Работа поступила - 8 августа 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 25.УШ-1980г. МН 06880
Усл. I,2 печ.л., I,0 уч.изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 170.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОХЛАЖДЕНИЯ И НАКОПЛЕНИЯ

ПРЕПРИНТ 80-170

Новосибирск

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО
ОХЛАЖДЕНИЯ И НАКОПЛЕНИЯ

В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков

АННОТАЦИЯ

В работе приведены результаты численного моделирования охлаждения энергетического разброса пучка частиц с использованием систем обратной связи (т.н.стохастического охлаждения) и накопления частиц с использованием этого метода. Проведено моделирование охлаждения системами с линейной и кубической зависимостью силы трения от отклонения энергии частицы от равновесного значения. Скорость охлаждения ограничивается взаимным влиянием частиц пучка. Наличие когерентной неустойчивости из-за взаимодействия пучка с демпфирующей системой ограничивает скорость накопления.

I. ВВЕДЕНИЕ

Предложенный С.Ван-дер-Меером[1] метод стохастического охлаждения основан на использовании широкополосных систем обратной связи для охлаждения пучков тяжелых частиц. В простейшем случае такая система может состоять из пикап-электрода, измеряющего отклонения частицы от положения равновесия, соединенного через широкополосный усилитель с элементом, корректирующим это отклонение. Наведенный частицей сигнал задерживается цепью обратной связи таким образом, чтобы он приходил на корректирующий элемент одновременно с частицей. В работах Я.С.Дербенева и С.А.Хейфеца[2,3] было показано, что эффект охлаждения полностью обусловлен самодействием частицы, то-есть взаимодействием с полями, возбужденными частицей через систему обратной связи.

Теоретический анализ метода осложняется необходимостью учета взаимного влияния частиц пучка через демпфирующую систему. Здесь, как нам кажется, имеется две трудности.

Первая связана с требованием когерентной устойчивости пучка, необходимым для описания эволюции распределения частиц в фазовом пространстве с помощью уравнения типа уравнения Фоккера-Планка (как, например, в /2/ ÷ /5/). В практически интересной области параметров,формально вычисленные величины декрементов когерентных колебаний, вносимых системой обратной связи, могут приближаться к частоте обращения частиц в машине. Применение в таких условиях традиционных методов исследования когерентной устойчивости пучка, использующих теорию возмущений, может привести к ошибочным выводам.

Вторая трудность связана со сложной структурой самого кинетического уравнения (см.например в /3/), коэффициенты которого зависят от распределения части в охлаждаемом пучке.

Целью настоящей работы является численное моделирование эффекта стохастического охлаждения, а также накопление частиц с использованием этого метода.

II. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Рассмотрим охлаждение энергетического разброса азимутально однородного пучка с помощью системы, изображенной на рис.I.

Проходя пикап-электрод, частица наводит сигнал, пропорциональный ее отклонению по энергии от равновесного значения. Через широкополосный усилитель этот сигнал подается на ускоряющий зазор одновременно с приходом частицы. Таким образом изменение ее энергии после прохождения зазора равно:

$$\delta(\Delta E) = -\alpha\Delta E, \qquad (1)$$

где α определяется чувствительностью пикапа, коэффициентом усиления усилителя и другими характеристиками цепи обратной связи, ΔE – отклонение энергии частицы от равновесного значения.

Если f_0 частота обращения частицы, то согласно (I) декремент затухания для отдельной частицы

$$\lambda = \alpha f_0 \qquad (2)$$

растет пропорционально α.

Рассмотрим ограничения на величину декремента связанные с взаимодействием между частицами. Время действия сигнала на ускоряющем зазоре определяется полосой пропускания (W) цепи обратной связи (пикап-электрод, усилитель, ускоряющий зазор). В настоящее время наибольшие трудности связаны с созданием достаточно широкополосных усилителей с большой мощностью на выходе.

Длительность импульса напряжения на зазоре:

$$\tau \simeq \frac{1}{W}$$

определяет число частиц пучка, действующих на данную частицу:

$$\overset{*}{N} = N\tau f_0 = \frac{N}{n} \qquad (3)$$

где N – число частиц в пучке, а $n = W/f_0$ число гармоник частоты обращения в полосе пропускания W.

Число оборотов, в течение которых пара частиц взаимодействует через систему обратной связи, равно:

$$\nu_{ik} = f_0\Delta t_{ik} = f_0\tau\left(\frac{f_0}{\Delta f_{ik}}\right) = \left[\frac{n\,\Delta f_{ik}}{f_0}\right]^{-1}, \qquad (4)$$

где Δf_{ik} расстояние по частоте между частицами i и k.

