Работа поступила - 29 августа 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 24.X-1980 МН 06984
Усл. 3,0 печ.л., 2,4 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 191.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Б.Г.Конопельченко

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕПРИНТ 80-191

Новосибирск

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

Б.Г.Конопельченко

АННОТАЦИЯ

Рассматриваются трансформационные свойства дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Показано, что характерные для интегрируемых уравнений нелинейные преобразования (группы симметрии, Бэклунд-преобразования) и сами эти уравнения, содержатся в некоторой универсальной группе нелинейных преобразований, определяемой линейной спектральной задачей.

NONLINEAR TRANSFORMATIONS AND INTEGRABLE EQUATIONS

B.G.Konopelchenko

Institute of Nuclear Physics
Novosibirsk 630090, USSR

A b s t r a c t

The transformations properties of the partial differential equations integrable by the inverse scattering transform method are considered. It is shown that the nonlinear transformations characteristic to the integrable equations (symmetry groups, Bäcklund-transformations) and integrable equations themselves are contain in certain universal nonlinear transformations group which is define by linear spectral problem.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ

Б.Г.Конопельченко

I. ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие благодаря методу обратной задачи рассеяния круг нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих детальное исследование, значительно расширился (см.например [I-I4]). Для дифференциальных уравнений, интегрируемых этим методом, характерен ряд очень интересных свойств - существование решений солитонного типа, бесконечные наборы законов сохранения, полная интегрируемость и т.д.. Все это резко отличает нелинейные уравнения, к которым применим метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), от других нелинейных дифференциальных уравнений.

Цель настоящей работы - обсудить трансформационные свойства уравнений, интегрируемых МОЗР, и показать, что специфические особенности таких уравнений тесно связаны с их специальными групповыми свойствами.

Возможны различные подходы при анализе свойств симметрии нелинейных дифференциальных уравнений (см.например [I5-22]). В данной работе мы рассмотрим трансформационные свойства нелинейных интегрируемых уравнений с единой точки зрения, отправляясь от соответствующей этим уравнениям линейной спектральной задачи. Мы ограничимся для определенности спектральной задачей следующего вида:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = i\lambda A \Psi + i P(x,t)\Psi, \qquad (I.I)$$

где λ - спектральный параметр (произвольное комплексное число), A - постоянная диагональная матрица ($A_{ik} = a_i \delta_{ik}$, $a_i \neq a_k$, $i,k = 1,\dots,N$), $P(x,t)$ - матрица порядка N, элементами которой являются функции двух независимых переменных x и t (координаты и времени) и $P_{ii} = 0$ $(i=1,\dots,N)$. Порядок N матричной задачи (I.I) произволен.

В настоящей работе построены преобразования "потенциала" $P(x,t) \longrightarrow P'(x,t)$, при которых матрица перехода $S(\lambda,t)$

(основная спектральная характеристика задачи (I.I)) трансформируется особенно простым образом: $S(\lambda,t) \longrightarrow S'(\lambda,t) = B^{-1}(\lambda,t)S(\lambda,t)C(\lambda,t)$, где B, C – диагональные матрицы. Эти преобразования имеют вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(B_\alpha(\Lambda_A^+,t)(H_\alpha P' - PH_\alpha)\right)_F = 0, \qquad (I.2)$$

где $B_\alpha(\lambda,t), (\alpha=1,\ldots,N)$ – произвольные функции; H_α – диагональные матрицы: $(H_\alpha)_{nn} = \delta_{\alpha n}\ (\alpha=1,\ldots,N,\ n=1,\ldots,N)$, $B=\sum_{\alpha=1}^{N} B_\alpha H_\alpha$; $(\Phi_D)_{ik} \overset{df}{=} \Phi_{ii}\delta_{ik}$, $(i,k=1,\ldots,N)$; $\Phi_F \overset{df}{=} \Phi - \Phi_D$, $\Lambda_A^+\Phi = -\Lambda^+\Phi_A$,

где $[A,\Phi_A] \overset{df}{=} \Phi$, а оператор Λ^+ действует следующим образом:

$$\Lambda^+\Phi = i\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\Phi(x)P'(x) - P(x)\Phi(x)\right)_F + i\int_{-\infty}^{x}(\Phi P' - P\Phi)_D\, P'(x) - iP(x)\int_{-\infty}^{x}(\Phi P' - P\Phi)_D, \qquad (I.3)$$

где $\int_{-\infty}^{x} f \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{x} dy\, f(y)$.

Соотношение (I.2) является фундаментальным для анализа трансформационных свойств нелинейных систем, связанных со спектральной задачей (I.I). Как мы увидим, дифференциальные уравнения, интегрируемые с помощью (I.I), представляют собой инфинитезимальную форму преобразований (I.2), порождаемых сдвигами по времени. Общий вид интегрируемых уравнений следующий:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\Omega_\alpha(L_A^+,t)[H_\alpha,P]\right)_F = 0, \qquad (I.4)$$

где $L_A^+ \overset{df}{=} \Lambda_A^+(P'=P)$ и $\Omega_\alpha(\lambda,t)(\alpha=1,\ldots,N)$ – произвольные мероморфные функции λ.

Бесконечномерная группа преобразований (I.2) содержит в качестве подгруппы бесконечномерную группу симметрии уравнений типа (I.4). В инфинитезимальной форме преобразования симметрии имеют вид

$$\delta_\omega P(x,t) = i\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\omega_\alpha(L_A^+)[H_\alpha,P]\right)_F, \qquad (I.5)$$

где $\omega_\alpha(\lambda), (\alpha=1,\ldots,N)$ – произвольные целые функции. Группа симметрии (I.5) является универсальной – любое уравнение вида (I.4) (с любым $\Omega_\alpha(\lambda,t)$) инвариантно относительно преобразований (I.5). Преобразования (I.5) связаны с бесконечными наборами интегралов движения уравнений (I.4).

Наконец, среди преобразований (I.2) содержится еще один тип нелинейных преобразований – так называемые Бэклунд – преобразования, активно изучаемые в последнее время (см.например [2,6,9,23]). Хорошо известные солитонные Бэклунд-преобразования для некоторых конкретных уравнений являются частными случаями преобразований (I.2).

Таким образом, бесконечномерная группа преобразований (I.2) включает в себя все важнейшие нелинейные преобразования, характерные для интегрируемых уравнений. В рамках этой группы выявляется единая природа различных типов преобразований.

В работе рассмотрены также гамильтонова структура уравнений вида (I.4) и матричный (и операторный) аналог преобразования Миуры.

