Работа поступила - 15 мая 1980 года.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов.

Подписано к печати 29.8.80 МН 06888 Формат 30 x 42 1/8
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.1,2 печ.л.
Учётно-изд.1,0 л. Тираж 150 экз. Заказ № 172 Бесплатно

Отпечатано на ротапринте Института Ядерной Физики
Сибирского Отделения Академии Наук СССР
630090, Новосибирск-90, Проспект Науки, 11

16

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

# О ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С РЕЗОНАТОРАМИ ФАБРИ-ПЕРО

ПРЕПРИНТ 80-172

Новосибирск

# О ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С РЕЗОНАТОРАМИ ФАБРИ–ПЕРО

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

## А Н Н О Т А Ц И Я

Решена задача о линейном режиме генерации лазера на свободных электронах с резонаторами Фабри–Перо. Введено понятие переходного тока пучка. Получены выражения для инкрементов в открытом и закрытом резонаторе в области тока пучка меньшего переходного. Выражения для инкрементов в области больших токов совпадают с уже известными. Вычислен инкремент роста модуляции пучка при однократном пролете в волноводе.

# О ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛАЗЕРА НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ С РЕЗОНАТОРАМИ ФАБРИ-ПЕРО

А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин

## I. Введение

До недавнего времени в области малых длин волн единственными источниками когерентного излучения являлись лазеры. Сегодня наметилась перспектива продвижения в эту область приборов классической электроники, в которых для генерации излучения используется пучок релятивистских электронов, движущихся через периодическое поперечное магнитное поле (ондулятор). При этом имеет место радиационная неустойчивость гармоник плотности пучка, резонирующих с периодом ондулятора. В силу эффекта Доплера резонирующая длина волны много меньше периода ондулятора. Если коэффициент усиления за один пролет ондулятора мал, ондулятор размещают в резонаторе, в котором происходит накопление излучения (прибор носит название лазера на свободных электронах – – ЛСЭ). В случае же, когда коэффициент усиления за один пролет велик, то необходимость в резонаторе отпадает и становится возможной генерация когерентного излучения в однопролетном режиме /I0-I6/.

На сегодня имеются две экспериментальные работы /I÷2/, в которых сообщается о создании ЛСЭ, работающего в инфракрасном диапазоне волн. Созданию теории ЛСЭ посвящены работы /3÷II/. Важным моментом теории является вычисление инкрементов нарастания амплитуды поля в резонаторе в линейном приближении. В работах по ЛСЭ при нахождении инкремента объем поля в резонаторе фактически считался независимым параметром. Это позволило значительно упростить вычисления. Однако такой подход не позволяет построить замкнутой теории, так как в общем случае такая величина, как, например, объем поля в резонаторе, должна находиться самосогласованным образом при решении рассматриваемой задачи.

Цель настоящей работы дать замкнутую теорию лазера на свободных электронах с резонаторами Фабри-Перо. В работе показано существование переходного значения тока пучка, которое определяется параметрами ондулятора и резонатора (но не зависит от площади пучка). При токе пучка много больше переходного инкремент пропорционален плотности тока, а объем поля в резонаторе практически совпадает с объемом пучка.

В этом предельном случае инкремент находится в соответствии с работами /3÷II/. При токе пучка меньше переходного объем поля в резонаторе является функцией инкремента и поэтому должен вычисляться самосогласованным образом. Показано, что в этом случае в открытом резонаторе инкремент зависит от тока пучка экспоненциально.

## 2. Метод описания

Изложим теорию развития продольной модуляции пучка электронов в ЛСЭ предполагая, что резонатор ЛСЭ образован двумя параллельными плоскими зеркалами, которые расположены на расстоянии $\ell_z$ друг от друга (резонатор Фабри-Перо). Будем считать, что в общем случае резонатор имеет боковые стенки.

Между зеркалами резонатора размещен ондулятор длины $\ell_0$, ось которого параллельна оси резонатора. Поперечное магнитное поле ондулятора периодично с периодом $\lambda_0$ : $\vec{H}_\perp(z)=\vec{H}_\perp(z+\lambda_0)$, где $z$ – координата вдоль оси ондулятора. Кроме ондуляторного поля введем внешнее продольное магнитное поле, дающее дополнительную возможность управления процессом развития неустойчивости.

В таких полях вынужденную скорость движения электронов можно записать в виде:

$$\vec{v}_s = v_z(\mathcal{E}, z)\vec{e}_z + \vec{u}(\mathcal{E}, z).$$

Здесь составляющие скорости $v_z$ и $\vec{u}$ являются функциями энергии электрона $\mathcal{E}$ и периодическими с периодом $\lambda_0$ функциями $z$. Будем считать, что $1-v_z \ll 1$ и поэтому везде, где возможно, будем полагать $v_z = 1$. В поле спирального ондулятора:

$u_x + i u_y = u\exp(-i\varkappa z)$, $u = K_0/(\gamma - K_\parallel)$, $v_z = const$,



$K_0 = e\lambda_0|\vec{H}_\perp|/m$, $K_\parallel = e\lambda_0 H_\parallel/m \equiv \gamma\omega_\parallel/\varkappa$, $\varkappa = 2\pi/\lambda_0 \equiv 1/\lambda_0$,

$\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$ – релятивистский фактор электронов. Частота свободных колебаний электронов в поперечной плоскости (при $H_\parallel = 0$) равна $\lambda_b^{-1} = e|H_\perp|/(\sqrt{2}\gamma m)$.

Исследуем динамику модуляции пучка под действием поля излучения, пренебрегая действием кулоновского поля. Будем предполагать, что поперечное вращение электронов задается полями ондулятора. При этом излучение может приводить к изменению лишь продольного движения. Изменение модуляции пучка под действием излучения происходит на длинах значительно больших периода ондулятора, поэтому целесообразно проводить усреднение уравнений движения на временах порядка $\lambda_0$.

