают, что используемая теория возмущений применима, когда $F \ll \varepsilon^{1/2}$ как для длинноволновой, так и для коротковолновой неустойчивости. Отрыв неустойчивых возмущений от источника успевает произойти прежде, чем F достигнет значения $\varepsilon^{1/2}$, если $\varepsilon \gg g^{1/2}$. При меньших ε линейная теория не имеет области применимости даже для изотропного спектра.

4. Сильная нелинейность

Неприменимость к модуляциям плотности с $F \gtrsim 1$ теории возмущений, основанной на усреднении по начальным фазам плоских ленгмюровских волн, связана с малым временем жизни последних: при $F \sim 1$ оно порядка обратной ширины спектра. Перейти от плоских волн к более долгоживущим состояниям можно лишь отказавшись от статистического описания возмущения плотности плазмы, n, а именно, рассматривая отдельные реализации случайной функции n, зависящей от начальных фаз ленгмюровских волн.

Представим возмущение в виде суммы двух слагаемых

$$n = \bar{n} + \tilde{n}$$

Первое из них получается усреднением n по времени τ: $1 \gg \tau \gg g$. Второе содержит быстроосциллирующие вынужденные флуктуации плотности, амплитуда которых мала. Следуя теории адиабатических возмущений (см., например, [6]), разложим электрический потенциал φ по собственным модам, медленно меняющимся вместе с $\bar{n}$ 2):

$$\varphi = \sum_p c_p \varphi_p \exp\left\{-ig^{-1}\int^t \lambda_p(t_1)\,dt_1\right\} \qquad (15)$$

2) В данном разделе плазма считается заключенной в конечный объем V.

Они удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_p \Delta \varphi_p = -\Delta\Delta\varphi_p + \nabla(\bar n \nabla \varphi_p) \qquad (16)$$

Для однозначного определения фаз ниже φ_p считаются вещественными. Нормировка собственных функций задается соотношениями

$$\frac{1}{V}\int d\vec r\, \nabla\varphi_p \nabla\varphi_{p'} = \delta_{pp'} \qquad (17)$$

Коэффициенты разложения c_p подчиняются уравнениям

$$ig\frac{\partial c_p}{\partial t} = \sum_{p'} h_{pp'} c_{p'} \exp\left\{-ig^{-1}\int^t (\lambda_{p'}-\lambda_p)\,dt_1\right\} \qquad (18)$$

$$h_{pp'} = \frac{1}{V}\left\{\int d\vec r\, \bar n \nabla\varphi_p \nabla\varphi_{p'} - ig\int d\vec r\, \nabla\varphi_p \frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi_{p'}\right\}$$

На таком языке рассмотренная ранее эргодизация ленгмюровского спектра объясняется перемешиванием фаз чисел c_p, вследствие расщепления первоначально близких собственных частот. После ее завершения корреляция между различными c_p оказывается слабой.

Подставим разложение (15) в уравнение (2) и усредним по времени τ:

$$\frac{\partial^2 \bar n}{\partial t^2} = \Delta\left\{R^{-1}\bar n + \sum_p N_p |\nabla\varphi_p|^2 + \overline{\sum_{p,p'}{}' c_p c^*_{p'} \nabla\varphi_p \nabla\varphi_{p'} \exp\left[-ig^{-1}\int^t (\lambda_p - \lambda_{p'})\,dt_1\right]}\right\} \qquad (19)$$

Здесь $N_p = |c_p|^2$ – числа заполнения уровней (числа плазмонов), черта означает усреднение, штрих у второй суммы – отсутствие члена с $p' = p$.

Если расстояние между ближайшими собственными частотами λ_p значительно больше g, то числа N_p с высокой точностью сохраняются, а последнее слагаемое в правой части (19) при надлежащем выборе τ пренебрежимо мало. В результате получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar n}{\partial t^2} = \Delta\left(R^{-1}\bar n + \sum_p N_p |\nabla\varphi_p|^2\right) \qquad (20)$$

с постоянными N_p. Это уравнение можно представить в форме

$$\frac{\partial^2 \bar n}{\partial t^2} = \Delta\left(R^{-1}\bar n + \frac{\delta}{\delta \bar n}\sum_p N_p \lambda_p\right), \qquad (21)$$

откуда сразу следует, что оно является гамильтоновым (как и исходные уравнения (см., например, [7])). Канонически сопряженной к $\bar n$ переменной является потенциал скорости ψ, а гамильтонианом – функционал

$$H = \int d\vec r\left\{\frac{1}{2}\left[R^{-1}\bar n^2 + (\nabla\psi)^2\right] + \sum_p N_p\lambda_p\right\} \qquad (22)$$

Энергия системы представлена здесь в виде суммы энергий звукового поля и находящихся в нем ленгмюровских волн.