План статьи следующий. Второй раздел посвящен выводу преобразований (I.2). Общий вид интегрируемых уравнений найден в третьем разделе. В четвертом разделе вычислены интегралы движения. Гамильтонова и лагранжева структура интегрируемых уравнений рассматривается в пятом разделе. В следующем шестом разделе обсуждаются группы симметрии. Бэклунд-преобразования и их групповые свойства анализируются в седьмом разделе. В предпоследнем, восьмом разделе рассмотрено преобразование Миуры для матричных и операторных интегрируемых уравнений.

II. ПОСТРОЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (I.2)

Мы будем рассматривать "потенциалы" $P(x,t)$, убывающие на бесконечности: $P(x,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$. Тем самым, $\psi \xrightarrow[|x|\to\infty]{} E = \exp i\lambda Ax$. Введем фундаментальные матрицы – решения F^+, F^-: $F^+ \xrightarrow[x\to+\infty]{} E$, $F^- \xrightarrow[x\to-\infty]{} E$ и матрицу перехода $S(\lambda,t)$: $F^+(x,t,\lambda) = F^-(x,t,\lambda)S(\lambda,t)$ [I,24]. Из элементов матрицы перехода строятся данные рассеяния – основная спектральная характеристика задачи (I.I) [I,24].

Возьмем два произвольных потенциала $P(x,t)$, $P'(x,t)$

и соответствующие им $\Psi(x,t,\lambda)$, $\Psi'(x,t,\lambda)$. Нетрудно проверить, что

$$\Psi' - \Psi = -i\,\Psi \int_x^{\infty} dy\, \Psi^{-1}(P'-P)\Psi'. \tag{2.I}$$

Полагая в (2.I) $\Psi = F^+$ и переходя к пределу $x \to -\infty$ получаем

$$S' - S = -i\,S \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, (F^+)^{-1}(P'-P)(F^+)'. \tag{2.2}$$

Формула (2.2), связывающая изменение потенциала $P(x,t)$ с изменением матрицы перехода, играет фундаментальную роль в дальнейших построениях.

Рассмотрим теперь только такие пары $(P(x,t),\ S(\lambda,t))$ и $(P'(x,t),\ S'(\lambda,t))$, что

$$S'(\lambda,t) = B^{-1}(\lambda,t)\, S(\lambda,t)\, C(\lambda,t), \tag{2.3}$$

где $B(\lambda,t)$, $C(\lambda,t)$ – произвольные диагональные матрицы. Оказывается возможным в явном виде выписать преобразования $P(x,t) \to P'(x,t)$, соответствующие преобразованиям $S \to S'$ типа (2.3).

Переписывая соотношение (2.3) в форме $S' - S = (1-B)S' - S(1-C)$ и сравнивая его с (2.2), находим

$$\left(S^{-1}(1-B)S'\right)_F = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left((F^+)^{-1}(P'-P)(F^+)'\right)_F, \tag{2.4}$$

$$\left(S^{-1}(1-B)S'\right)_D - 1 + C = -i\int_{-\infty}^{\infty} dx\left((F^+)^{-1}(P'-P)(F^+)'\right)_D, \tag{2.5}$$

где $(\Phi_D)_{ik} \overset{df}{=} \Phi_{ii}\,\delta_{ik}$ $(i,k = 1,\dots,N)$, $\Phi_F \overset{df}{=} \Phi - \Phi_D$.

Учитывая тождество

$$\left(S^{-1}(1-B)S'\right)_F = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\partial}{\partial x}\left((F^+)^{-1}(1-B)(F^+)'\right)_F =$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left((F^+)^{-1}\left(P(1-B) - (1-B)P'\right)(F^+)'\right)_F$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left((F^+)^{-1}(BP' - PB)(F^+)'\right)_F = 0. \tag{2.6}$$

Расписывая (2.6) по компонентам и вводя обозначение $\left(\overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(in)}\right)_{k\ell} = (F^+)'_{kn}(F^+)^{-1}_{i\ell}$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\left((BP' - PB)\,\overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(in)}\right) = 0 \quad (i \neq n), \tag{2.7}$$

где tr обозначает матричный след. Далее, учитывая, что $P_D = 0$, $\mathrm{tr}(\Psi_D \Phi_F) = 0$ и вводя диагональные матрицы H_α, $\alpha = 1,\dots,N$ $((H_\alpha)_{nn} = \delta_{\alpha n}$, $n = 1,\dots,N$, где $\delta_{\alpha n}$ – символ Кронекера), перепишем (2.7) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\left(H_\alpha P'(x,t) - P(x,t)H_\alpha\right)B_\alpha\, \overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F(x,t,\lambda)\right) = 0, \tag{2.8}$$

где $B(\lambda,t) = \sum_{\alpha=1}^{N} B_\alpha(\lambda,t)\, H_\alpha$ и $B_\alpha(\lambda,t)$ – произвольные функции.

В формулу (2.8) входят произведения $B_\alpha(\lambda)\,\overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F(x,t,\lambda)$ заданные локально, в каждой точке λ пучка (I.I). Спектральная задача (I.I) позволяет преобразовать это локальное по λ произведение в глобальное, определенное уже на всем пучке в целом. Действительно, как показано в приложении, имеет место соотношение

$$\Lambda_A\, \overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F = \lambda\, \overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F \tag{2.9}$$

где $\Lambda\Phi = -i\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \left(P'(x)\,\Phi(x) - \Phi(x)\,P(x)\right)_F -$

$$+\, i\,P'(x)\int_x^{\infty}(P'\Phi - \Phi P)_D - i\int_x^{\infty}(P'\Phi - \Phi P)_D\, P(x)$$

и $\displaystyle\int_x^{\infty} f \overset{df}{=} \int_x^{\infty} dy\, f(y)$; $\Lambda_A\,\Phi \overset{df}{=} (\Lambda\Phi)_A$

Тем самым, для любой целой функции $B_\alpha(\lambda,t)$

$$B_\alpha(\lambda,t)\,\overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F = B_\alpha(\Lambda_A,t)\,\overset{++}{\widetilde{\Phi}}{}^{(F)}_F \tag{2.I0}$$

В силу (2.I0) уравнение (2.8) эквивалентно

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, tr \Big(\sum_{\alpha=1}^{N} \big(H_\alpha P'(x,t) - P(x,t) H_\alpha\big) B_\alpha(\Lambda_A, t) \overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{(F)}_F = 0 \qquad (2.\mathrm{II})$$

Наконец, равенство (2.II) можно переписать следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr \Big(\overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{(F)}_F(x,t,\lambda) \Big(\sum_{\alpha=1}^{N} B_\alpha(\Lambda^+_A, t) \big(H_\alpha P' - P H_\alpha\big) \Big)_F \Big) = 0, \qquad (2.\mathrm{I2})$$

где Λ^+ – оператор сопряженный Λ относительно билинейной формы $\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, tr\, (\Psi_F(x)\, \Phi_F(x))$:

$$\Lambda^+_x \Phi = i \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \big(\Phi(x) P'(x) - P(x) \Phi(x)\big)_F + \qquad (2.\mathrm{I3})$$

$$+ i \int_{-\infty}^{x} (\Phi P' - P \Phi)_D \cdot P'(x) - i P(x) \int^{x} (\Phi P' - P \Phi)_D ,$$

где $\int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{x} dy\, f(y)$, $\quad \Lambda^+_A \Phi \overset{\text{def}}{=} -\Lambda^+ \Phi_A$.