Выпишем уравнение для функции распределения электронов $f(\vec{r}_\perp, z, v, t)$ $(v = \langle v_z \rangle$ – усредненная по периоду ондулятора продольная составляющая скорости частицы, $\vec{r}_\perp$ – усредненное поперечное отклонение электрона от оси ондулятора), пренебрегая изменением $\vec{r}_\perp$ при пролете в ондуляторе:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial z} + e\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}(\hat{\vec{E}}\vec{u}f) = 0, \qquad (2.I)$$

где $\hat{\vec{E}} = -\dot{\vec{A}}$ – электрическое поле излучения в резонаторе ($div\vec{A} = 0$). Решение для $f$ будем искать в виде $f = f_\omega e^{i\omega t}$. Из уравнения (2.I) в линейном приближении получаем следующую связь между $f_\omega$ и полями излучения, порождаемых модуляцией пучка:

$$f_\omega = \frac{i\omega e}{\mathcal{E}\mu}\rho_0(\vec{r}_\perp)\frac{\partial f_0(v)}{\partial v}e^{-i\frac{\omega}{v}z}\int_0^z e^{i\frac{\omega}{v}z}\vec{A}_\omega\vec{u}\,dz, \qquad (2.2)$$

где $f_0(v)$ и $\rho_0(\vec{r}_\perp)$ – функции распределения электронов, соответственно, по продольным скоростям и поперечному сечению на входе в резонатор при $z = 0$ ($\int f_0 dv = \int \rho_0 d\vec{r}_\perp = I$), $\mathcal{E}\mu = (dv/d\mathcal{E})^{-1}$ – масса продольного движения /I5/. В спиральном ондуляторе с продольным полем $\mu$ равна:

$$\mu = \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{u^2}{1-\omega_\parallel/\varkappa}\right)^{-1}. \qquad (2.3)$$

Поле $\vec{A}_\omega$ должно определяться из волнового уравнения:

$$\Delta \vec A_\omega + \omega^2 \vec A_\omega = -4\pi e \dot N \vec U(z) \rho_\omega(\vec r) \qquad (2.4)$$

($e\dot N$ – полный ток пучка, $\rho_\omega = \int f_\omega dv$ , $\vec r = (\vec r_\perp , z)$ ) и удовлетворять следующим граничным условиям на стенках резонатора:

$$i\omega\left[\vec e_r \vec A_\omega\right] = -\frac{1}{n}\left[\vec e_r\left[\vec e_r \,\mathrm{rot}\, \vec A_\omega\right]\right], \qquad (2.5)$$

где $n$ – показатель преломления материала стенок (вообще говоря комплексный), который предполагается большим ( $|n| \gg 1$ ), $\vec e_r$ – – нормаль к поверхности стенок.

Таким образом получаем:

$$A_\omega^\alpha = -e\dot N \sum_{\beta=1}^{2} \int G^{\alpha\beta}(\vec r/\vec r')\, U_\beta(z')\, \rho_\omega(\vec r')\, d\vec r' , \qquad (2.6)$$

где $G^{\alpha\beta}$ – функция Грина в резонаторе уравнения (2.4), удовлетворяющая граничным условиям (2.5).

Подставляя выражение для поля (2.6) в соотношение (2.2), получаем интегральное уравнение на $f_\omega$ :

$$f_\omega = \frac{\omega e^2}{i\varepsilon m}\frac{\partial f_0}{\partial v}\rho_0 e^{-i\frac{\omega}{v}z}\int_0^z dz\, e^{i\frac{\omega}{v}z}\int d\vec r'\, G^{\alpha\beta}(\vec r/\vec r')\, U_\alpha(z)\, U_\beta(z')\, \rho_\omega(\vec r') . \qquad (2.7)$$

Функцию Грина нетрудно выразить через взаимно-ортогональные собственные функции $\vec A_\lambda(\vec r)$ ( $\int \vec A_\lambda \vec A^+_{\lambda'} d\vec r = \delta_{\lambda\lambda'}$ ), являющиеся решением уравнения

$$\Delta \vec A_\lambda + K_\lambda^2 \vec A_\lambda = 0$$

с собственными комплексными значениями $K_\lambda^2$ и удовлетворяющих граничным условиям (2.5). Для $G^{\alpha\beta}$ получаем:

$$G^{\alpha\beta} = 4\pi \sum_\lambda \frac{A_\lambda^\alpha(\vec r)\, A_\lambda^{+\beta}(\vec r')}{\omega^2 - K_\lambda^2} . \qquad (2.8)$$

В рассматриваемом нами типе резонатора решение для $\vec A_\lambda$ можно искать в виде ( $\mathrm{div}\vec A_\lambda = 0$ ):

$$\vec A_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\ell_z}}\left\{\mathrm{rot}\left[\vec e_z \psi(\vec r_\perp)\sin(K_z z + \delta_z^E)\right] + \frac{1}{K_\lambda}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left[\vec e_z \chi(\vec r_\perp)\cos(K_z z + \delta_z^M)\right]\right\}, \qquad (2.9)$$

где $\psi$ и $\chi$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + K_\perp^2\psi = 0 , \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + K_\perp^2\chi = 0 , \qquad (2.10)$$



где $K_\perp^2 = K_\lambda^2 - K_z^2$ . С помощью граничных условий (2.5), в приближении, когда волновые векторы $\vec K$ волны в резонаторе составляют малые углы с продольным направлением, получаем, что

$$K_z = \frac{\pi n_z}{\ell_z} + \frac{2i}{\ell_z n_{\parallel}} , \quad n_z = 0, 1, 2 \ldots , \quad \delta_z^E \simeq \delta_z^M \simeq \frac{1}{i n_{\parallel}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{n_{\parallel}^1} + \frac{1}{n_{\parallel}^2}\right), \qquad (2.11)$$

где $n_{\parallel}^1$ и $n_{\parallel}^2$ – соответственно, показатели преломления плоских зеркал при $z = 0$ и $z = \ell_z$ . Граничные условия для боковых стенок резонатора запишутся в виде

$$\left(\vec e_r \vec\nabla\psi + [\vec e_z \vec e_r]\vec\nabla\chi\right)_r = \frac{K_\perp^2}{i\omega n_\perp}\psi_r ,$$
$$K_\perp^2\chi_r = \frac{K_z}{i n_\perp}\left([\vec e_z \vec e_r]\vec\nabla\psi - \vec e_r\vec\nabla\chi\right)_r . \qquad (2.12)$$

Полезно отметить, что в резонаторе с идеально отражающими стенками ( $|n| \to \infty$ ) при любой форме поверхности боковых стенок граничные условия для функций $\psi$ и $\chi$ разделяются и сводятся к следующим:

$$(\vec e_r \vec\nabla\psi)_r = 0 , \quad \chi_r = 0 . \qquad (2.13)$$

Это означает, что функции $\psi$ и $\chi$ описывают две взаимно-независимые поляризации волн в резонаторе. Функция $\psi$ описывает волну с поперечным к оси резонатора электрическим полем (TE-волну), функция $\chi$ – волну с поперечным магнитным полем (TM-волну). Поправка на неидеальность боковых стенок легко учитывается по теории возмущения.