Изменение энергии частицы i за счет взаимодействия с частицей k за время Δt_{ik} равно:

$$\delta(\Delta E_i) = -\alpha\nu_{ik}\Delta E_k \qquad (5)$$

Воздействие частицы k на остальные частицы пучка приводит к компенсации сигнала, наводимого частицей k на пикап-электроде из-за смещения энергии остальных частиц в соответствии с (5). С учетом этого вынужденного движения можно написать уравнение (I) во втором приближении:

$$\delta(\Delta E_k) = -\alpha\left(\Delta E_k + \sum\delta(\Delta E_i)\right) \approx -\alpha\Delta E_k\left(1-\alpha\overset{*}{N}\nu\right), \qquad (1.a)$$

где ν отличается от ν_{ik} заменой Δf_{ik} на разброс частот в пучке Δf. Повторение итеррационной процедуры в (I.a) с учетом (5) позволяет приближенно написать:

$$\delta(\Delta E_k) \simeq -\alpha\Delta E_k\left(1-\alpha\overset{*}{N}\nu\left(1-\alpha\overset{*}{N}\nu(1-\dots)\right)\right) = \qquad (6)$$

$$= -\frac{\alpha}{1+\alpha\overset{*}{N}\nu}\Delta E_k = -\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha N}{n^2}\left(\frac{f_0}{\Delta f_0}\right)}\Delta E_k.$$

При этом декремент определяется выражением:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1+\frac{\lambda_0 N}{\Delta f\, n^2}}, \qquad (7)$$

где $\lambda_0 = \alpha f_0$ величина декремента отдельной частицы.

Из (7) видно, что за счет усиления взаимного влияния частиц в процессе охлаждения значение декремента λ ассимитотически ограничивается величиной:

$$\lambda_{max} = \frac{n^2\Delta f}{N} = \frac{W}{N\nu} \qquad (8)$$

Следует, однако, заметить, что λ, во всяком случае меньше меньшего из λ_0 и λ_{max}. Поэтому уменьшение коэффициента обратной связи α после достижения :

$$\frac{\Delta f}{f_0} \sim \frac{\alpha N}{n^2}$$

не дает выигрыша в скорости охлаждения пучка. Этим формула (7) отличается от результатов работ /4,5/, где делается вывод о существовании оптимального коэффициента усиления для охлаждения N частиц.

Как видно из предыдущего, рассмотренное ограничение декремента связано с экранированием частицы k остальными частицами пучка.

Другое ограничение связано с собственным движением частиц, которое также приводит к изменению энергии данной частицы. Уравнение для среднеквадратичного значения отклонения по энергии с учетом этого влияния можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\Delta E_k^2 = -2\alpha f_0 \Delta E_k^2 + \alpha^2 f_0 \nu \sum_{i=1}^{\overset{*}{N}} \Delta E_i^2 \approx \tag{9}$$

$$\approx -2\alpha f_0 \left(\Delta E_k^2 - \frac{\alpha \nu \overset{*}{N}}{2}\langle \Delta E^2\rangle\right),$$

скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение с функцией распределения.

Может показаться, что уравнение (9) описывает саморазогрев пучка под действием тепловых шумов пучка. Это, однако, зависит от характера распределения частиц по энергиям. Так, для термодинамически равновесного распределения частиц, с учетом эффекта экранировки (6), уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\langle \Delta E^2\rangle \approx -2\lambda \langle \Delta E^2\rangle \frac{1 + \frac{\alpha \overset{*}{N} \nu}{2}}{1 + \overset{*}{N}\alpha\nu} \tag{9a}$$

Отсюда видно, что равновесное распределение к саморазогреву пучка не приводит.

Если же имеется две группы частиц отстоящих по энергии друг от друга на расстояние ΔE существенно превышающем разброс по энергиям в этих группах $\Delta E^2 \gg \langle \Delta E^2\rangle$, то происходит довольно быстрый разогрев этих групп.

Как видно из (9) ограничение декремента за счет этого эффекта практически совпадает с (8).

Еще одно ограничение на величину α связано с требованием когеретной устойчивости пучка. Если пучок совершает когерентные колебания с амплитудой ΔE, то изменение положения центра тяжести пучка за оборот есть:

$$\Delta E(m\cdot T_0 + T_0) = \Delta E(m\cdot T_0)\left(1 - \alpha \overset{*}{N}\right) \tag{10}$$

или

$$\Delta E(mT) = \Delta E(0)\left(1 - \alpha\overset{*}{N}\right)^m$$

Отсюда видно, что для устойчивости когерентных колебаний необходимо, чтобы

$$\alpha < \frac{2}{\overset{*}{N}} = \frac{2n}{N} \tag{11}$$

Любопытно отметить, что при $\alpha = 1/\overset{*}{N}$ когерентные колебания в пучке затухают за один оборот. В таких условиях азимутальные моды функции распределения частиц сильно связаны и традиционные критерии устойчивости оказываются не применимы. Одночастичный декремент в этом случае

$$\lambda < \frac{n f_0}{N} = \frac{W}{N} \tag{12}$$

Последнее ограничение фактически определяет скорость накопления в установках со стохастическим охлаждением. Для накопления необходимо, чтобы за время между инжекциями τ_0 вновь инжектированные частицы успевали бы затухать. Это требует вполне определенного коэффициента обратной связи $\alpha = (\tau_0 f_0)^{-1}$. Следовательно, после накопления

$$N = N_{th} = 2W\tau_0 \tag{13}$$

частиц в пучке возникает когерентная неустойчивость. Для дальнейшего накопления необходимо увеличить время между инжекциями τ_0 и соответственно уменьшить величину α. Скорость накопления в этом случае зависит от числа уже накопленных частиц и составляет:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\Delta N}{\tau_0} = \frac{\Delta N}{N} 2W, \tag{14}$$

где ΔN число инжектируемых частиц. Число частиц, накопленных за время t получается интегрированием (14)

$$N(t) = 2\sqrt{W \cdot t \cdot \Delta N} \tag{15}$$

и, если длительность цикла ускорителя инжектора τ_1, то доля использованных частиц

$$k = 2\sqrt{\frac{\tau_1 W}{\Delta N}\left(\frac{\tau_1}{t}\right)}$$

уменьшается с увеличением времени накопления .

Второй путь увеличения числа накопленных частиц был предложен в ЦЕРН /6/ и основан на уменьшении коэффициента обратной связи α к центру области накопления. В этом случае уравнения движения частиц становятся нелинейными и их анализ наталкивается на значительные трудности. Поэтому было предпринято численное моделирование процесса стохастического затухания и накопления частиц.

III. Описание модели

Для численного анализа использовалась следующая модель. Азимутально-однородный пучок разбивался на группы азимутальной протяженности $\Delta\theta = 2\pi/n$, где n число разбиений. Сигнал коррекции скорости продольного движения частицы данной группы определялся суммой сигналов от всех частиц этой группы в соответствии с выражением:

$$\Delta f_k^{(m)} = \Delta f_k^{(m-1)} - \sum_{i=1}^{N} \alpha(\Delta f_i^{(m-1)})\Delta f_i^{(m-1)} + \left\langle \sum_{i=1}^{N} \alpha(\Delta f_i^{(m-1)}) \cdot \Delta f_i^{(m-1)} \right\rangle_n \tag{16}$$

$$\Delta\theta_i^{(m)} = \Delta\theta_i^{(m-1)} + B\,\Delta f_i^{(m-1)} .$$

Здесь m - нумерует иттерации, i и k находятся в пределах данной группы, скобки $\langle\ \rangle_n$ означают усреднение по

группам частиц. Вычитание среднего отвечает невозможности измерения пикап-электродом постоянного тока. Импульс напряжения, действующий на частицы схематически изображен на рис.2.

Принадлежность частицы к группе определялась азимутальным положением θ и при изменении θ частица могла переходить из группы в группу.

Начальные условия для частиц задавались с помощью датчика случайных чисел. Начальные значения θ распределялись в интервале $(0,2\pi)$, а начальные значения частот Δf распределялись в пределах, которые могли изменяться.

В ходе вычислений прослеживалась эволюция распределения частиц по частотам Δf и число частиц в пучке. При значениях отклонения частоты обращения $|\Delta f| > \Delta f_{max}$ частица исключалась из счета, что соответствует достижению апертурного предела. При добавлении новой порции частиц, частицы пучка имеющие Δf в области инжекции также исключались.

IУ. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для уточнения результатов оценок влияния экранирования, диффузии и когерентной устойчивости на процесс стохастического охлаждения было проведено моделирование с линейной силой трения, когда коэффициенты $\alpha(\Delta f)$ в уравнении (16) не зависят от Δf .

На рис.3 показана зависимость разброса частот обращения от числа оборотов (времени). Вычисления проводились при $\alpha = 0.1$ и различном числе частиц в пучке (соответственно N =1, 50, 100). Такое значение α соответствует затуханию отклонения энергии одной частицы в e раз за 10 оборотов и позволяет видеть основные эффекты с сравнительно небольшим числом частиц. Из рисунка видно, что в процессе охлаждения большого числа частиц скорость изменения разброса уменьшается. На рис.4 показано изменение декремента затухания в зависимости от величины разброса частот Δf при различном числе частиц в пучке. Зависимость декремента затухания от Δf хорошо соответствует формуле:

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{1 + \frac{\lambda_o N}{1.25 n^2 \Delta f}} \approx \begin{cases} \lambda_o \;, & \Delta f \gg \frac{\lambda_o N}{n^2} \\ \frac{1.25 n^2 \Delta f}{N} \;, & \Delta f \ll \frac{\lambda_o N}{n^2} \end{cases} \qquad (17)$$

Здесь λ_o одночастичный декремент. Это результат согласуется с выражением (7). Численный коэффициент 1.25 в формуле (17) определяется формой импульса напряжения на ускоряющем зазоре и может несколько изменяться при изменении частотной характеристики цепи обратной связи. Заметим также, что этот результат находится в хорошем численном согласии с данными, полученными в работе [7].