Формула (2.I2) представляет собой соотношение между P, P' и F^+, $(F^+)'$, при преобразованиях типа (2.3). Равенство (2.I2) выполняется, если

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \big(B_\alpha(\Lambda^+_A, t) (H_\alpha P' - P H_\alpha) \big)_F = 0. \qquad (2.\mathrm{I4})$$

Таким образом мы нашли вид преобразований потенциала $P(x,t)$, соответствующих преобразованиям матрицы перехода типа (2,3): эти преобразования потенциала даются соотношением (2.I4), где $B_\alpha(\lambda, t)$ – произвольные мероморфные функции.

Закон преобразования (2.3) матрицы перехода можно представить в более явном виде, исключив матрицу С. Переписывая (2.2) с учетом (2.4), имеем

$$S - S' = i S I + S \big(S^{-1}(1-B) S'\big)_F , \qquad (2.\mathrm{I5})$$

где

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \big((F^+)^{-1} (P' - P)(F^+)' \big)_D .$$

Принимая во внимание соотношение (см. приложение, (П6))

$$(\Lambda_A - \lambda) \overset{++}{\tilde{\Phi}}{}^{(nn)}_F = \big(P'(x) \overset{++}{\delta}{}^{(nn)} - \overset{++}{\delta}{}^{(nn)} P(x) \big)_A$$

получаем

$$I_{nn}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr \big[(P' - P)(\Lambda_A - \lambda)^{-1} \big(P' \overset{++}{\delta}{}^{(nn)} - \overset{++}{\delta}{}^{(nn)} P \big)_A \big] .$$
$$(2.\mathrm{I6})$$

Тем самым,, преобразование элементов матрицы перехода определяется соотношением

$$\sum_{\ell=1}^{N} \Big(\delta_{i\ell} - \sum_{k \neq n} S_{ik} (S^{-1})_{k\ell} (1 - B_\ell) \Big) S'_{\ell n} = (1 - i I_{nn}) S_{in} \qquad (2.\mathrm{I7})$$
$$(i, n = 1, \dots, N)$$

где $I(\lambda, t)$ дается формулой (2.I6).

Соотношение (2.I7) существенно упрощается, если выполняются равенства:

$$i I_{nn} = 1 - B_{nn} - \big(S^{-1}(1-B) S'\big)_{nn} \quad (n = 1, \dots, N), \qquad (2.\mathrm{I8})$$

т.е. $C = B$

В этом случае

$$S' = B^{-1} S B . \qquad (2.\mathrm{I9})$$

Отметим, что диагональные элементы матрицы перехода S не меняются при преобразованиях (2.I9). В общем случае

$$S'_{nn} = \frac{C_n}{B_n} S_{nn} \quad (n = 1, \dots, N) \qquad (2.20)$$

Закон преобразования (2.I7) элементов матрицы перехода достаточно сложен. Трансформационные же свойства данных рассеяния, являющихся отношениями некоторых недиагональных элементов $S(\lambda, t)$ к диагональным, крайне просты. Из (2.3) имеем $(B_{ik} = B_i \delta_{ik}, \quad C_{ik} = C_i \delta_{ik})$

$$\left(\frac{S_{kn}}{S_{nn}}\right)' = \frac{B_n(\lambda,t)}{B_k(\lambda,t)} \cdot \frac{S_{kn}}{S_{nn}}, \quad \left(\frac{(S^{-1})_{nk}}{(S^{-1})_{nn}}\right)' = \frac{B_k(\lambda,t)}{B_n(\lambda,t)} \cdot \frac{(S^{-1})_{nk}}{(S^{-1})_{nn}}, \qquad (2.2\mathrm{I})$$
$$(n, k = 1, \dots, N)$$

$$\left(\frac{(S^{-1})_{kn}}{(S^{-1})_{nn}}\right)' = \frac{C_n(\lambda,t)}{C_k(\lambda,t)} \cdot \frac{(S^{-1})_{kn}}{(S^{-1})_{nn}}, \quad \left(\frac{S_{nk}}{S_{nn}}\right)' = \frac{C_k(\lambda,t)}{C_n(\lambda,t)} \cdot \frac{S_{nk}}{S_{nn}} \qquad (2.2\mathrm{I})$$
$$(n, k = 1, \dots, N)$$

Впервые преобразования типа (2.I4) рассматривались в работах Калоджеро (N = 2) (см. [9,I0]). Обобщение на произвольное N дано в [25,26] . Аналогичные преобразования можно построить и для других спектральных задач, в частности, для квадратичной по λ задачи [27] (N = 2) и для произвольного полиноминального по λ пучка [28] (N - любое).

Ш. ОБЩИЙ ВИД ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем разделе мы построили бесконечномерную группу преобразований (2.I4),(2.3), действующих на всем многообразии потенциалов $P(x,t)$ и соответственно, на множестве матриц перехода $S(\lambda,t)$. Эта группа содержит преобразования различного типа. Рассмотрим ее однопараметрическую подгруппу, заданную матрицей

$$B = \exp\left(-i\int_t^{t'} ds \sum_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha(\lambda,s) H_\alpha\right), \qquad (3.1)$$

где $\Omega_\alpha(\lambda,s)$ $(\alpha = 1,\dots,N)$ – некоторые функции (вообще говоря, произвольные, мероморфные по λ) и C = B. Эта группа преобразований является, как легко видеть, группой сдвигов по времени t.

$$S \to S'(\lambda,t) = \exp\left(i\int_t^{t'} ds \sum_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha(\lambda,s) H_\alpha\right) \cdot \qquad (3.2)$$

$$\cdot S(\lambda,t)\exp\left(-i\int_t^{t'} ds \sum_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha(\lambda,s) H_\alpha\right) = S(\lambda,t').$$

Отображение $S(\lambda,t) \to P(x,t)$, задаваемое уравнениями обратной задачи рассеяния [I] , индуцирует соответствующее преобразование $P(x,t) \to P'(x,t) = P(x,t')$. Оно в силу (2.I4) имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\exp\left(-i\int_t^{t'} ds\, \Omega_\alpha(\Lambda_A^+, s)\right)\left(H_\alpha P(x,t') - P(x,t) H_\alpha\right)\right)_F = 0. \qquad (3.3)$$

При этом оператор Λ^+ дается формулой (2.I3), в которой надо положить $P'(x,t) = P(x,t')$. При N = 2 такого рода соотношения были найдены в [9] .

Формула (3.3) определяет в неявном виде эволюцию потенциала $P(x,t)$ во времени: $P(x,t) \to P(x,t')$. Различным

функциям $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ соответствуют различные законы эволюции $P(x,t)$.

Рассмотрим инфинитезимальный сдвиг: $t \to t' = t + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$.
При этом $P(x,t) \to P(x,t+\varepsilon) = P(x,t) + \varepsilon\frac{\partial P}{\partial t}$,

$$B_\alpha(s,\lambda) = 1 - i\varepsilon\,\Omega_\alpha(\lambda,s). \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и удерживая члены первого порядка по ε , получаем

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\Omega_\alpha(L_A^+, t)[H_\alpha, P]\right)_F = 0, \qquad (3.5)$$

где $L^+ \overset{def}{=} \Lambda^+(P' = P)$, т.е.

$$L^+ = i\frac{\partial}{\partial x} + [P(x), \cdot\,]_F + i\left[P(x), \int_{-\infty}^{x}[P,\cdot\,]_D\right]. \qquad (3.6)$$

Соответственно для матрицы перехода имеем

$$\frac{dS}{dt} = i\left[\sum_{\alpha=1}^{N}\Omega_\alpha(\lambda,t) H_\alpha,\ S(\lambda,t)\right]. \qquad (3.7)$$

Таким образом, в качестве инфинитезимальной формы преобразований (3.3) мы получили дифференциальные уравнения в частных производных. Соотношение (3.3), не содержащее производных $\partial P(x,t)/\partial t$, представляет собой "проинтегрированное" по времени уравнение (3.5) и в неявном виде решает задачу Коши для него.

В форме (3.5) можно записать более широкий класс уравнений, когда P и Ω_α зависят от нескольких переменных временного типа. Это уравнения [26]

$$\left(\sum_{i=1}^{m} f_i(L_A^+, t_1,\dots,t_m)\frac{\partial P(x,t_1,\dots,t_m)}{\partial t_i} - \qquad (3.8)$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N}\Omega_\alpha(L_A^+, t_1,\dots,t_m)[H_\alpha, P]\right)_F = 0,$$

где $f_i(\lambda, \ldots)$ [illegible]
произвольные функции, целые по λ.
В аналогичной форме можно представить уравнения, связанные со спектральной задачей (I.I), в случаях, когда среди элементов матрицы A есть равные и когда матрица A не диагональная [29].*

Дифференциальные уравнения (3.5) представляют собой уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния с помощью линейной спектральной задачи (I.I). Используя уравнения обратной задачи (уравнения Гельфанда - Левитана - Марченко) и простую зависимость (3.7) матрицы перехода S от времени, можно найти широкий класс точных решений уравнений типа (3.5) (многосолитонные решения) (см. [I,2,I3,I4]).

Среди уравнений (3.5) содержится большинство дифференциальных уравнений, проинтегрированных МОЗР. Различные конкретные уравнения соответствуют различным N, A, Ω_α и $P(x,t)$. Приведем несколько примеров:

1. $\underline{N=2.}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$.

При $\Omega_1 = -\Omega_2 = -2\lambda^2$ имеем систему

$$i\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2q^2 r = 0, \qquad (3.9)$$

$$i\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2r^2 q = 0.$$

При $r = \pm q^*$ система (3.9) сводится к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) $i\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \pm 2|q|^2 q = 0$.
Если $\Omega_1 = -\Omega_2 = -4\lambda^3$, то из (3.5) получаем

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6qr\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad (3.10)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} + 6qr\frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

---

* Вид уравнений, интегрируемых с помощью (I.I), был также найден (в форме менее общей чем (3.5)) в работе [30].

Система (3.I0) в качестве частных случаев содержит хорошо известные уравнения: α) уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6q\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad (r=1)$$

и β) модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (мКдВ)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 6q^2\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad (r=q).$$

2. $\underline{N}$ <u>- произвольное</u>. При $\Omega_i = b_i \lambda$ $(i = 1, \ldots, N)$ имеем

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial t} - \frac{b_i - b_k}{a_i - a_k}\frac{\partial P_{ik}}{\partial x} - i\sum_{m=1}^{N} \gamma_{ikm} P_{im} P_{mk} = 0 \qquad (3.11)$$
$$(i, k = 1, \ldots, N),$$

где $\gamma_{ikm} = \frac{b_i - b_m}{a_i - a_m} - \frac{b_m - b_k}{a_m - a_k}$. Система уравнений (3.II) описывает резонансно взаимодействующие волны в нелинейных средах [I,24,3I].
Если выбрать

$$A = \begin{pmatrix} I_N & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \ldots 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{matrix} \\ u_1^* \ldots u_N^* & 0 \end{pmatrix},$$

где I_N - единичная, а 0 - нулевая матрицы порядка N и $\Omega_1 = \ldots = \Omega_N = -\Omega_{N+1} = -2\lambda^2$, то получим N - компонентное нелинейное уравнение Шредингера $i\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + 2u_\alpha \sum_{\beta=1}^{N} u_\beta^* u_\beta = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$, рассмотренное в [32].

Напомним, что в (3.5) $\Omega_\alpha(\lambda, t)$ - произвольные меромофные функции. Для целых функций $\Omega_\alpha(\lambda)$ явный вид уравнений находится прямым вычислением: разложим $\Omega_\alpha(L_A^+)$ в ряд по L_A^+ и воспользуемся (3.6). В общем случае Ω_α можно представить в виде $\Omega_\alpha = \tilde{\Omega}_\alpha(\lambda)/f(\lambda)$, где $\tilde{\Omega}_\alpha(\lambda)$, $f(\lambda)$ - целые функции. Тем самым, уравнение (3.5) с мероморфными Ω_α эквивалентно уравнению

$$\left(f(L_A^+, t)\frac{\partial P}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{N} \hat{\Omega}_\alpha(L_A^+, t)[H_\alpha, P] \right)_F = 0, \qquad (3.I2)$$

где $f(\lambda, t)$ и $\hat{\Omega}_\alpha(\lambda, t)$ - целые функции.

При сингулярных $\Omega_\alpha(\lambda)$ можно также воспользоваться приемом, предложенным в [3.3] ($N = 2$).