Будем, естественно, предполагать, что мал коэффициент усиления поля за время ( $\tau \approx \ell_z$ ) пролета электронов в резонаторе. В обратном случае большого коэффициента за пролет резонатор не оказывает существенного влияния на процесс развития неустойчивости и задача сводится к описанию саморазвивающейся неустойчивости в однопролетном режиме /10-16/. Малость коэффициента усиления за пролет означает близость частот излучения в режиме генерации к собственным частотам резонатора $\omega \simeq K_z \simeq \pi n_z/\ell_z$. В связи с этим при вычислении функций Грина продольное волновое число $K_z$ можно считать фиксированным при суммировании по собственным функциям. Поправки, связанные с неидеальностью резонатора следует учитывать лишь при вычислении собственных значений $K_\lambda^2$ в резонансном знаменателе $\omega^2 - K_\lambda^2$ формулы (2.8). Поправками же самих функций $\vec A_\lambda$ в (2.8) можно пренебречь.

Собственные значения $K_\perp$ определяются из граничных условий (2.I2). В первом приближении по $1/n_\perp$ имеем:

$$(\vec{e}_r \vec{\nabla}\psi)_r = \frac{K_\perp^2}{i\omega n_\perp}\psi_r - \frac{K_z}{i n_\perp K_\perp^2}\left([\vec{e}_z \vec{e}_r]\vec{\nabla}\right)_r^2 \psi , \qquad (2.I4)$$

$$K_\perp^2 \chi_r = -\frac{K_z}{i n_\perp}(\vec{e}_r \vec{\nabla}\chi)_r .$$

Разлагая на участке ондулятора длиной $\ell_0$ в ряд Фурье поперечную вынужденную скорость $u_x + i u_y = \sum_n u_n \exp(i \varkappa_m z)$ $(\varkappa_n = m/\lambda_0)$ и оставляя резонансные члены, уравнение (2.7) приведем к следующему виду:

$$f_\omega = \frac{\omega}{4i\ell_z}\frac{\dot N r_e}{\gamma M}\frac{\partial f_0}{\partial v}\rho_0\left(e^{-i\frac{\omega}{v}z}\int_0^z e^{i\left(\frac{\omega}{v}-K_z-\varkappa_n\right)t}|u_n|\,dt\right)\int d\vec{r}\,'|u_n| e^{i(K_z+\varkappa_n)z'} g_\omega(\vec{r}_\perp/\vec{r}_\perp{}')\rho_\omega(\vec{r}\,') \qquad (2.I5)$$

где $r_e = e^2/m$ ,

$$g_\omega = 2\pi\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x'}-i\frac{\partial}{\partial y'}\right)\sum_{\lambda_\perp}\frac{\psi(\vec{r}_\perp)\psi^+(\vec{r}_\perp{}')+\chi(\vec{r}_\perp)\chi^+(\vec{r}_\perp{}')}{\omega^2-K_z^2-K_\perp^2} . \qquad (2.I6)$$

Напомним, что функции $\psi$ и $\chi$ в $g_\omega$ удовлетворяют уравнению (2.I0) и нормированы условием:

$$\int|\vec{\nabla}\psi|^2 d\vec{r}_\perp = \int|\vec{\nabla}\chi|^2 d\vec{r}_\perp = 1 .$$

При вычислении $g_\omega$ функции $\psi$ , $\chi$ могут вычисляться в идеальном приближении, а собственные значения из граничных условий (2.I4).

Уравнение (2.I5) допускает дальнейшее упрощение. Введем функцию $a(\vec{r}_\perp)$ , описывающую поперечное распределение амплитуды модуляции из соотношения

$$f_\omega = a(\vec{r}_\perp)\frac{\partial f_0}{\partial v} e^{-i\frac{\omega}{v}z}\int_0^z e^{i\left(\frac{\omega}{v}-K_z-\varkappa_n\right)z'}|u_n|\,dz' ,$$

Тогда из (2.I5) имеем:

$$a(\vec{r}_\perp) = -C\rho_0(\vec{r}_\perp)\int g_\omega(\vec{r}_\perp/\vec{r}_\perp{}')\,a(\vec{r}_\perp{}')\,d\vec{r}_\perp{}' \qquad (2.I7)$$

$$C = \left\langle \frac{\dot N r_e}{8\gamma M}\frac{\omega^2|u_n|^2\ell_0^3}{\ell_z\varphi^2}\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)e^{i\varphi}\right\rangle \qquad (2.I8)$$

где $\varphi = (\varkappa_n + K_z - \frac{\omega}{v})\ell_0/2$ , скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по распределению продольных скоростей в пучке.

Приведем явные выражения для функций $\psi$ и $\chi$ в случае, когда боковые стенки являются цилиндрическими. В этом случае в



цилиндрической системе координат ( $\rho$ , $\varphi$ , $z$ ) они имеют вид:

$$\psi = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\pi(K_\perp^2 d^2 - m^2}}\frac{J_m(K_\perp\rho)}{J_m(K_\perp R)} , \qquad \chi = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\pi}\,K_\perp d}\frac{J_m(K_\perp\rho)}{J_m'(K_\perp R)} \qquad (2.I9)$$

где $R$ - радиус резонатора. Собственные значения для $K_\perp$ с идеальными стенками находятся для $\psi$ и $\chi$ , соответственно, из уравнений

$$J_m'(K_\perp R) = 0 , \qquad J_m(K_\perp R) = 0 .$$

Выпишем соответствующие поправки для собственных значений, связанные с неидеальностью стенок

$$\delta K_\perp = \frac{iK_\perp}{n_\perp\omega R}\frac{K_\perp^2R^2 + K_z^2 m^2/K_\perp^2}{K_\perp^2R^2 - m^2} , \qquad \delta K_\perp = \frac{i\omega}{n_\perp K_\perp R} . \qquad (2.20)$$

## 3. Открытые резонаторы

Начнем с изучения процесса модуляции в резонаторах без боковых стенок $(\ell_x, \ell_y \to \infty)$. В этом случае суммирование в выражении (2.I6) для $g_\omega$ можно заменить интегрированием, а функции $\psi$ и $\chi$ считать плоскими волнами:

$$g_\omega = \frac{1}{2\pi\omega}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i\vec{K}_\perp(\vec{r}_\perp-\vec{r}_\perp{}')]}{\omega-K_z-K_\perp^2/2\omega}d\vec{K}_\perp = -2K_0\left(|\vec{r}_\perp-\vec{r}_\perp{}'|\sqrt{2\omega(K_z-\omega)}\right) , \qquad (3.I)$$

где $K_0$ функция Макдональда.

Получим явные выражения для инкремента нарастания амплитуды модуляции пучка в предельных случаях больших и малых токов пучка.

В случае большого тока ( $|C| \gg 1$ ):

$$\dot N \gg \dot N_n = \frac{\gamma M \ell_z}{r_e|u|^2\omega^2\ell_0^3}\frac{8\varphi^2}{\left|\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right|} \qquad (3.2)$$

инкременты роста настолько велики, что при вычислении $g_\omega$ зависимостью знаменателя $\omega - K_z - K_\perp^2/2\omega$ от поперечных волновых чисел можно пренебречь ($|\omega - K_z| \gg K_\perp^2/2\omega$ ).

Поэтому $g_\omega$ равна:

$$g_\omega \simeq \frac{2\pi}{\omega}\frac{\delta(\vec{r}_\perp-\vec{r}_\perp{}')}{\omega-K_z} ,$$

где $\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')$ – двумерная дельта-функция. Подставляя это выражение для $g_\omega$ в (2.17) получаем, что инкремент роста $\Lambda = -\mathrm{Im}(\omega - k_z)$ в случае идеальных зеркал равен

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\omega}\rho_0 \,\mathrm{Im}\, C . \qquad (3.3)$$

Такой же результат получен в работах /3-11/. В частности, при гауссовском распределении электронов по поперечному сечению $\rho_0 = [2\pi\sigma^2 \exp(r_\perp^2/2\sigma^2)]^{-1}$ инкремент в центре пучка равен:

$$\Lambda = \mathrm{Im}\, C/\omega\sigma^2 . \qquad (3.4)$$

Условие малости коэффициента усиления за пролет ограничивает параметр $C$ сверху условием

$$|C| \ll \sigma^2/\lambda l_0 .$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда $|C| \ll 1$. В этом случае характерный поперечный размер пучка много меньше характерного поперечного размера поля излучения и уравнение (2.17) приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$1 = -C\int g_\omega(0/\vec r_\perp')\rho_0(\vec r_\perp')\left\{1 - C\int\left[g_\omega(\vec r_\perp'/\vec r_\perp'') - g_\omega(0/\vec r_\perp'')\right]\rho_0(\vec r_\perp'')\,d\vec r_\perp''\right\}d\vec r_\perp' + \dots \qquad (3.5)$$

При гауссовском распределении по поперечному сечению с помощью (3.1) получаем $\left(g_\omega(\vec r_\perp/\vec r_\perp') \simeq \ln\frac{\omega(k_z-\omega)|\vec r_\perp - \vec r_\perp'|^2}{2} + 2\cdot 0{,}6\right)$:

$$1 = -C\left(\ln[2\omega\sigma^2(k_z-\omega)] + 0{,}6\right) . \qquad (3.6)$$

Откуда:

$$k_z - \omega = \frac{1}{2\omega\sigma^2}\, e^{-\left(0{,}6+\frac{1}{C}\right)}$$

и, следовательно, инкремент равен *):

$$\Lambda = -\mathrm{Im}\,\omega = \frac{1}{2\omega\sigma^2}\sin\left(\frac{\mathrm{Im}\,C}{|C|^2}\right) e^{-\left(0{,}6+\frac{1}{|C|}\right)} . \qquad (3.7)$$

---

*) Выписанное выражение для инкремента справедливо в области $\sigma^2 \gg \lambda l_z$ с относительной точностью $\frac{\delta\Lambda}{\Lambda}\sim\frac{\lambda l_z}{\sigma^2}$. В области $\sigma^2 \ll \lambda l_z$, для нахождения инкремента с относительной точностью $\delta\Lambda/\Lambda \lesssim 1$, необходимо в формуле (2.7) кроме резонансного члена $k_z\approx\omega$ учесть также и нерезонансные члены из-за резкой зависимости от параметров пучка.



Нетрудно понять из уравнения (3.6), что нарастающее решение существует лишь в области

$$0 < \frac{\mathrm{Im}\,C}{|C|^2} < \pi , \qquad \mathrm{Re}\,C > 0 \qquad (3.8)$$

Учет неидеальности зеркал не представляет затруднений. Очевидно, что выписанные инкременты для идеальных зеркал следует уменьшить на величину $\varepsilon_\parallel/2l_z$, где $\varepsilon_\parallel = 4\,\mathrm{Re}\, n_\parallel^{-1}$ – коэффициент поглощения в зеркалах.

В полученных формулах учитывается влияние разброса по скоростям. Из формулы (2.17), (2.18) и (3.3) видим, что разбросом по скоростям можно пренебречь, если

$$|\Delta V| \ll \lambda/l_0 .$$

Для тока пучка меньше переходного в открытом резонаторе из-за экспоненциальной зависимости инкремента от параметра /C/, требование на разброс становится более жестким:

$$|\Delta V| \ll \lambda|C|/l_0 .$$

Разброс по продольным скоростям складывается из энергетического и углового разброса:

$$\Delta V = \frac{1}{\mu}\frac{\Delta\gamma}{\gamma} + \frac{(\Delta\theta)^2}{2}$$

Отсюда следует, что

$$(\Delta\gamma/\gamma)_{хар} \approx \mu\lambda/l_0 , \quad (\Delta\theta)^2_{хар}\approx\lambda/l_0 .$$

## 4. Обсуждение полученных результатов

Результаты, полученные выше, можно с точностью до численных множителей получить с помощью простых физических рассуждений. Для этого оценим сначала объем поля в резонаторе Фабри-Перо. Исходя из соотношения неопределенности для частоты $\omega$ и волнового вектора $\vec k$ ($\Delta\omega\tau\lesssim 1$, $\Delta k_x\Delta x\approx\Delta k_y\Delta y\lesssim 1$) и используя связь $\omega$ и $k$ в приближении малых углов

$$\omega = \sqrt{k^2}\simeq k_z + \frac{k_x^2+k_y^2}{2\omega} ,$$

нетрудно получить, что площадь светового пучка $\hat S$ через время $\tau$

должна удовлетворять следующему условию

$$\hat{S}(\tau) \gtrsim \lambda\tau$$

Следовательно, если начальная площадь пучка излучения $\hat{S}(0) \gg \lambda\tau$, то через время $\tau$ объем поля в резонаторе не изменится, если же $\hat{S}(0) \ll \lambda\tau$, то объем поля возрастет до величины $\lambda\tau$.

Оценим теперь поля излучения, которые действуют на частицы внутри резонатора. Для этого воспользуемся соотношением энергетического баланса. Полную энергию поля в резонаторе можно считать накопленной за время порядка времени нарастания $\Lambda^{-1}$. С другой стороны, поле в резонаторе $\hat{E}$ совершает работу над электронами, которая за время $\sim \Lambda^{-1}$ должна быть равна энергии поля. Вблизи резонанса $\lambda_0(1-v) \approx \lambda$ можно приближенно записать

$$|\hat{E}|^2 \hat{S} l_z \approx \frac{e|\hat{E}||u| l_0 \dot{N}}{\Lambda} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}.$$

Откуда

$$|\hat{E}| \approx \frac{e\dot{N}|u|}{\Lambda \hat{S}} \frac{l_0}{l_z} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$$

Если известно поле $\hat{E}$, то нетрудно оценить амплитуду модуляции плотности пучка электронов, возникающую при пролете ондулятора. Для создания модуляции $\tilde{\rho}$ частицы должны сдвинуться, относительно друг друга в продольном направлении под действием поля $\hat{E}$ на расстояние $\Delta z$ порядка $\lambda\tilde{\rho}/\rho_0$:

$$\Delta z \approx \Delta v l_0 \approx \frac{1}{\gamma^4} \frac{\delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} l_0 \approx \frac{e|\hat{E}||u| l_0^2}{\gamma^4 \mathcal{E}} \approx \lambda \tilde{\rho}/\rho_0,$$

откуда, подставляя $\hat{E}$, имеем:

$$1 \approx |C|\lambda/\Lambda\hat{S}$$

где

$$|C| \approx \frac{\dot{N} r_e}{\gamma^4} \frac{|u|^2 l_0^3}{l_z} \quad -$$



безразмерный параметр.

В случае больших токов пучка, когда $|C| \gg 1$ имеем решение $\Lambda \approx \lambda|C|/\sigma^2$. В этом случае $\hat{S}$ совпадает с площадью пучка электронов ( $\hat{S} \approx \sigma^2$ ). Действительно, время увеличения площади пучка излучения в несколько раз по порядку величины составляет $\tau \approx \sigma^2/\lambda$, но время нарастания $\Lambda^{-1}$ много меньше $\tau$, так как

$$\frac{\lambda}{\Lambda\sigma^2} \approx \frac{1}{|C|} \ll 1.$$

В пределе малых токов имеем $|C| \ll 1$ и, как показано выше, характерный поперечный размер поля излучения на временах порядка $\Lambda^{-1}$ по порядку величины равен $\hat{S} \approx \lambda/\Lambda$. Подставляя это значение $\hat{S}$ в выражение для поля $\hat{E}$ имеем:

$$|\hat{E}| \approx \frac{e\dot{N}|u|\tilde{\rho}}{\Lambda\hat{S}\rho_0} \approx \frac{e\dot{N}|u|}{\lambda} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \approx const$$

Мы видим, что поле излучения в резонаторе не растет со временем и поэтому решение для инкремента отсутствует. В действительности инкремент не равен нулю, а экспоненциально мал. Чтобы убедиться в этом, нужно несколько уточнить оценку поля $\hat{E}$, действующего на пучок. Для этого удобно использовать метод отражений. Поле от ближайших отражений складывается, давая линейное увеличение $\hat{E}$ со временем. Это происходит вплоть до расстояний порядка $\sigma^2/\lambda$. При этом $\hat{E}$ достигает величины порядка $\frac{e\dot{N}|u|}{\lambda} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$. При дальнейшем суммировании отражений нужно учитывать спадание полей излучения с расстоянием пропорционально $z^{-1}$, где $z \gg \sigma^2/\lambda$. На больших расстояниях суммирование обрезается на длинах порядка $\Lambda^{-1}$ экспоненциальным спадом $\tilde{\rho}$. В результате имеем:

$$\hat{E} \approx \frac{e\dot{N}|u|}{\lambda} \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ln \frac{\lambda}{\sigma^2\Lambda},$$

откуда для токов пучка много меньших переходного

$$\dot{N} \ll \dot{N}_n \approx \frac{\gamma^4}{r_e} \frac{\lambda^2 l_z}{|u|^2 l_0^3}$$

получаем следующую оценку для инкремента: $1 \approx |C| \ln \frac{\lambda}{\sigma^2\Lambda}$, $\Lambda \approx \frac{\lambda}{\sigma^2} e^{-\frac{1}{|C|}}$.

## 5. Закрытый резонатор

Как следует из вышеизложенного, в случае большого тока излучение за время нарастания не успевает выйти за пределы электронного пучка и поэтому боковые стенки резонатора не оказывают влияния на рост модуляции пучка. В случае же малого тока ( $\dot{N} \ll \dot{N}_п$ ) боковые стенки могут препятствовать поперечной диффузии излучения и значительно повышать инкременты. Выигрыш в инкременте будет значительным, если характерные поперечные размеры резонатора значительно меньше поперечного размера поля излучения в открытом резонаторе

$$\ell_\perp^2 \ll \lambda/\Lambda \approx \sigma^2 e^{1/|C|}.$$

При выполнении этого условия излучение многократно успевает отразиться от боковых стенок за время нарастания.

При вычислении $g_\omega$ можно ограничиться только одним резонансным членом, если выполнено условие:

$$\ell_\perp^2 \ll |C|\sigma^2 e^{1/|C|}.$$

В этом случае из уравнения (2.I7) для волн, например, типа ТЕ имеем для невырожденного спектра:

$$a(\vec{z}_\perp) = -\frac{J_1 C \rho_0}{\omega(\omega - K_z - K_\perp^2/2\omega)} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \int a(\vec{z}_\perp')\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i\frac{\partial}{\partial y'}\right)\psi\, d\vec{z}_\perp'$$

Для инкремента получаем следующую формулу:

$$\Lambda = \frac{J_1}{\omega} J_m C \int (\vec{\nabla}\psi)^2 \rho_0\, d\vec{z}_\perp - \frac{\varepsilon_\parallel}{2\ell_z} - \frac{K_\perp}{\omega} J_m \delta K_\perp \qquad (5.I)$$

Для волн $TM$ -типа формула для инкремента аналогична (5.I) с заменой $\psi$ на $\chi$.

Таким образом, введение боковых стенок устраняет экспоненциальную зависимость инкремента от тока пучка. Для идеальных боковых стенок резонатора инкремент в оптимальном случае порядка $|C|/\omega R^2$.

Если резонатор имеет цилиндрическую боковую поверхность, спектр собственных функций при $m \neq 0$ двухкратно вырожден и формулу (5.I) можно использовать только при $m = 0$. Обобщение не представляет труда, но из-за громоздкости общие выражения для инкрементов при $m \neq 0$ не приводятся.

В практически интересном случае когда боковые и торцевые стенки имеют примерно одинаковую отражательную способность



($\varepsilon_\parallel \approx \varepsilon_\perp = 4\,\mathrm{Re}\, n_\perp^{-1}$) поглощение в боковых стенках намного превышает поглощение в торцевых ( $\frac{\varepsilon_\perp}{R} / \frac{2\varepsilon_\parallel}{\ell_z} \approx \frac{\ell_z}{R} \gg 1$ ). Исключение представляет единственная мода $m = 0$ волны ТЕ, имеющая аномально малое поглощение (примерно в $R^2/\lambda^2$ раз меньшее, чем потери в боковых стенках других мод), которое при $R^3/\lambda^2 \ell_z > 1$ становится меньше, чем в торцевых стенках. При $|C| \ll \varepsilon_\perp \omega R$ может расти лишь мода $m = 0$ волны ТЕ. Ее инкремент равен

$$\Lambda_0 = \frac{J_m C}{\omega R^2 J_0^2(K_\perp R)} \int J_1^2(K_\perp \rho)\, \rho_0(\vec{z}_\perp)\, d\vec{z}_\perp - \frac{\varepsilon_\parallel}{2\ell_z} - \frac{K_\perp^2}{4\omega^2 R}\varepsilon_\perp \qquad (5.2)$$

Характерное значение порога генерации этой моды лежит в области (при $\varepsilon_\parallel = 0$): $|C| \approx \varepsilon_\perp/(\omega R)$.

## 6. Границы применимости

При выводе выражений для инкрементов пренебрегалось воздействием кулоновского поля пучка. Периодическая часть кулоновского поля пучка промодулированного с длиной волны $\lambda$, по порядку величины, как нетрудно убедиться, равна:

$$|E_c| \approx \frac{e\dot{N}\lambda}{\sigma^2}\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \qquad \sigma^2 \gg \gamma_\parallel^2 \lambda^2,$$

$$|E_c| \approx \frac{e\dot{N}}{\gamma_\parallel^2 \lambda}\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ln\frac{\gamma_\parallel^2 \lambda^2}{\sigma^2}, \qquad \sigma^2 \ll \gamma_\parallel^2 \lambda^2,$$

где

$$\gamma_\parallel^2 = \gamma^2/(1 + \gamma^2 |u|^2) = (1 - V^2)^{-1}.$$

Поля излучения будут играть основную роль в динамике модуляции плотности, если периодическая часть проекции кулоновского поля на скорость частиц мала по сравнению с проекцией поля излучения, накопленного в резонаторе :

$$|\vec{E}_c \vec{v}| \approx |E_c| \ll |\hat{\vec{E}} \vec{v}| \approx |\hat{E}||u|$$

Поле излучения $\hat{E}$, создающее модуляцию пучка $\tilde{\rho}$ примерно равно (см. 4-й раздел)

$$|\hat{E}| \approx \frac{m}{e}\frac{\gamma M}{|u|\ell_0^2}\lambda\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$$

и не зависит от вида резонатора и параметров пучка. Таким образом, условие пренебрежения кулоновскими полями запишется в виде:

$$\dot N \ll \frac{\gamma}{r_e}\frac{\mu\sigma^2}{\ell_o^2} \qquad \text{при} \qquad \sigma^2 \gg \gamma_{\parallel}^2 \lambda^2 ,$$

$$\dot N \ll \frac{\gamma}{r_e}\frac{\mu \lambda_o^2}{\gamma_{\parallel}^2 \ell_o^2} \qquad \text{при} \qquad \sigma^2 \ll \gamma_{\parallel}^2 \lambda^2 .$$

Мы предполагали также, что поперечное движение частиц полностью определяется полями ондулятора. Для этого требуется, чтобы поле излучения в резонаторе было достаточно мало:

$$|\hat E|(1-v) \ll H_o$$

Отсюда получаем, что,если

$$|u|\mathcal{K}_o/\gamma \gg \mu\, \lambda^2/\ell_o^2 ,$$

то влиянием поля излучения на поперечное движение можно пренебречь вплоть до максимально возможной модуляции пучка $\tilde\rho \approx \rho_o$. При отсутствии продольного магнитного поля ( $\mu = \gamma_{\parallel}^2$ ) это условие запишется в следующем простом виде

$$\mathcal{K}_o \gg \lambda_o/\ell_o$$

Линейная теория нарастания амплитуды поля в резонаторе справедлива до тех пор, пока степень модуляции пучка мала ($\tilde\rho/\rho_o \ll 1$). Это означает, что изменение энергии частиц при пролете резонатора не превышает [ж)] $\mu\lambda/\ell_o$ :

$$\frac{\delta\gamma}{\gamma} \ll \mu\frac{\lambda}{\ell_o} . \qquad (6.1)$$

Полученные в предыдущих параграфах результаты справедливы также в предположении относительной малости различия энергии и продольных масс частиц в пучке. Различие в энергиях и, следовательно, в массах максимально, когда модуляция пучка близка к предельной. Поэтому условие

$$\frac{\delta\mu}{\mu} \approx \left|\frac{\partial\mu}{\partial\gamma}\frac{\delta\gamma}{\mu}\right| \ll 1$$

вместе с условием (6.1) для $\delta\gamma/\gamma$ дает ограничение на величину $\mu$ сверху. Ограничение на $\mu$ снизу связано с тем, что вблизи резонанса $|\omega_{\parallel} - \varkappa| \ll \varkappa$, в области которого может быть уменьшена величина $\mu$, длина ондулятора должна быть больше, чем

$$\lambda_o/|1-\omega_{\parallel}/\varkappa| \approx \lambda_o/|\mu u^2|$$

ж) В открытом резонаторе при $|C| \ll 1$, когда инкремент экспоненциально мал, линейная теория справедлива при $|\tilde\rho/\rho_o| \ll |C|$ или $|\delta\gamma/\gamma| \ll |C|\mu\lambda/\ell_o$.



Для спирального ондулятора пределы изменения $\mu$ ограничиваются условиями:

$$\frac{\lambda}{|u|^2\ell_o} \ll \frac{\mu}{\gamma_{\parallel}^2} \ll \min\left(\gamma|u|\sqrt{\ell_o/\lambda_o},\ \ell_o/\lambda_o\right) \qquad (6.2)$$

Введение продольного поля позволяет без изменения поперечного движения ( $|u| = const$ ) управлять массой продольного движения. Уменьшение массы увеличивает ( $\sim \mu^{-1}$ ) инкременты. Имеется и другая возможность, увеличивая массу (тем самым проигрывая в инкременте), значительно увеличить долю энергии пучка, переходящую в излучение, которая по порядку величины [ж)] равна $|\mu|\lambda/\ell_o$ .

Отметим, что существует другой интересный способ уменьшения "эффективной" массы продольного движения, предложенный ранее в работе /8/ (оптический клистрон).

## 7. Вычисление инкрементов в однопролетном режиме с боковыми стенками

В случае открытого резонатора при увеличении коэффициента усиления за пролет до значений, больших единицы влияние зеркал резонатора становится несущественным для развития радиационной неустойчивости. Теория генерации в этом однопролетном режиме изложена в работах /10-16/. В настоящей работе также рассмотрена теория генерации в закрытом резонаторе (с боковыми стенками). Предельный переход в этом случае приводит к задаче о генерации в однопролетном режиме при наличии боковых стенок. Для вычисления инкрементов в этой задаче можно использовать те же методы, что и описанные выше.

Как следует из результатов работы /14,15/ в однопролетном режиме без боковых стенок существуют два случая широкого и тонкого пучка. В случае широкого пучка, когда

$$\sigma^2 \gg \sigma_{kp}^2 = \frac{\lambda^2}{|u|}\sqrt{\frac{\gamma\mu}{\dot N r_e}} ,$$

ж) В частности, как видим из (6.2), в спиральном ондуляторе при $\gamma|u| \approx \sqrt{\ell_o/\lambda_o}$ эта доля энергии пучка становится порядка единицы.

излучение не выходит за пределы пучка и введение боковых стенок в этом случае не оказывает существенного влияния на процесс развития неустойчивости. Напротив, в случае тонкого пучка ($\sigma^2 \ll \sigma_{кр}^2$) введение боковых стенок может существенно увеличивать инкременты.

В отличие от задачи в резонаторе, где амплитуда поля нарастала во времени по одинаковому закону в каждой точке резонатора (коэффициент усиления за пролет мал), в однопролетном режиме амплитуда поля в любой точке пространства не зависит от времени и определяется расстоянием от начала ондулятора. Поэтому, естественно, в этом случае для нахождения длины нарастания использовать дисперсионное соотношение для волнового числа в продольном направлении $K_z$.

Из-за непрерывности спектра в продольном направлении поле $\vec{A}_\omega$ удобно искать в виде

$$\vec{A}_\omega = \sum_\lambda \int C_\lambda(K_z)\, \vec{F}_\lambda(K_z)\, dK_z$$

где

$$\vec{F}_\lambda = \mathrm{rot}(\vec{e}_z \psi e^{-iK_z z}) + \frac{1}{K_\lambda} \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\vec{e}_z \chi e^{-iK_z z})$$

– собственные функции рассматриваемого волновода (ср.с (2.9)).
Из уравнения (2.6) получаем:

$$\vec{u}\vec{A}_\omega = -2e\dot{N} \sum_{\lambda} \int \frac{dK_z\, \vec{u}\vec{F}_\lambda}{\omega^2 - K^2} \int d\vec{r}_\perp' dz'\, \vec{u}\vec{F}_\lambda^{+} \rho_\omega(\vec{r}\,') .$$

Подставляя это выражение в соотношение (2.2) для фурье-гармоники функции распределения в продольном направлении $f_{\omega, K_z+\varkappa} = \int f_\omega \cdot e^{i(K_z+\varkappa)z} dz$, имеем:

$$f_{\omega, K_z+\varkappa} = -\frac{\dot{N} r_e |u|^2 \omega}{2\gamma\mu\left(\frac{\omega}{v} - K_z - \varkappa\right)} \rho_0(\vec{r}_\perp) \frac{\partial f_0}{\partial v} \int g(\vec{r}_\perp/\vec{r}_\perp')\, \rho_{\omega, K_z+\varkappa}\, d\vec{r}_\perp' ,$$