Рассмотрим противоположный предельный случай: пусть в интервале g содержится много собственных частот λ_p. Тогда последнее слагаемое в правой части (19) содержит резонансные члены, описывающие генерацию звука. В результате часть приращения функции $\bar n$ зависит от фаз собственных колебаний электрического поля и при попытке провести усреднение по этим фазам оказывается непредсказуемой. Предположим, что в некоторый момент времени t_0 возмущение плотности было известно, и выясним, как долго можно следить за его эволюцией, не зная фаз колебаний поля при $t = t_0$. Для этого выделим из $\bar n$ часть ζ, представляющую собой звуковое возмущение, порожденное после t_0, и включим её в $\tilde n$. Оставшаяся часть, которую по-прежнему будем обозначать через $\bar n$, удовлетворяет уравнениям (20), (16). Нетрудно показать, что оценки продуктивности источника звука и вероятности рассеяния плазмонов на возмущении $\tilde n$ остаются такими же, как в разделе 3. Время рассеяния становится порядка единицы при $|\tilde n|^2 \sim g$, а $|\tilde n|^2$ достигает значения g за промежуток $\Delta t \sim 1$. После этого не учитывать рассеяние можно лишь в том случае, когда оно не меняет спектра плазмонов. Последнее условие выполняется, если близкие собственные частоты движутся сообща, так как тогда спектр остается эргодическим. В данном случае уравнением (20) с постоянными N_p можно пользоваться до тех пор, пока продолжительность жизни плазмонов не станет порядка обратной ширины их распределения по частоте - g . Оценка соответствующего промежутка времени Δt зависит от устойчивости решения уравнения (20) относительно малых возмущений: если они экспоненциально растут, то $\Delta t \sim \ln g^{-1}$, если же рост вызывается только действием источника звука, то $\Delta t \sim g^{-1}$. Помимо рассеяния на звуке, числа N_p могут изменяться вследствие переходов между близкими уровнями, вызванных непостоянством $\bar{n}$. Однако этот процесс является диффузионным и на рассматриваемых временах не существенен.

Заметим, что все перечисленные условия применимости уравнения (20) относятся и к уравнениям работы [I]. Последние пригодны только в адиабатическом случае и, если учесть это обстоятельство, получаются из (I6), (20) в квазиклассическом пределе. Они, как и (20), не описывают генерации звука биениями электрического поля. Связанные с этим ограничения являются еще более жесткими, чем для (20), поскольку длинноволновые возмущения эволюционируют медленно, а оценка времени Δt нарастания звука остается такой же, как и выше, причем, по прошествии этого времени характер решения существенно меняется: оно перестает быть длинноволновым. Так например, в квазиклассической модели ленгмюровского коллапса [8] возмущение плотности успевает измениться, не выходя за границы применимости используемых уравнений, менее, чем в $g^{-\alpha}$ раз, где $\alpha \ll 1$ - параметр квазиклассичности. Это число больше единицы при $\alpha > (\ln g^{-1})^{-1}$

5. Заключение

Учет основных нелинейных процессов - рассеяния плазмонов на флуктуациях плотности и генерации звука биениями электрического поля - показывает, что линейная теория модуляционной неустойчивости, строго говоря, не имеет области применимости: время рассеяния сравнивается с обратным инкрементом прежде, чем неустойчивые возмущения успевают оторваться от своего источника. Практически пользоваться соотношениями линейной теории можно, если рассеяние не меняет спектра плазмонов, т.е. если он изотропен.

Важность этого случая обусловлена изотропизацией спектра при рассеянии.

Заметим, что уравнения раздела 3, из которых следуют эти выводы, представляют интерес и вне связи с теорией модуляционной неустойчивости: они дают корректное описание адиабатического взаимодействия ленгмюровских волн с ионнозвуковыми без предположения о малости перенормировки частоты последних.

Если уровень модуляционных возмущений высок, статистическое описание ленгмюровской турбулентности строится на основе разложения электрического поля по собственным модам. Возникающие при этом уравнения (I6), (20) являются прямым обобщением исходных уравнений работы [I] на случай произвольного пространственного масштаба возмущений плотности плазмы. Условия применимости уравнений (I6), (20), сформулированные в разделе 4, оказываются весьма жесткими, но все же более мягкими, чем у их квазиклассических аналогов. Это позволяет извлечь из системы (I6), (20) некоторую полезную информацию, недоступную в приближении геометрической оптики. Подробнее данный вопрос будет рассмотрен отдельно.

Автор признателен Б.Н.Брейзману за критическое прочтение рукописи.

Литература

I. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков, ДАН СССР, I59, 767, 1964.

2. В.Е.Захаров, ЖЭТФ, 62, I745, I972.

3. Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин, ЖЭТФ, 79, вып.3 (9), I980.

4. H.W. Wyld. Ann. of. Phys., 14, 143, 1961.

5. В.Е.Захаров, В.С.Львов, Изв.вузов - Радиофизика, I8, № I0, I470, I975.

6. В.Паули. Общие принципы волновой механики. М.-Л. ОГИЗ, I947, стр.I39.

7. В.Е.Захаров, Изв.вузов - Радиофизика, I7, № 4, 43I, I974.

8. B.N. Breizman. Proc. of XIV Int. Conf. on Phen. in Ionized Gases. Grenoble, 1979, vol. II, p. 563

Работа поступила - 5 июня 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати I0.07.80г. МН 06275
Усл. I,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж I70 экз. Бесплатно
Заказ № I58

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР