СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

8

В.Е.Теряев

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ФЕРРОМАГНЕТИКОМ

ПРЕПРИНТ 80-160

Новосибирск

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ФЕРРОМАГНЕТИКОМ

В.Е.Теряев

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена методика расчета магнитного поля в аксиально-симметричных системах с железом. Использован метод вторичных источников. Нелинейность кривой намагничивания учитывается разбиением объема железа на кусочно-однородные элементы. По этой методике создана расчетная программа. Точность расчета полей в тестовых задачах достигает $2 \cdot 10^{-3}$.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ФЕРРОМАГНЕТИКОМ

В.Е.Теряев

1. Метод вторичных источников.

Различные методы расчета магнитных полей с железом при дискретизации требуют покрывать рассматриваемую область сеткой. В интегральном прямом методе сетка строится только в области занятой железом [1] . В описанном ниже интегральном методе вторичных источников сеткой при $\mu = const$ достаточно покрыть лишь поверхность железа и, следовательно, при этом же числе дискретных элементов иметь их более мелкими, получая лучшую точность. Однако, для систем с насыщенным железом и данный метод требует разбиения области железа на элементы, что снижает его преимущества. В любом случае различные методы расчета дополняют друг друга и имеют оптимальные области применения.

Метод вторичных источников основан на замещении границы реального магнитопровода модельной поверхностью с линейной плотностью тока σ , где σ ищется из условия того, чтобы поля в модели соответствовали полям в реальной системе [2] . Наша задача – расчет аксиально-симметричных полей. Рассмотрим касательные к поверхности раздела компоненты полей слева $H_л$, $B_л$ и справа $H_п$, $B_п$. Поверхность разделяет области с разными магнитными проницаемостями $\mu_л$ и $\mu_п$, рис.1. По закону полного тока $H_п = H'' - \sigma/2$, $H_л = H'' + \sigma/2$,где $H'' = \int_\Omega \sigma \, d\Omega + H_{вн}$ – – суммарное поле на границе от всех элементов с поверхностным током и от внешних витков с током, рис.2. В соответствии с тем, что в реальной системе $B_л/\mu_л = B_п/\mu_п$, потребуем, чтобы и в модели $H_л/\mu_л = H_п/\mu_п$. Тогда найдем:

$$\sigma = 2\frac{\mu_п - \mu_л}{\mu_п + \mu_л}\left(\int_\Omega \sigma \, d\Omega + H_{вн}\right) . \qquad (1)$$

2. Расчетная модель.

Для разрешения интегрального уравнения (1) относительно источников σ принята следующая дискретная модель Линия раздела областей с разными μ разбивается на N направленных элементов. Плотность тока в пределах каждого элемента считается постоянной. Тогда вместо (1) получим систему линейных уравнений.

$$D_i \sum_{j=1}^{N} \sigma_i G_{ij} - \sigma_i = - D_i \cdot H_{вн\, i} \;, \quad i = 1, 2, \ldots N, \qquad (2)$$

или в матричном виде $(D \cdot G - I)\sigma = - D \cdot H_{вн}$.

Здесь: $D_i = 2 \dfrac{\mu_{ni} - \mu_{\Lambda i}}{\mu_{ni} + \mu_{\Lambda i}}$; I – единичная матрица;

$$G_{ij} = G_{r\,ij} \cdot \cos\varphi_{r\,i} + G_{z\,ij} \cdot \cos\varphi_{z\,i} \qquad , \qquad i \neq j \quad ;$$

$$G_{\substack{r\\z}\,ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\ell_j} g_{\substack{r\\z}\,ij}\, d\ell_j \quad ;$$

$$g_{r\,ij} = \frac{\Delta Z_{ij}}{R_i \sqrt{(R_j + R_i)^2 + \Delta Z_{ij}^2}} \left[-K(k) + \frac{R_j^2 + R_i^2 + \Delta Z_{ij}^2}{(R_j - R_i)^2 + \Delta Z_{ij}^2}\, E(k) \right] \quad ;$$

$$g_{z\,ij} = \frac{1}{\sqrt{(R_j + R_i)^2 + \Delta Z_{ij}^2}} \left[K(k) + \frac{R_j^2 - R_i^2 - \Delta Z_{ij}^2}{(R_j - R_i)^2 + \Delta Z_{ij}^2}\, E(k) \right] \quad ;$$

$$k = 1 - \varkappa^2 \;; \quad \varkappa = \frac{4 R_j R_i}{(R_j + R_i)^2 + \Delta Z_{ij}^2} \;; \quad \Delta Z_{ij} = Z_i - Z_j \quad ;$$

$$H_{вн\, i} = \frac{1}{2\pi} \sum_{K} J_K \left(g_{r\,iK} \cdot \cos\varphi_{r\,i} + g_{z\,iK} \cdot \cos\varphi_{z\,i} \right) ;$$

Обозначения следующие:

G_{ij} – касательная компонента поля в середине i –го участка от j –го элемента с единичной плотностью тока;

$G_{\substack{r\\z}\,ij}$ – R и Z компоненты полей в середине i –го элемента

$\cos\varphi_{r\,i}, \cos\varphi_{z\,i}$ – направляющие косинусы i –го элемента;

z_i, R_i – координаты середины i –го элемента;

z_j, R_j – текущие координаты j –го элемента;

ℓ_j – длина j –го элемента;

$g_{\substack{z\\r}}/2\pi$ – Z и R компоненты поля витка с единичным током;

$K(k), E(k)$ – эллиптические интегралы 1–го и 2–го рода;

$H_{вн\, i}$ – касательная компонента поля внешних витков с током

J_K – ток K –го витка.

3. Диагональные элементы

Точность решения системы (2) зависит в большой степени от правильного нахождения диагональных элементов G_{ii} , а они находятся интегрированием функции, содержащей особенность логарифмического типа. Аналогичная проблема возникает в электростатической задаче [3] . Формула для нахождения диагональных элементов имеет вид:

$$G_{ii} = \frac{\cos\varphi_{z\,i}}{2\pi} \left\{ \int_{-\ell_i/2}^{\ell_i/2} \left[C \cdot P(k) - F \cdot E(k) + \frac{\ln A}{4R_i} \left(C \cdot Q(k) - \frac{1}{4R_i} \right) \ln k \right] d\ell - \right. \qquad (3)$$
$$\left. - \frac{\ell_i}{2R_i} \left(\ln \frac{\ell_i}{2} - 1 \right) \right\} .$$

Здесь:

$$C = R / R_i \sqrt{A} \quad ; \quad A = (R + R_i)^2 + (Z - Z_i)^2 \quad ;$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ \frac{\cos\varphi_{r\,i}}{R_i} \left[R \cdot \cos\varphi_{r\,i} + (Z - Z_i) \cdot \cos\varphi_{z\,i} \right] + \cos^2\varphi_{z\,i} \right\} ;$$

$$K(k) = P(k) - Q(k) \ln k \;; \qquad k = \frac{(Z - Z_i)^2 + (R - R_i)^2}{A} \; .$$

Обозначения:

R, Z – текущие координаты элемента;

$P(k), Q(k)$ – полиномы [4] апроксимирующие $K(k)$.

Остальные обозначения те же, что и выше.

Для интегрирования (3) выбрана 20-ти точечная квадратурная формула Гаусса.

4. Насыщенный ферромагнетик

Нелинейность кривой намагничивания приводит к появлению $\mathrm{grad}\,\mu(H)$ в объеме материала. В методе вторичных источников это учитывается введением объемных токов [2]. Но если считать среду кусочно-однородной по μ, то остается в силе выше рассмотренная модель с поверхностными токами, помещенными на границы раздела областей с разными $\mu[H]$. Приемлемая точность расчета поля может быть достигнута достаточно мелким разбиением объема материала на однородные области. Процесс нахождения источников σ –итерационный, причем $\mu_п$ и $\mu_л$ зависят от среднего H найденного для правой и левой области на предыдущей итерации.

5. Расчетная программа

Согласно описанной методике разработана программа на фортране для ЭВМ Одра 1305. Программа рассчитывает величины поверхностных токов σ для аксиально-симметричных ферромагнитных систем и заносит их вместе с координатами соответствующих поврехностных элементов в назначенный файл. откуда эти данные могут быть взяты программами для построения картин силовых линий, расчета траекторий заряженных частиц и т.д.

Исходные данные следующие:

1) Описание геометрии железа. Допускается задание отрезков прямых и дуг в виде координат начала, конца отрезка, радиуса дуги.

2) Количество элементов разбиения отрезка.

3) Топология – номер правой и левой, относительно отрезка, области.

4) Координаты и размер внешних колец с током.

5) Координаты отрезков, представляющих собой сечение внешних токовых поверхностей.

6) Внешнее осевое однородное поле

7) Число итераций, начальная магнитная проницаемость, кривая намагничивания в виде таблицы $B(H)$.

Программа допускает N = 200 суммарное число элементов разбиения. Система линейных уравнений решается методом оптимальных исключений, требующем машинной памяти $N^2/4$. Подпрограмма решения системы составлена П.Л.Храпкиным.

6. Тесты и точность.

Программа проверялась на тестах – шар, эллипсоид, сфера из железа с μ = 1000 в однородном магнитном поле B_{z0}.

1. Внутри шара поле однородно $B_z = B_{z0}\frac{3\mu}{2+\mu}$, B_r = 0. При N = 40, программа дает однородность поля с точностью 10^{-6}. Ошибка в определении B_z – + 1,5%. Радиальная компонента отлична от нуля на величину $10^{-5}\cdot B_z$. Время решения ~ 1 мин. Время на расчет поля в одной точке ~ 0,5 сек.

2. Внутри шара при N = 196. Однородность 10^{-6}, ошибка B_z – + 0,2 %, B_r = $10^{-6}\cdot B_z$. Время решения ~ 12 мин. Время на расчет поля в одной точке ~ 1сек

3. Внутри эллипсоида с осями a и в поле должно быть однородным, а B_r = 0. При N = 46 и $a/в$ = 10 однородность поля 10^{-4}, ошибка + 1,5 % B_r = $10^{-4}\cdot B_z$.

4. Внутри эллипсоида a/b = 5 при N = 46, однородность 10^{-4}, ошибка – 1%, $B_r = 10^{-4} \cdot B_z$.

5. Внутри толстостенной сферы R_1/R_2 = 2, μ = 1000, коэффициент экранирования должен быть $2 \cdot 10^{-3}$. При N = 180, программа дает $B_z/B_{z0} = 2 \cdot 10^{-2}$, рис.3.

Для реальной кривой намагничивания (сталь 3) рассматривалась задача – конус в сильном однородном поле, рис.4. Сходимость итерационного процесса по величине поля показана на рис.5.

Описанная программа использовалась при проектировании магнитных отклоняющих систем. Рассматривалось два варианта систем. Один – в виде перефокусирующей линзы, рис 6, другой в виде штыревой отклоняющей системы, предложенной в [5], рис 7.

Автор выражает благодарность С.Н.Морозову за постановку задачи и полезные обсуждения.

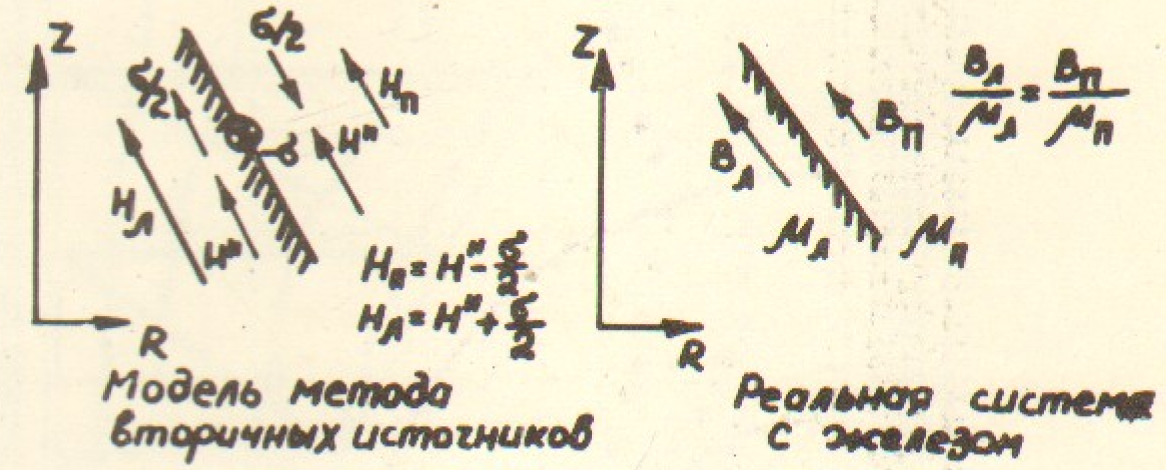

Рис.1

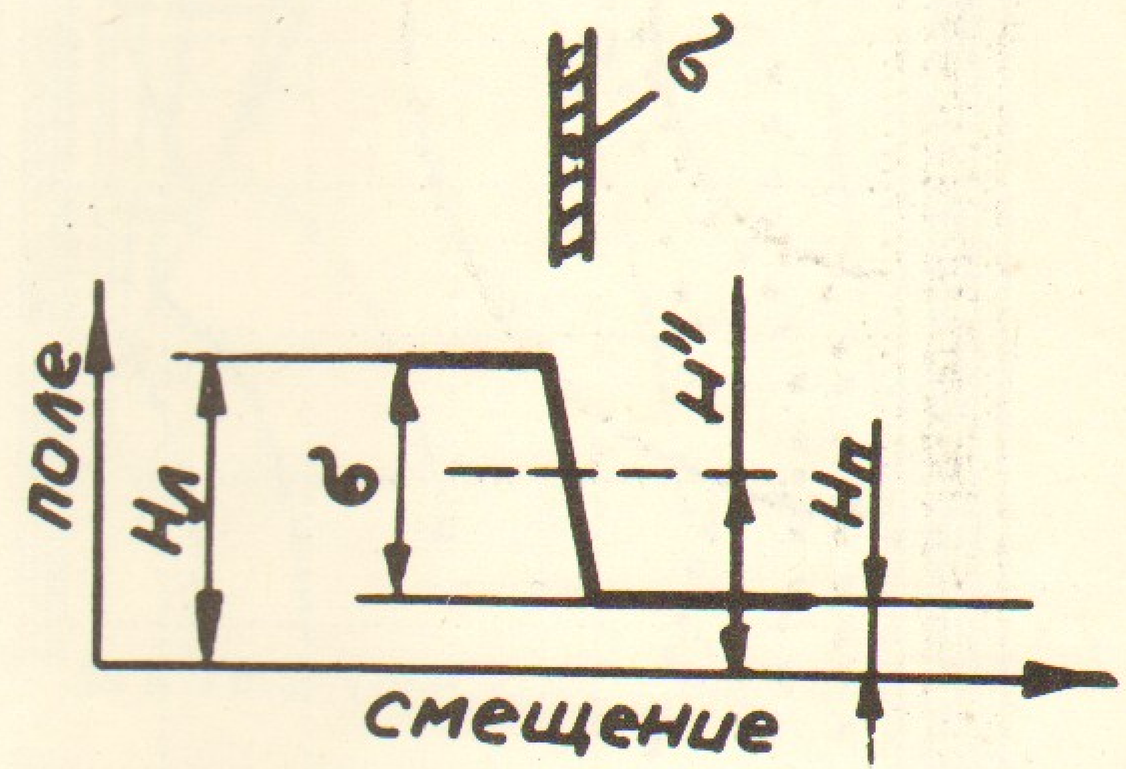

Рис.2.

Изменение полей при пересечении токовой поверхности.

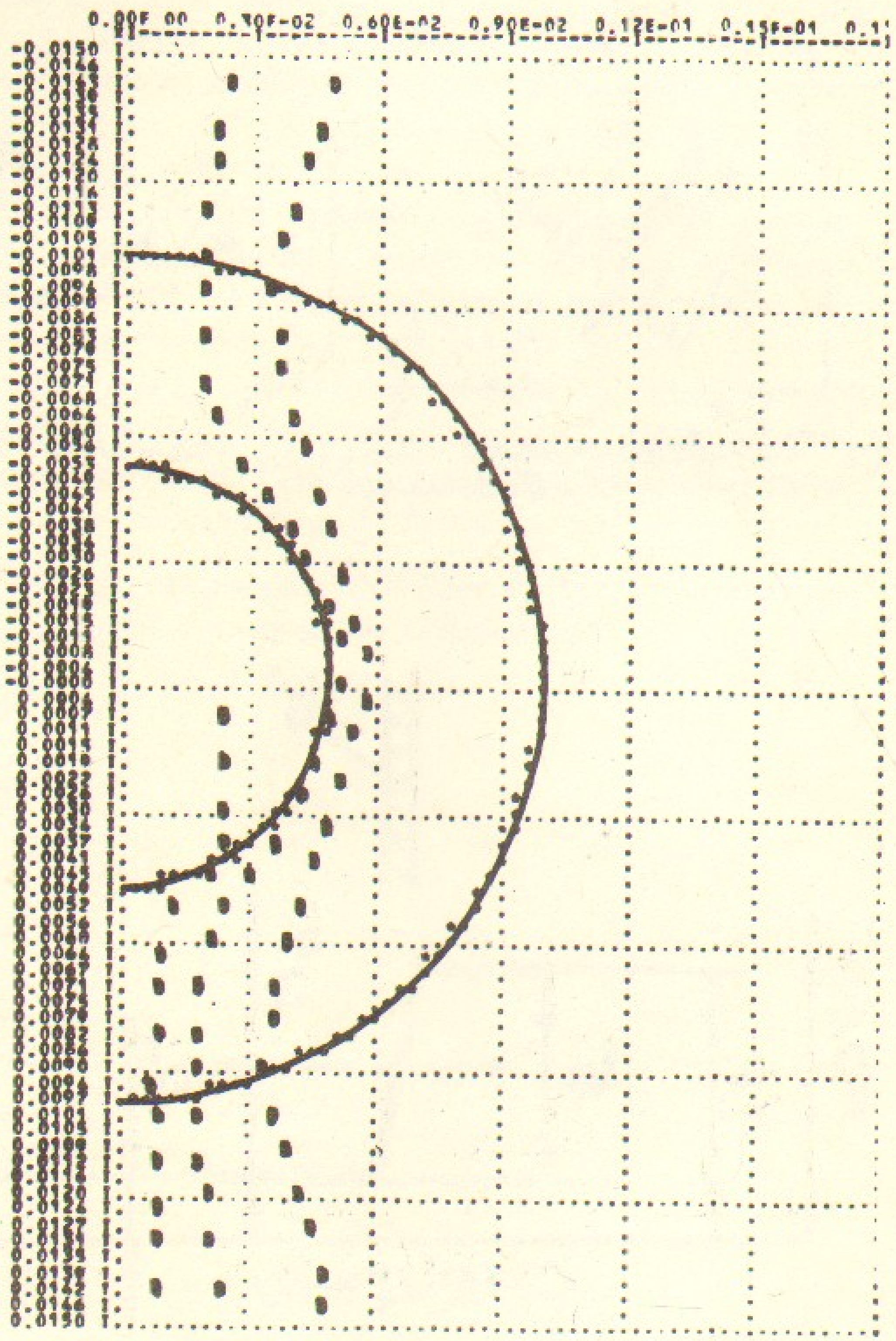

Рис.3. Сфера в однородном магнитном поле. Силовые линии поля.