где $g(\vec{r}_\perp/\vec{r}_\perp')$ совпадает с (2.I6).
Вводя амплитуду $a(\vec{r}_\perp)$ из соотношения $f_{\omega, K_z+\varkappa} = a(\vec{r}_\perp) \frac{\partial f_0}{\partial v} / \left(\frac{\omega}{v} - K_z - \varkappa\right)$, получаем

$$a(\vec{r}_\perp) = \frac{\dot{N} r_e |u|^2 \omega^2}{2\gamma\mu} \rho_0(\vec{r}_\perp) \left\langle \frac{1}{\left(\frac{\omega}{v} - K_z - \varkappa\right)^2} \right\rangle \int g(\vec{r}_\perp/\vec{r}_\perp')\, a(\vec{r}_\perp')\, d\vec{r}_\perp' \qquad (7.I)$$

Полученное уравнение позволяет находить длину нарастания $\ell_g = (\mathrm{Im} K_z)^{-1}$.
Для выписывания явных выражений для $\ell_g$ будем считать, что разброс по скоростям достаточно мал ($|\Delta v| \ll \lambda/\ell_g$). При отсутствии боковых стенок для широкого пучка с помощью (7.I) имеем:

$$\left(\frac{\omega}{v} - K_z - \varkappa\right)^2 (\omega - K_z) = \frac{\pi \dot{N} r_e}{\gamma\mu} |u|^2 \omega \rho_0 .$$



Максимальный инкремент достигается в точке резонанса $\omega = 2\gamma_\parallel^2 \varkappa$ и равен /I0-I6/:

$$\ell_g^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\pi \dot{N} r_e |u|^2}{\gamma\mu} \omega \rho_0 \right]^{1/3} .$$

Для тонкого пучка при гауссовском распределении по поперечному сечению имеем ($\ln(\sigma_{кр}^2/\sigma^2) \gg 1$):

$$\left(\frac{\omega}{v} - K_z - \varkappa\right)^2 = -\frac{\dot{N} r_e}{2\gamma\mu} |u|^2 \omega^2 \ln \frac{1}{\omega\sigma^2(K_z - \omega)} .$$

Максимальный инкремент $\ell_g^{-1}$ также достигается в точке $\omega = 2\gamma_\parallel^2 \varkappa$ и равен /I4,I5/:

$$\ell_g^{-1} = \left[ \frac{\dot{N} r_e}{2\gamma\mu} |u|^2 \omega^2 \ln \frac{\sigma_{кр}^2}{\sigma^2} \right]^{1/2} , \qquad (\mu > 0) .$$

Так как поперечный размер излучения тонкого пучка порядка $\sigma_{кр}$, значительное усиление инкремента возможно в волноводе с характерными размерами $\ell_\perp$ много меньшими $\sigma_{кр}$ ($\ell_\perp^2 \ll \sigma_{кр}^2$). В этом случае на длине нарастания излучения многократно отразится от боковых стенок. При этом инкремент, например, для моды ТЕ в идеальном волноводе, становится равным (для невырожденного спектра):

$$\ell_g^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\pi \dot{N} r_e |u|^2 \omega}{2\gamma\mu} \int |\vec{\nabla}\psi|^2 \rho_0\, d\vec{r}_\perp \right]^{1/3} \qquad (7.2)$$

С учетом поглощения в стенке дисперсионное уравнение для максимального инкремента имеет вид:

$$\Lambda^2 \left(\Lambda + \frac{K_\perp}{\omega} \mathrm{Im} K_\perp\right) = -i \frac{\pi}{2} \frac{\dot{N} r_e}{\gamma\mu} |u|^2 \omega \int (\vec{\nabla}\psi)^2 \rho_0\, d\vec{r}_\perp$$

Как видим, выигрыш в инкременте близок к максимально возможному, если

$$\frac{K_\perp}{\omega} \mathrm{Im} K_\perp \ll (\ell_g)_u^{-1}$$

где $(\ell_g)_u$ определяется формулой (7.2). В частности для наиболее слабо затухающей ТЕ волны в цилиндрическом волноводе, это означает, что

$$\varepsilon_\perp \ll 4 \frac{\omega^2}{K_\perp^2} \frac{R}{(\ell_g)_u} ,$$

где

$$(\ell_g)_u^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\dot{N} r_e |u|^2 \omega}{2\gamma\mu R^2 J_0^2(K_\perp R)} \int J_1(K_\perp \rho)\, \rho_0(\vec{r}_\perp)\, d\vec{r}_\perp \right]^{1/3} .$$

Нам приятно поблагодарить Я.С.Дербенева за обсуждения в ходе выполнения работы. Мы признательны А.Н.Скринскому за интерес к работе.

Литература


1. L.K. Elias et al. Phys. Rev. Lett. 36, 717 (1976)
2. D.A. Deacon et al. Phys. Rev. Lett. 38, 892 (1977)
3. R.H. Pantell, G. Soncini, H.E. Puthoff. IEEE. J. Quantum Electron, 4, 905 (1968).
4. F.A. Hopf et al. Phys. Rev. Lett. 37, 1342 (1976)
5. V.N. Baier, A.I Milstein. Phys. Lett. 65A, 319 (1978).
6. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Квантовая электроника 5, 1543, (1978).
7. Д.Ф.Алферов, Е.Г.Бессонов. Препринт ФИАН 162, (1977).
8. Н.А.Винокуров, А.Н.Скринский. Препринт ИЯФ 77-59 (1977).
9. I.B. Bernstein, J.L. Hirshfield, Phys. Rev. Lett. 40, 761 (1978)
10. В.Л.Братман, Н.С.Гинзбург, М.И.Петелин ЖЭТФ 76, 930 (1979)
11. P. Sprangle, R. Smith. Phys. Rev. A21, 293 (1980)
12. N.M. Kroll, W.A. McMullin. Phys. Rev. A17, 300 (1978)
13. Л.А.Вайнштейн. ЖТФ 49, 1129-1144 (1979).
14. А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин. ДАН СССР 249, 843 (1979).
15. А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин. Препринт ИЯФ 79-48 (1979), Pat. Acc. 10 (1980)
16. В.Н.Байер, А.И.Мильштейн. ДАН СССР 250, 1364 (1980).