Рассмотрим уравнение (3.5) с

$$\Omega_\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\alpha(t)\,(\lambda - \lambda_{0n})^{-n} \quad (\alpha = 1, \ldots, N). \qquad (3.13)$$

В приложении показано, что

$$(L_A^+ - \lambda)[A, \Pi_\alpha] = -[H_\alpha, P(x,t)], \qquad (3.14)$$

где

$$\Pi_\alpha = F^+ H_\alpha (S_D)^{-1} (F^-)^{-1} \qquad (3.15)$$

Из (3.14) вытекает

$$(L_A^+ - \lambda_{0n})^{-n} [H_\alpha, P] = \frac{(-1)}{(n-1)!} \left[A, \left.\frac{\partial^{n-1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial \lambda^{n-1}}\right|_{\lambda=\lambda_{0n}}\right]. \qquad (3.16)$$

В результате уравнение (3.5) с функциями Ω_α вида (3.13) записывается в следующей форме

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + i\left[A, \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^\alpha(t) \frac{(-1)}{(n-1)!} \left.\frac{\partial^{n-1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial \lambda^{n-1}}\right|_{\lambda=\lambda_{0n}}\right] = 0. \qquad (3.17)$$

Уравнение, которому удовлетворяет величина $\Pi_\alpha(x,t,\lambda)$ легко находится из определения (3.15) и формулой (П.I). Оно имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x} = i\lambda [A, \Pi_\alpha] + i[P, \Pi_\alpha]. \qquad (3.18)$$

Решая (3.18) относительно Π_α и представляя в (3.17), можно найти уравнение для $P(x,t)$.

Отметим, что в силу сингулярности $\Omega_\alpha(\lambda)$ (3.13) необходимо, чтобы $S_F(\lambda_{0n}) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (при $N = 2$ см [33,34]).

В результате

$$\Pi_\alpha(x,t,\lambda_{0n}) = F^-(x,t,\lambda_{0n})\, H_\alpha \left(F^-(x,t,\lambda_{0n})\right)^{-1}. \qquad (3.19)$$

Рассмотрим более подробно случай $\Omega_\alpha = \omega^\alpha \lambda^{-1}$. Имеем

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - i[A, \Pi(x,t,0)] = 0, \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial \Pi(x,t,0)}{\partial x} = i\left[P(x,t), \Pi(x,t,0)\right], \qquad (3.21)$$

где $\Pi(x,t,0) = \sum_{\alpha=1}^{N} \omega^\alpha \Pi_\alpha(x,t,0).$

В силу (3.19)

$$\Pi(x,t,0) = F^-(x,t,0)\, Y \left(F^-(x,t,0)\right)^{-1}, \qquad (3.22)$$

где $Y = \sum_{\alpha=1}^{N} \omega^\alpha H_\alpha$, а из (I.I) имеем

$$P(x,t) = i F^-(x,t,0) \frac{\partial}{\partial x} \left(F^-(x,t,0)\right)^{-1}. \qquad (3.23)$$

Уравнение (3.21) удовлетворяется в силу (3.22) и (3.23) тождественно, а уравнение (3.20) принимает вид $\left(U(x,t) \overset{df}{=} (F^-(x,t,0))^{-}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}\right)_F - [A, U^{-1} Y U] = 0. \qquad (3.24)$$

Уравнение (3.24) явно инвариантно относительно преобразований Лоренца $x \to x' = \rho x$, $t \to t' = \rho^{-1} t$, $U(x,t) \to U'(x',t') = U(x,t)$

(y, t - конусные переменные). Оно имеет также инвариантный групповой смысл, где $u(x,t) \in$ локальной группе $GL(N,C)$, а $P(x,t) = i u^{-1}(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ $\in$ локальной алгебре $gl(N,C)$.

При $N = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_{12} = P_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ уравнение (3.24) - это уравнение синус-Гордона [32]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \sin \varphi. \tag{3.25}$$

При $N \geqslant 3$ оно представляет собой обобщение этого уравнения на группу $GL(N,C)$ и впервые было рассмотрено в работах [35-37]. В форме (3.24) оно было выведено в [26]. При недиагональной матрице A см. [29]. Обобщение уравнения синус-Гордона на произвольную классическую группу Ли ($SL(N,C)$, $SO(N,C)$, $Sp(N,C)$) и их вещественные формы $SU(N)$, $SO(N)$, $Sp(N)$ дано в [38].

Уравнения (3.24) тесно связаны с другими важными релятивистски-инвариантными уравнениями в двумерном пространстве времени - уравнениями главного кирального поля [37]. В работах [36,37] было показано, что уравнения (3.24) калибровочно эквивалентны уравнениям главного кирального поля на пространстве флагов $GL(N,C)/H$, где H - группа диагональных матриц.

Таким образом, среди уравнений, интегрируемых с помощью спектральной задачи (I.I), содержится широкий класс релятивистски-инвариантных уравнений (3.24). Частными случаями этих уравнений (при $N \geqslant 3$) являются уравнение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = \exp 2\varphi - \exp(-\varphi)$, рассмотренное в [39,2I], уравнения двумеризованной цепочки Тода [39] и различные обобщения σ - модели [40] (см. [29])

Отметим в заключение, что линейная часть нелинейных уравнений (3.5) имеет вид

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - i \sum_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)_A \right) [H_\alpha, P] = 0, \tag{3.26}$$

где $\Omega_\alpha(\lambda)$ - те же самые функции, что и в (3.5). Тем самым, нелинейное уравнение (3.5) получается из своей линейной части

заменой $i\frac{\partial}{\partial x} \to L^+$. Это обстоятельство приводит к большому подобию ряда свойств нелинейных уравнений (3.5) и их линеаризованных вариантов. Роль оператора L^+ ($N = 2$) и аналогия $i\frac{\partial}{\partial x} \longleftrightarrow L^+$ подчеркивалась в работе [3].

IУ. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Различные дифференциальные уравнения вида (3.5) характеризуются своими функциями $\Omega_\alpha(\lambda, t)$ и соответственно различными законами эволюции (3.7) матрицы перехода. Обратим теперь внимание на то, что при любых Ω_α диагональные элементы матрицы S от времени не зависят

$$\frac{d}{dt} S_D(\lambda) = 0. \tag{4.I}$$

Не зависят от времени и все свойства $S_{nn}(\lambda)$, в частности, число нулей и их расположение.

Таким образом, $S_D(\lambda)$ являются при каждом λ интегралами движения уравнений вида (3.5). Из этого континуального набора неявных интегралов движения можно извлечь, следуя [24], счетные наборы явных и локальных интегралов движения.

Представим фундаментальную матрицу - решение (I.I) $F^+(x,t,\lambda)$ в следующей форме:

$$F^+(x,t,\lambda) = R(x,t,\lambda) E(x,\lambda) \exp\left(\int_x^\infty dy\, \chi(y,\lambda,t) \right), \tag{4.2}$$

где $E = \exp i\lambda A x$, $\chi(y,\lambda,t)$ - диагональная матрица, а матрица R удовлетворяет условию $R_D = I$.

Из (4.2) имеем

$$\ln S_D(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \chi(y,\lambda,t). \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) в (I.I) находим

$$\frac{\partial R}{\partial x} + i\lambda [R, A] - R\chi - iPR = 0. \tag{4.4}$$

Разлагая R и χ в асимптотические ряды по λ^{-1}:

$$R(x,t,\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} R^{(n)}(x,t), \tag{4.5}$$

$$\chi(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \chi^{(n)}(x,t),$$

получаем из (4.4) рекурентные соотношения

$$[R^{(1)}, A] = P,$$

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial x} + i[R^{(n+1)}, A] - \chi^{(n)} - \sum_{p=1}^{n} R^{(p)} \chi^{(n-p)} - iPR^{(n)} = 0 \quad (n=1,2,\ldots) \tag{4.6}$$

Далее, из (4.6) вытекает, что

$$\chi^{(n)} = -i\left(PR^{(n)}\right)_D \quad (n=1,2,\ldots), \tag{4.7}$$

а $R^{(n)} = R^{(n)}_F$ определяются из рекурентных соотношений

$$R^{(1)} = -P_A,$$

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial x} + i[R^{(n+1)}, A] + i\sum_{p=1}^{n-1} R^{(p)}\left(PR^{(n-p)}\right)_D - i\left(PR^{(n)}\right)_F = 0 \quad (n=1,2,\ldots). \tag{4.8}$$

Заметим теперь, что коэффициенты $C^{(n)}$ разложения $\ln S_D(\lambda)$ в асимптотический ряд по λ^{-1}

$$\ln S_D(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} C^{(n)} \tag{4.9}$$

также являются интегралами движениями. Из формул (4.3),(4.9)

следует

$$C^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \chi^{(n)}(x,t) \quad (n=1,2,\ldots). \tag{4.10}$$

Соотношения (4.7),(4.8) позволяют вычислять все эти интегралы движения $C^{(n)}$ $(n=1,2,\ldots)$ рекуррентным образом. Отметим, что в силу $\det S = 1$ $\sum_{m=1}^{N} C^{(n)}_{mm} = 1$. Тем самым, имеется N - I бесконечных серий независимых интегралов движения.

Обратим внимание на важное свойство интегралов движения $C^{(n)}$ - они являются универсальными. Действительно, при их построении мы использовали факт независимости $S_D(\lambda)$ от времени и самое спектральную задачу (I.I), но не вид функций $\Omega_\alpha(\lambda,t)$. Тем самым, функционалы $C^{(n)}$ (4.I0; 4.7; 4.8) являются интегралами движения для любого уравнения вида (3.5) (с любым $\Omega_\alpha(\lambda)$). Универсальность интегралов движения $C^{(n)}$ говорит о том, что их существование не связано с конкретным устройством уравнений (3.5), а только с тем, что эти уравнения имеют вид (3.5). Точнее - с существованием спектральной задачи (I.I) и формой (3.7) закона эволюции матрицы перехода.

Приведем в качестве примера несколько первых интегралов движения в случае $N = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$ (общие множители перед интегралами мы опускаем):

$$C^{(1)}_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, rq,$$

$$C^{(2)}_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, r\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$C^{(3)}_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(r\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + r^2 q^2\right), \tag{4.II}$$

$$C^{(4)}_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(r\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 4r^2 q\frac{\partial q}{\partial x} + q^2 r\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

$$C^{(5)}_{11} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left(r \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 6r \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} + 6r^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 6r^2 q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + r q^2 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2r^3 q^3 \right).$$

Отметим одно общее свойство интегралов движения $C^{(n)}$. Все они имеют вид $C^{(n)} = C^{(n)}_0 + (\ldots)$, где $C^{(n)}_0$ – выражение билинейное по полям. Нетрудно убедиться, что $C^{(n)}_0$ являются интегралами движения линеаризованных уравнений (3.5) (т.е. уравнений (3.26)). В частности, $C^{(n)}_{11_0}$ вида (4.II) $\left(C^{(n)}_{11_0} = \int dx\, r \frac{\partial q}{\partial x^n} \right)$ суть интегралы движения линеаризованных систем (3.9), (3.I0), т.е.

$$i \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0, \qquad i \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial^3 r}{\partial x^3} = 0.$$

Таким образом, интегралы движения нелинейных уравнений вида (3.5) представляют собой деформацию (добавление нелинейностей) интегралов движения соответствующих линейных уравнений. Более подробно законы сохранения линейных уравнений и их связь с законами сохранения нелинейных интегрируемых уравнений рассматривались в обзоре [23].

Среди интегралов движения $C^{(n)}$ имеются как хорошо известные, обычные, так и интегралы движения нового типа. Так, например, для нелинейного уравнения Шредингера ($r = q^*$) первые три интеграла (4.II)

$$C_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx |q|^2, \quad C_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, q \frac{\partial q^*}{\partial x}, \quad C_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2 + |q|^4 \right)$$

представляют собой заряд, импульс и энергию. Остальные же интегралы $C^{(n)}$ $(n \geq 4)$ непосредственного физического смысла не имеют. Их принято называть высшими интегралами движения. Существование высших интегралов движения является характерной особенностью уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР, и приводит к весьма специальному устройству динамики соответствующих нелинейных систем (см.например [23]). Во всех известных случаях дифференциальные уравнения либо обладают бесконечными наборами высших интегралов движения, либо не обладают таковыми вообще.

Система дифференциальных уравнений (3.5) для $N^2 - N$ зависимых переменных $P_{ij}(x,t)$ называется системой в общем положении. Если же на $P_{ij}(x,t)$ наложены некоторые условия (связи), совместные с (3.5), то говорят, что в общей системе (3.5) произведена редукция (о проблеме редукции см. [41-43, 37, 39]). Простейшие редукции мы уже рассматривали в предыдущем разделе: эти связи $r = q^*$, $r = 1$ и $r = q$, приводящие общие системы (3.9),(3.I0) к нелинейному уравнению Шредингера, уравнениям КдВ и мКдВ. При различных редукциях интегралы движения $C^{(n)}$ ведут себя по-разному. Например, при $r = q^*$ интегралы (4.II) по-существу не меняются (за исключением замены $r \to q^*$). В случаях же $r = q$ и $r = 1$ ситуация совершенно иная, а именно: подинтегральные выражения в $C^{(2)}$, $C^{(4)}$ и вообще во всех $C^{(2n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ превращаются в полные производные и, тем самым, все $C^{(2n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тождественно равны нулю. Явление исчезновения (обращения в тождественный нуль) некоторых интегралов движения наблюдается и для других редукций общей системы (3.5). Для уравнения $\partial^2\varphi / \partial t \partial x = \exp 2\varphi - \exp(-\varphi)$ оно было исследовано в работах [39,34].

У. ГАМИЛЬТОНОВА И ЛАГРАНЖЕВА СТРУКТУРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение типа (3.5) с

$$\Omega_\alpha(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^\alpha_n(t) \lambda^n + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}^\alpha_n(t) (\lambda - \lambda_{0n})^{-n}, \quad (5.I)$$

$\omega^\alpha_n(t)$ и $\tilde{\omega}^\alpha_n(t)$ – произвольные функции. Перепишем соотношение (3.I4) в виде

$$(L^+_A - \lambda)^{-1} [H_\alpha, P] = -[A, \Pi_\alpha(x, t, \lambda)]. \quad (5.2)$$

Из (5.2) имеем

$$\left(L_A^{+}\right)^n \left[H_\alpha, P\right] = \frac{1}{(n+1)!} \left[A, \left. \frac{\partial^{n+1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial (\lambda^{-1})^{n+1}} \right|_{\lambda=\infty} \right], \tag{5.3}$$

$$\left(L_A^{+} - \lambda_0\right)^{-n} \left[H_\alpha, P\right] = \frac{(-1)}{(n-1)!} \left[A, \left. \frac{\partial^{n-1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} \right|_{\lambda=\lambda_0} \right]. \tag{5.4}$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

Равенство (5.3) получается из асимптотического разложения (5.2) по λ^{-1}. В результате уравнение (3.5)эквивалентно следующему

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left[A, R\right] \tag{5.5}$$

где

$$R = i \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha(t) \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{\partial^{n+1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial (\lambda^{-1})^{n+1}} \right|_{\lambda=\infty} + i \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}_n^\alpha(t) \frac{(-1)}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} \Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} \right|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{5.6}$$

Воспользуемся теперь соотношением (2.2). Из него вытекает

$$\delta S_{in} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{k,\ell=1}^{N} \delta P_{k\ell}(x,t)\, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\ell k}(x,t,\lambda), \tag{5.7}$$

где δP, δS – произвольные вариации совместные с (I.I). Тем самым

$$\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\ell k}(x,t,\lambda) = i \frac{\delta}{\delta P_{k\ell}(x,t)} S_{in}, \quad (i,n,k,\ell = 1, \dots, N), \tag{5.8}$$

где $\frac{\delta}{\delta P}$ – вариационная производная. Из (5.8) и определения Π_α (3.I5) имеем:

$$\Pi_\alpha(t,x,\lambda) = i \frac{\delta}{\delta P^T(x,t)}\, tr\left(H_\alpha \ln S_D(\lambda)\right) \tag{5.9}$$

$$(\alpha = 1, \dots, N),$$

где P^T обозначает транспонированную матрицу Р. Вариационное равенство (5.9) является основным для доказательства гамильтоновости уравнений (3.5). Действительно, используя (5.9), перепишем уравнение (5.5) в виде

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left[A, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P^T(x,t)}\right], \tag{5.I0}$$

где

$$\mathcal{H} = 2 \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha(t) \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{\partial^{n+1} tr\left(H_\alpha \ln S_D(\lambda)\right)}{\partial (\lambda^{-1})^{n+1}} \right|_{\lambda=\infty} + 2 \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\omega}_n^\alpha(t) \frac{(-1)}{(n-1)!} \cdot \left. \frac{\partial^{n-1} tr\left(H_\alpha \ln S_D(\lambda)\right)}{\partial \lambda^{n-1}} \right|_{\lambda=\lambda_{0n}} \tag{5.II}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (5.I0) может быть записано в гамильтоновой форме

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \left\{ P(x,t), \mathcal{H} \right\} \tag{5.I2}$$

с гамильтонианом $\mathcal{H}$ (5.II) и со скобкой Пуассона

$$\left\{ \mathcal{F}(P), \mathcal{H}(P) \right\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr\left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta P(x,t)} \left[A, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P(x,t)}\right] \right). \tag{5.I3}$$

Тот факт, что скобка (5.I3) является скобкой Пуассона (кососимметричность , тождество Якоби) легко проверяется непосредственно. Величины $P(x,t)$ и $2\left(P^T(x,t)\right)_A$ образуют пару канонически сопряженных (матричных) переменных. В качестве канонических координат можно выбрать например, $P_{ik}(x,t)$ $(i<k;\ i,k=1,\dots,N)$, а в качестве канонических импульсов $2\frac{1}{a_k - a_i} P_{ki}(x,t)$ $(i<k;\ i,k=1,\dots$

В простейшем случае $N = 2$ имеем хорошо известную скобку Пуассона [I,33]

$$\left\{ \mathcal{F}, \mathcal{H} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta r} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta r} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta q} \right). \tag{5.I4}$$

Отметим, что скобка Пуассона (5.I3) одна и та же для всех уравнений (3.5). Таким образом, фазовое пространство всех уравнений, интегрируемых с помощью спектральной задачи (I.I), имеет в общем положении универсальную симплектическую структуру.

Явный вид гамильтонов (5.II) легко вычисляется в случае целой функции $\Omega_\alpha(\lambda, t)$. Действительно, т.к. $\frac{1}{n!}\frac{\partial^n \ln S_2(\lambda)}{\partial(\lambda^{-1})^n}\Big|_{\lambda=\infty} = C^{(n)}$, где $C^{(n)}$ – диагональная матрица интегралов движения (4.I0), то для уравнения (3.5) с $\Omega_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha(t)\lambda^n$ гамильтониан равен

$$\mathcal{H} = 2\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha(t)\, tr\left(H_\alpha C^{(n+1)}\right) = \tag{5.I5}$$

$$= 2\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^\alpha(t)\, C_{\alpha\alpha}^{(n+1)}.$$

Для уравнения (3.24) $\mathcal{H} = 2\, tr(Y \ln S_2(0))$.

Все интегралы движения $C_{mm}^{(n)}$ $(m=1,\dots,N,\ n=1,2,\dots)$ находятся в инволюции с гамильтонианом $\mathcal{H}$ ($\{C_{mm}^{(n)}, \mathcal{H}\}=0$). Для $C_{mm}^{(n)}$ (4.I0) и $\mathcal{H}$ (5.I5) в этом можно убедиться непосредственным вычислением. Непосредственным вычислением можно также проверить, что $\{C_{mm}^{(n)}, C_{kk}^{(\ell)}\} = 0$ $(m,k=1,\dots,N;\ n,\ell=1,2,\dots)$. Инволютивность всех интегралов движения $C_{mm}^{(n)}$, однако, немедленно следует из их универсальности. Действительно, любой $C_{mm}^{(n)}$ вида (4.I0) является интегралом движения для уравнения (3.5) с любым гамильтонианом вида (5.I5) т.е. $\{C_{mm}^{(n)}, \mathcal{H}_{(5.15)}\} = 0$. Выбирая произвольные функции ω_n^α так, что $\mathcal{H} = C_{kk}^{(\ell)}$ имеем $\{C_{mm}^{(n)}, C_{kk}^{(\ell)}\} = 0$ при любых значениях m, k, ℓ, n.