На рис.5 показано изменение характера движения центра тяжести распределения по частотам при увеличении числа частиц в пучке. Видно, что начиная с некоторого порогового значения

$$N > \frac{n}{\alpha} = \frac{W}{\lambda_o}$$

появляется раскачка положения центра тяжести.

В связи с задачей о накоплении частиц было также проведено моделирование процесса охлаждения для случая, когда коэффициент обратной связи α убывает к центру области накопления по квадратичному закону:

$$\alpha(\Delta E) = \alpha_o \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_o}\right)^2. \qquad (18)$$

На рис.6 (гистограмма б) приведено распределение частиц, полученное с таким коэффициентом α через 180 шагов. На том же рисунке (гистограмма в) приведено распределение частиц по частотам для случая линейного трения ($\alpha = \alpha_o$) (через 60 шагов). Видно, что особенностью затухания в нелинейном случае является наличие провала в распределении частиц по энергии в окресности обращения в нуль $\alpha(\Delta E)$.

С учетом (18) коэффициент обратной связи для когерентных колебаний определяется разбросом энергий в пучке, а условие устойчивости когерентных колебаний, аналогично (11), можно записать в виде:

$$\alpha_o \left(\frac{\Delta E}{\Delta E_o}\right)^2 \overset{*}{N} < 1 \qquad (11.a)$$

Отличие этого выражения от (11) заключается в зависимости порогового числа частиц от энергетического разброса в пучке, определяемого нагревающими факторами (шумы электроники, шумы от вновь инжектированной порции частиц).

При моделировании, внешняя диффузия определялась случайными толчками с прямоугольным распределением амплитуд. Было найдено, что под действием таких толчков в пучке устанавливается разброс по энергиям:

$$\Delta E^2 = 0.41\, \Delta E_o \sqrt{\frac{\langle \Delta E_T^2 \rangle}{\alpha_o}} \qquad (19)$$

где $\langle \Delta E_T^2 \rangle$ среднеквадратичная амплитуда толчков.

Предельное число частиц в этих расчетах определялось по возникновению незатухающих когерентных колебаний (что, как правило, сопровождалось гибелью части пучка) и составлялс:

$$N_{th} = 0.67 \frac{n}{\alpha_o^{3/2} \sqrt{\langle \Delta E_T^2 \rangle / \Delta E_o^2}} . \qquad (20)$$

Другим источником нагревания накопленного пучка является шум от вновь инжектированной порции частиц. На рис.7 показано расширение первоначально охлажденного пучка после инжекции новой порции частиц. В результате такого расширения появляется много частиц в области с большим коэффициентом усиления, что может приводить к появлению когерентной неустойчивости пучка. На рис.8 показан результат моделирования накопления частиц для случаев, когда коэффициент усиления (α) не зависит от ΔE и когда α квадратично уменьшается к центру области накопления. Коэффициент усиления на краю апертуры был одинаков и равен 0,15, что достаточно для ухода частиц из области инжекции за время между циклами. Видные на рис.8 потери частиц являются результатом возбуждения в пучке когерентных колебаний.

Зависимость предельного числа накопленных частиц от числа инжектированных частиц показана на рис.9. Влияние инжектированных частиц на накопленные, качественно, может быть описано коэффициентом диффузии:

$$\alpha_0^2 f_0 \, \Delta\overset{*}{N} \nu_{inj} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_0 f_0 \tau_1}\right) \qquad (21)$$

где $(\alpha_0 f_0 \tau_1)^{-1}$ – доля времени затухания τ во времени между инжекциями τ_1. Уменьшение числа накопленных частиц с ростом числа инжектированных ΔN находится в хорошем соответсивии с формулой, получающейся комбинированием (2I) и (II.а):

$$N_{th} \simeq \frac{n}{\alpha_0} \sqrt{\frac{\tau_1 f_0}{\Delta \overset{*}{N} \nu_{inj}}} \qquad (22)$$

или

$$N_{th} \simeq W \tau \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_{min}}} \qquad (22a)$$

Здесь

$$\tau_{min} = \frac{\Delta N}{n^2 \Delta f_{inj}}$$

минимально возможное время затухания ΔN частиц.