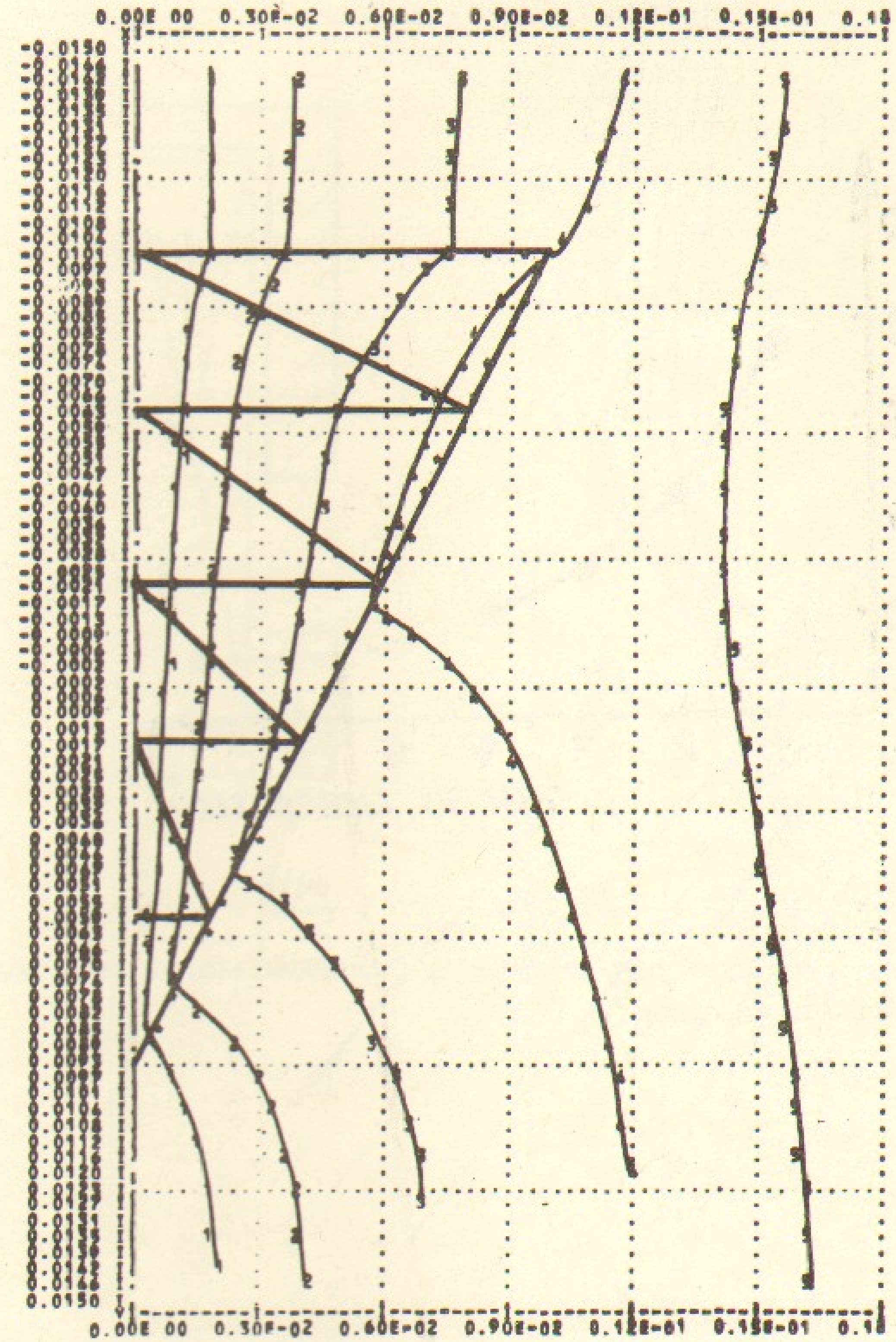

Рис.4. Конус в сильном однородном магнитном поле. Силовые линии. Показаны элементы разбиения.

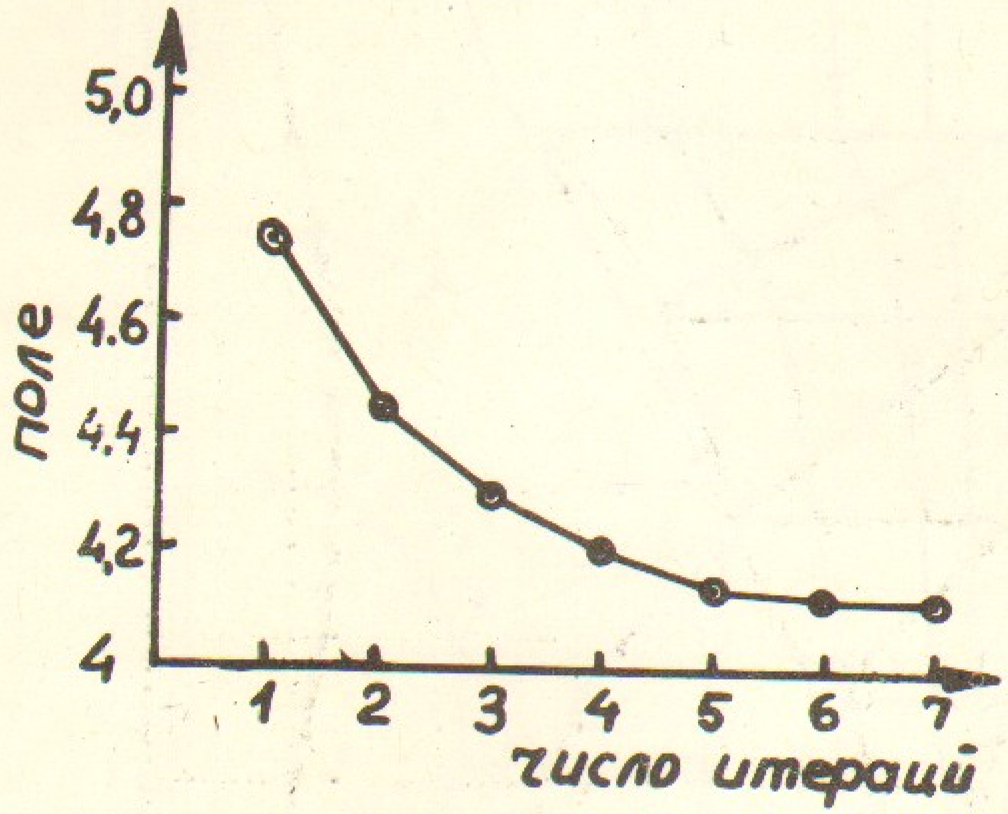

Рис.5.