Выражения (22), (22.а) показывают, что для накопления достаточного числа частиц необходимо уменьшать величину коэффициента обратной связи α и соответствующим образом увеличивать время между инжекциями τ_1. Если для оценки положить $\tau_1 = \tau$, то скорость накопления, с учетом (22.а), может быть записана в виде:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\Delta N}{\tau} = \Delta N \left(\frac{W\sqrt{\tau_{min}}}{N}\right)^{2/3}, \qquad (23)$$

а число частиц накопленных ко времени t будет

$$N(t) = \Delta N^{2/5} \left(\frac{n \Delta f_{inj}}{f_0}\right)^{1/5} \left(\frac{5}{3} W t\right)^{3/5} \qquad (24)$$

Сравнение этого выражения с формулой (I5) показывает, что использование системы охлаждения с декрементом, уменьшающимся к центру области накопления не приводит к существенному увеличению числа частиц, накопленных в течение заданного интервала

времени t.

В заключение приведем численный пример. Пусть f_0 =2.I0^{6}Гц, $\Delta f_{inj}/f_0$ =5.I0^{-3}, ΔN =2,5.I0^7. Полоса пропускания цепи обратной связи в этом случае должна быть не более W =4.I0^8 Гц. Для числа частиц, накопленных в течение суток (t =8.64.I0^4 сек) формула (24) дает:

$$N = 1{,}6 \cdot 10^{11},$$

а формула (I5)

$$N = 8{,}3 \cdot 10^{10}$$

частиц, что примерно отвечает средней скорости накопления:

$$\dot{N} = \frac{N}{t} = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ частиц/сек}$$

Авторы благодарны А.Н.Скринскому за постановку задачи и полезные обсуждения.

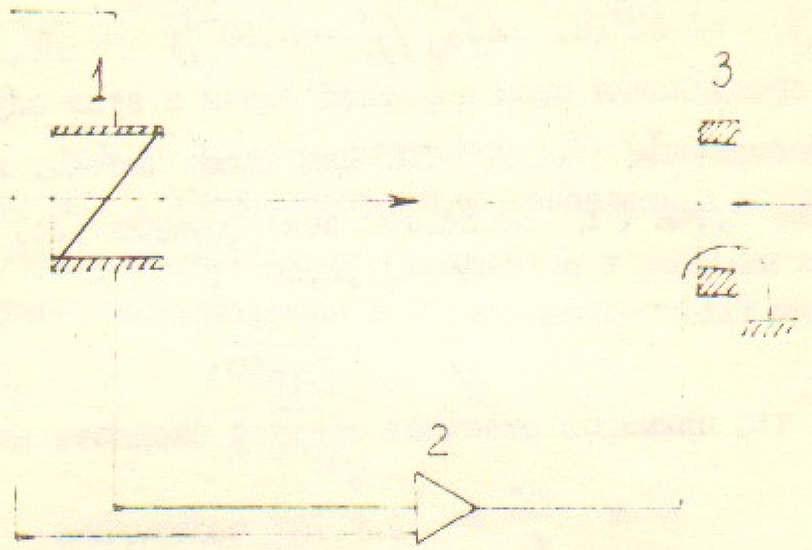

Рис.I. Блок схема системы для продольного стохастического охлаждения:
I – пикап-электрод; 2 – усилитель; 3 – ускоряющий зазор.

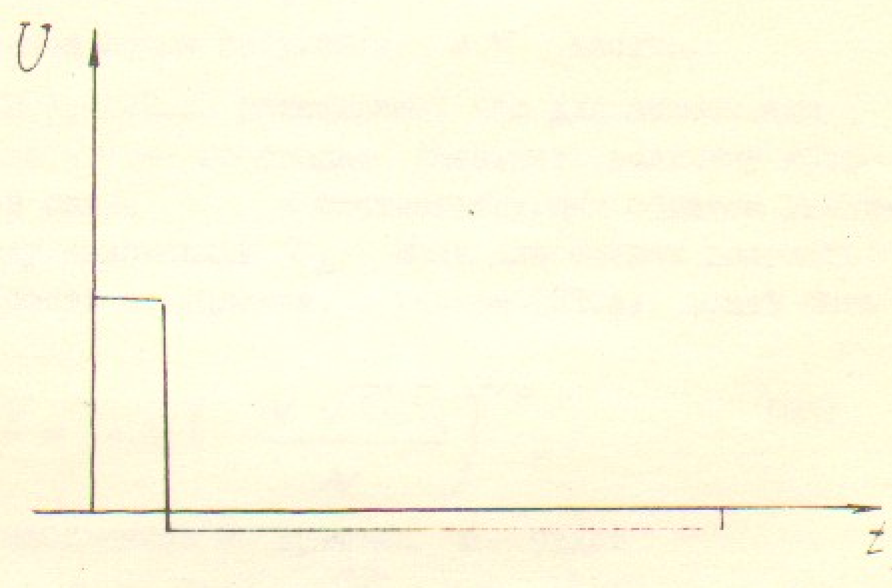

Рис.2. Схематическое изображение импульса напряжения на ускоряющем зазоре.

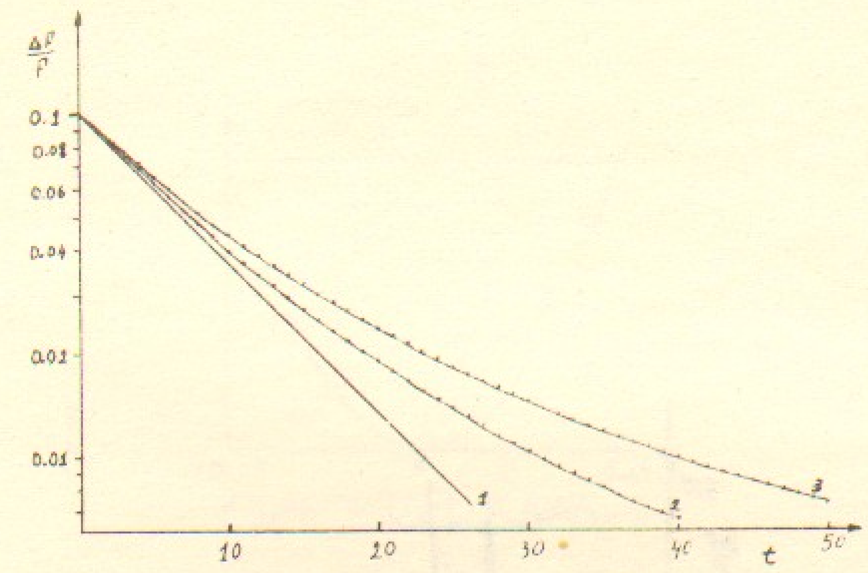

Рис.3. Зависимость относительного разброса частот обращения от числа оборотов α =0,I.
I. N =I, 2. N =50, 3. N = I00.

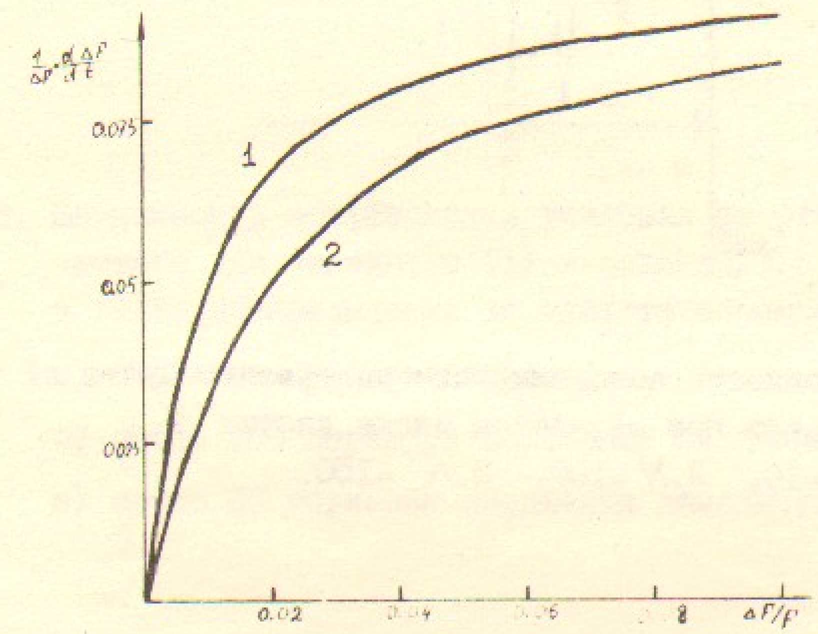

Рис.4. Зависимость декремента затухания от величины относительного разброса частот в пучке α =0,I.
I. N =50, 2. N =I00.

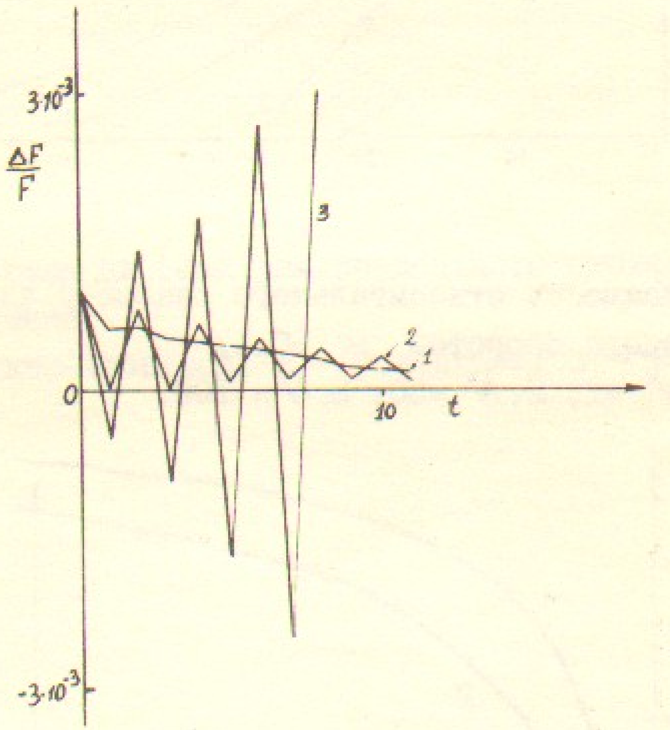

Рис.5. Зависимость положения центра тяжести пучка от числа оборотов при различном числе частиц N .
I. N =I0, 2. N =I00, 3. N =I50.

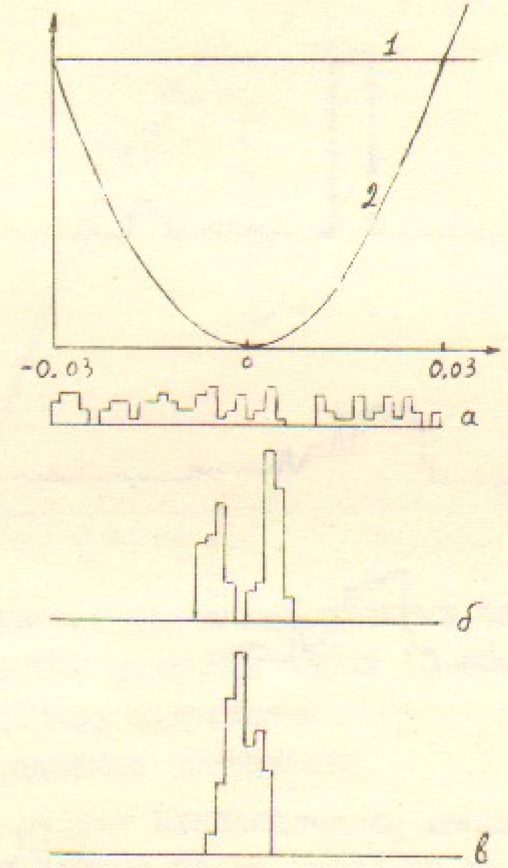

Рис.6. Зависимость коэффициента усиления от отклонения по частоте для линейного (I) и нелинейного (2) охлаждения, а также распределения по частоте обращения:

а) начальное распределение;

б) после I80 периодов обращения нелинейного охлаждения;

в) после 60 периодов обращения линейного охлаждения.

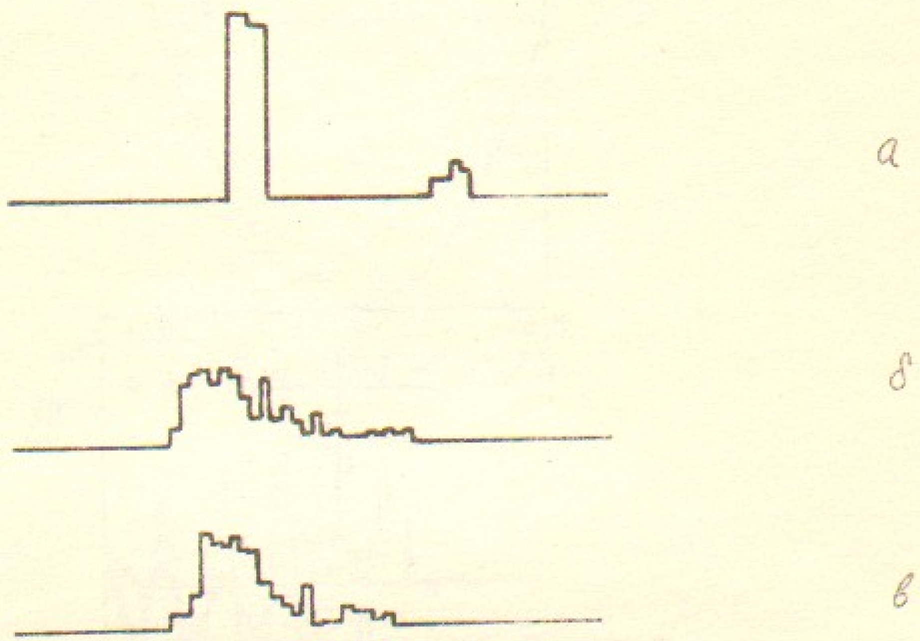

Рис.7. Изменение формы распределения частиц по частотам обращения после инжекции новой порции частиц. N=230,
α =0.I5.
а) начальное распределение,
б) через 6 оборотов,
в) через I2 оборотов.

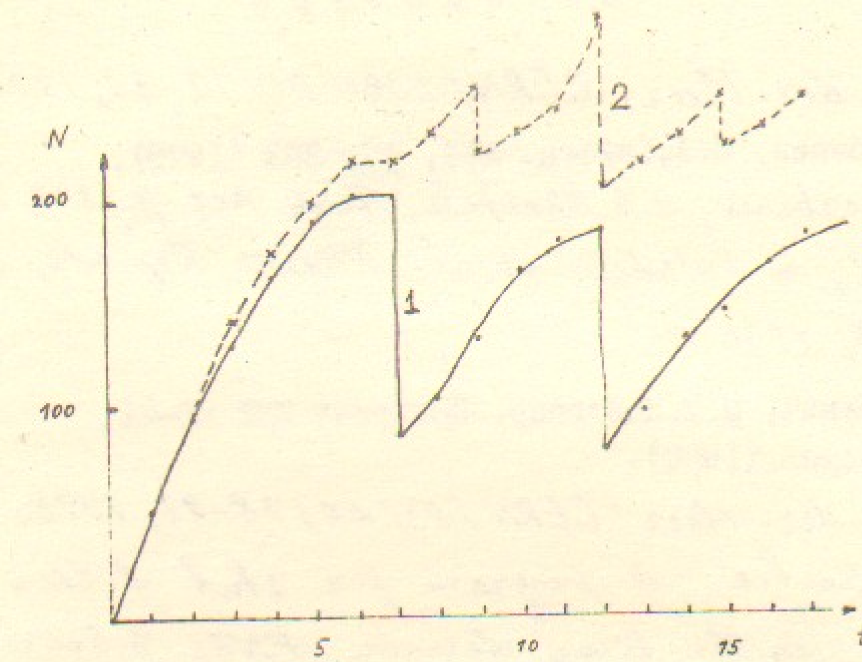

Рис.8. Зависимость числа накопленных частиц от времени
α_0 =0.I5, инжекция через IO оборотов.
I. Линейное охлаждение
2. Нелинейное охлаждение.

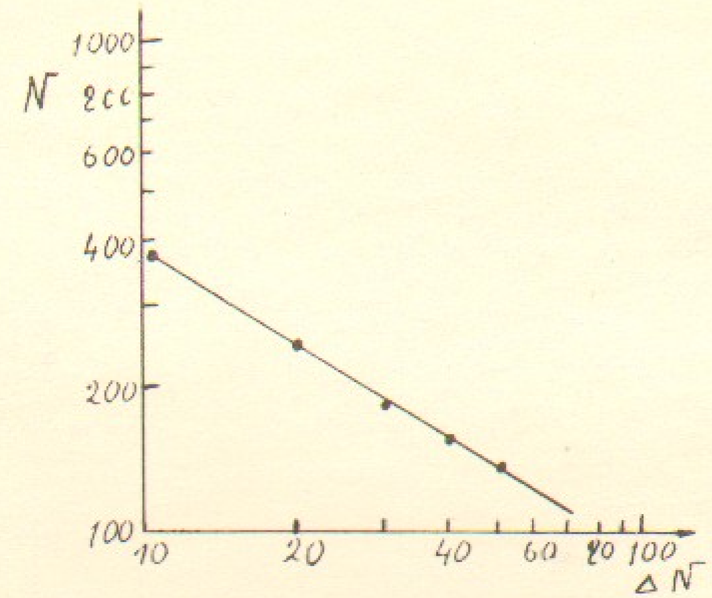

Рис.9. Зависимость предельного числа накопленных частиц от числа инжектированных частиц.

Литература

1. S. Van-der-Meer. CERN/ISR-PO/72-31, 1972.
2. Я.С.Дербенев, С.А.Хейфец. ЖТФ, **49**, 363 (1979).
3. Ya.S. Derbenev, S.A. Kheifets. Part. Acc. **9**, 237, 1979.
4. D. Möhl, G. Petrucci et al. Physics Reports, **58**, N2, 76, 1980.
5. Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер. Препринт ИЯФ 80-21, Новосибирск,(1980).
6. S. Van-der-Meer. CERN/PS/AA/78-22, 1978.
7. E.A. Crosbie. A program for stub filter cooling in the time domain. FNAL $\bar{p}$ Source Note #52, November 12, 1979.