Сходимость итераций для конуса в сильном магнитном поле. Коэффициент релаксации 0,75.

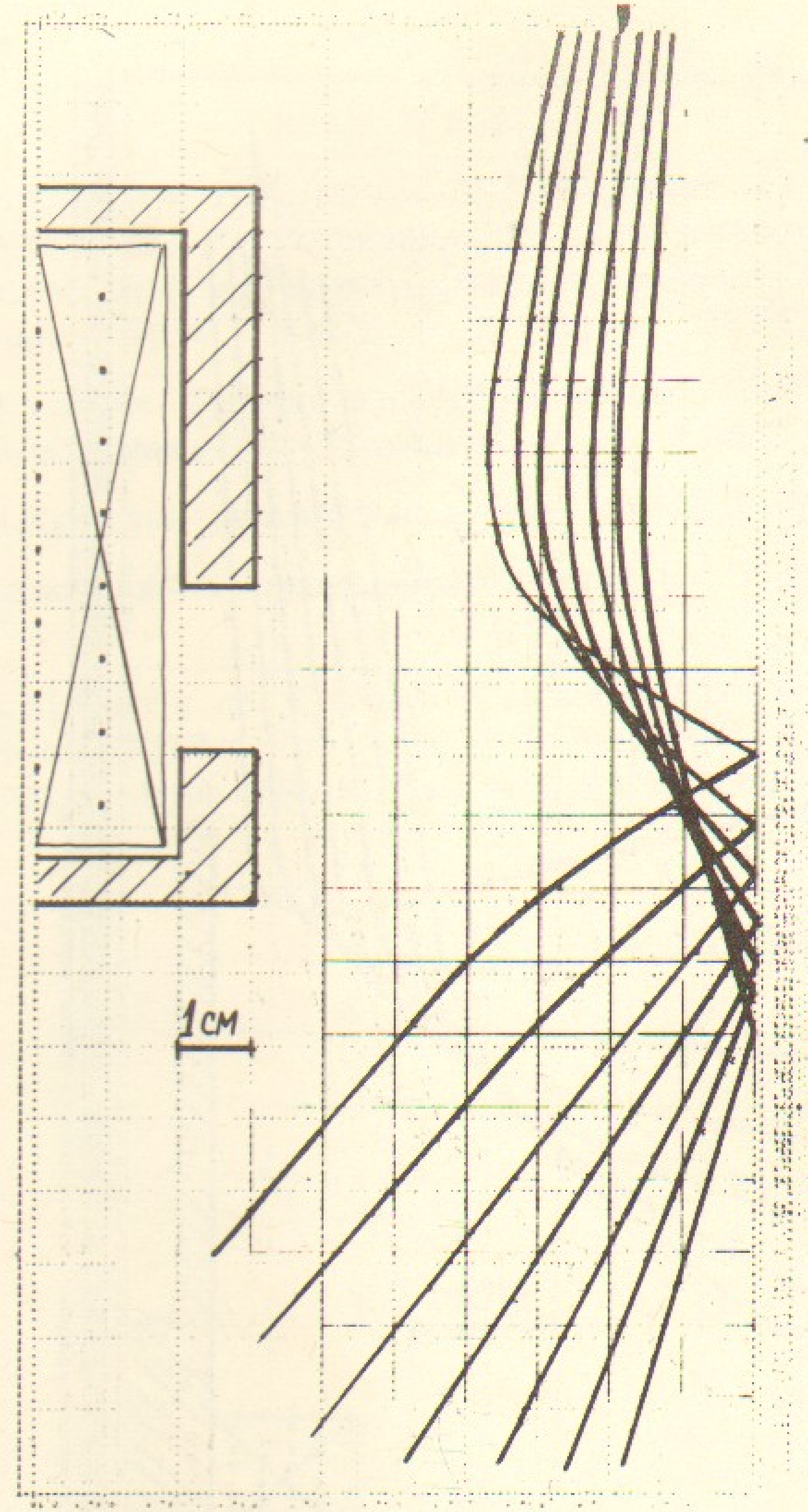

Рис.6. Траектории электронов в короткофокусной магнитной линзе. Отклоняющая система.

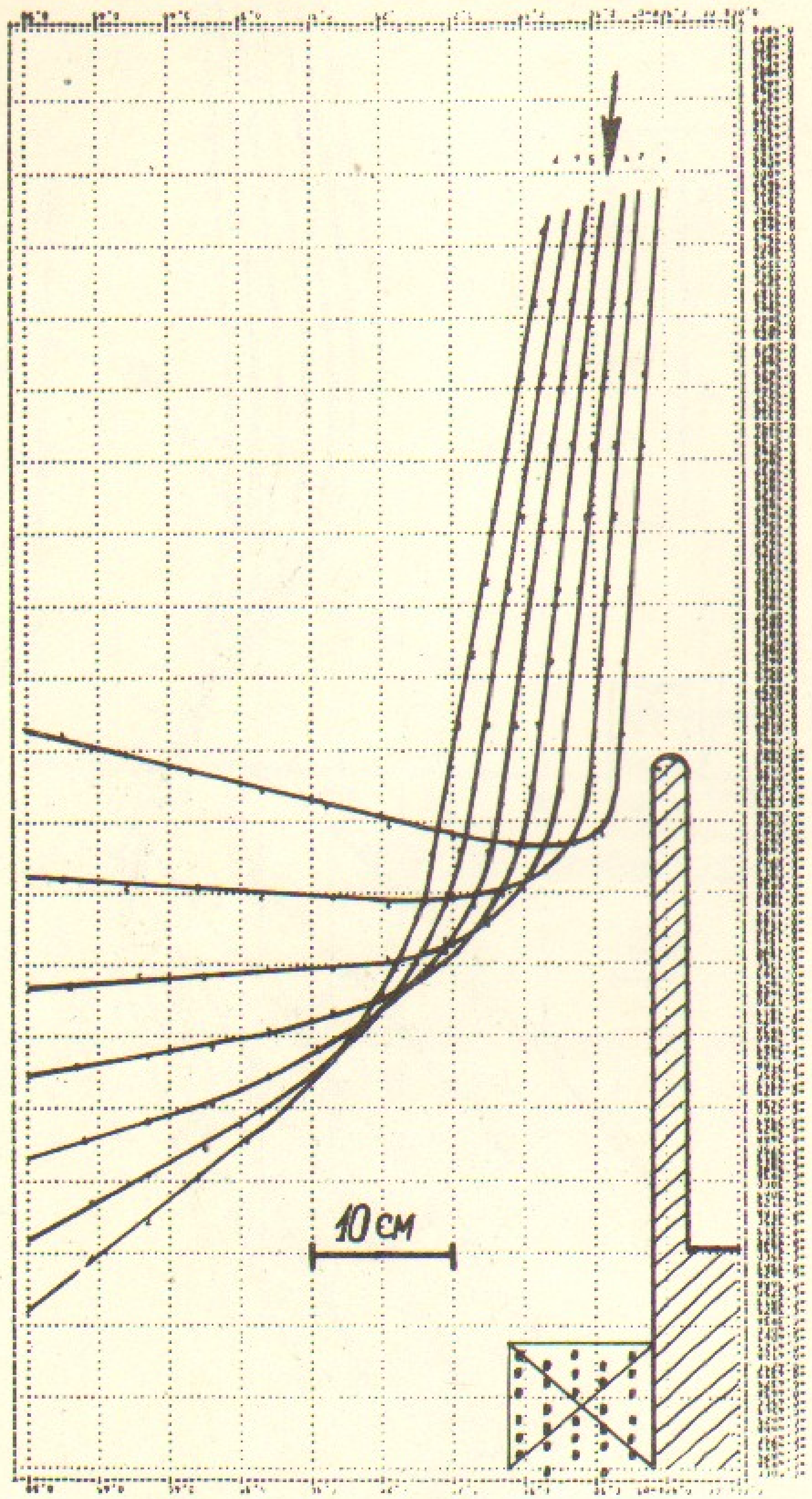

Рис. 7. Траектории электронов в магнитной штыревой отклоняющей системе.

Литература

1. А.Н.Алешаев, В.А.Дзюба, М.М.Карлинер, П.Б.Лысянский, Б.М.Фомель. Регуляризация прямого метода вычисления стационарных магнитных полей в системах с железом. Препринт ИЯФ 79–95, Новосибирск, 1975.
2. О.В.Тозони. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. "Техника", Киев, 1967.
3. П.Л.Храпкин. Дипломный проект. ИЯФ, 1975.
4. Справочник по специальным функциям. "Наука", Москва, 1979.
5. Г.И.Будкер и др. Гирокон – мощный СВЧ генератор с высоким КПД. Препринт ИЯФ 78–9, Новосибирск, 1978.