Скобка (5.I3) не единственная скобка Пуассона, соответствующая уравнениям типа (3.5). Действительно, рассмотрим скобку

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}_n = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr\left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta P^T}(L_A^+)^n\left[P, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P^T}\right]\right) \tag{5.I6}$$

Прямыми вычислениями можно показать, что (5.I6) задает скобку Пуассона. Нетрудно далее убедиться, что уравнение (3.5), например с $\Omega_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^\alpha(t)\lambda^m$ может быть записано следующим

образом

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \{P, \mathcal{H}_{-n}\}_n, \tag{5.I7}$$

где

$$\mathcal{H}_{-n} = 2\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^\alpha(t)\, C_{\alpha\alpha}^{(m+1-n)} \tag{5.I8}$$

а n – произвольное целое число. В частности, $\mathcal{H}_0$ равен гамильтониану (5.I5), а $\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}_0 = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}_{(5.15)}$. Существование иерархии скобок Пуасона типа (5.I6) для интегрируемых уравнений впервые было замечено в работе [44]. Затем она детально обсуждалась в работах [45–46].

Скобка Пуассона (5.I3) соответствует системе (3.5) в общем положении. При некоторых редукциях (например, редукция $r = q^*$, $N = 2$) она меняется незначительно (замена $r \to q^*$). Для другого же типа редукций она вообще теряет смысл. Например, при редукции $P = -P^T$ $\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}_{(5.15)} = 0$ для любых двух функционалов $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$. Тем не менее, редуцированные интегрируемые уравнения также являются гамильтоновыми. Техника, описанная в разделах П,Ш,У, позволяет вычислять скобки Пуассона и в этих случаях [26,38]. Гамильтонова структура интегрируемых уравнений рассматривалась также в [33] ($N = 2$) и обзоре [47].

Несколько слов о лагранжевой структуре уравнений (3.5). Поскольку эти уравнения гамильтоновы и скобка Пуассона (5.I3) является канонической, то построение лагранжиана $\mathcal{L}$ по гамильтониану $\mathcal{H}$ не представляет труда – достаточно воспользоваться обычным преобразованием Лежандра [49]. Тем самым, для уравнений вида (3.5) лагранжиан $\mathcal{L}$ равен

$$\mathcal{L} = -tr\left(P\,\frac{\partial P_A}{\partial t}\right) - \tilde{\mathcal{H}}, \quad \left(\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \tilde{\mathcal{H}}\right), \tag{5.I9}$$

где $\mathcal{H}$ дается формулой (5.II). Действительно, уравнение Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta P} = -\frac{\partial}{\partial t}(P_A)^T - \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}}{\delta P} = 0$$

эквивалентно, как нетрудно убедиться, уравнению (5.10)

Общая теорема о лагранжевости уравнений, интегрируемых с помощью произвольного рационального пучка, доказана в [48]. При редукции общей системы (3.5) вопрос о лагранжевости требует специального рассмотрения. Например, при редукции $P = -P^T$ лагранжиан (5.19) теряет смысл, т.к. $\operatorname{tr}\left(P\frac{\partial P_A}{\partial t}\right)=0$.

VI. ГРУППЫ СИММЕТРИИ

Существование интегралов движения $C^{(n)} (n=1,2,\ldots)$ указывает на некоторую симметрию уравнений (3.5). Находить преобразования симметрии можно различными способами (см. например [16–22]). Однако наиболее просто воспользоваться гамильтоновостью уравнений (3.5). Согласно правилам гамильтоновой механики (см.например [49]) каждый интеграл движения C является производящей функцией преобразования симметрии, в инфинитезимальной форме имеющего вид

$$\delta P = \varepsilon \{P, C\}, \tag{6.1}$$

где ε – параметр преобразования. При известных скобке Пуассона и интеграле движения C непосредственное вычисление дает нам δP.

Найдем явный вид преобразований симметрии для уравнений (3.5). Пусть $C = C^{(n)}_{mm}$. Из соотношений (5.3),(5.9) имеем

$$\left\{P, C^{(n)}_{mm}\right\} = i\left(\left(L^+_A\right)^{n-1}[H_m, P]\right)_F. \tag{6.2}$$

Следовательно, интеграл движения $C^{(n)}_{mm}$ связан с преобразованием симметрии

$$\delta_{(n,m)} P = i\varepsilon\left(\left(L^+_A\right)^{n-1}[H_m, P]\right)_F. \tag{6.3}$$

Множитель $(-1)^{n-1}$ мы включили в параметр ε. Приведем явный вид преобразований (6.3), связанных с первыми пятью интегралами движения (4.11) при $r = q^*$ (например, для нелинейного уравнения Шредингера):

$$C^{(1)}:\ \delta q = i\varepsilon_1 q,$$

$$C^{(2)}:\ \delta q = -\varepsilon_2\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$C^{(3)}:\ \delta q = -i\varepsilon_3\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2q|q|^2\right) = -\varepsilon_3\frac{\partial q}{\partial t},$$

$$C^{(4)}:\ \delta q = -i\varepsilon_4\left(\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial}{\partial x}\left(q|q|^2\right)\right) = -i\varepsilon_4\left(i\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(q|q|^2\right)\right),$$

$$C^{(5)}:\ \delta q = i\varepsilon_5\left(\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 8|q|^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2q^2\frac{\partial^2 q^*}{\partial x^2} + 6q^*\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + 4q\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2 + 6q|q|^4\right) = i\varepsilon_5\left(-\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2iq^2\frac{\partial q^*}{\partial t} - 4q\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2 + 2q^*\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 - 2q|q|^4\right). \tag{6.4}$$

Нетрудно проверить, что нелинейное уравнение Шредингера действительно инвариантно относительно преобразований (6.4). Первые три преобразования хорошо известны – это калибровочное преобразование, пространственный и временной сдвиги. Четвертое и пятое преобразования непосредственного геометрического смысла не имеют. Поскольку они содержат производные от q по независимым переменным второго порядка и выше, они вообще не могут быть интерпретированы как геометрические преобразования в двумерном пространстве (x, t). Отметим, что эти преобразования связаны с высшими интегралами движения $C^{(4)}$ и $C^{(5)}$. Для других уравнений высшие интегралы движения также порождают негеометрические (высшие) преобразования симметрии.

Является преобразование высшим или нет зависит от уравнения. Действительно, пусть имеется уравнение вида (3.5) с $\Omega_\alpha = \omega^\alpha \lambda^{n_0}$. Преобразования симметрии (6.3) будут для него высшими, если $n > n_0 + 1$. Рассмотрим теперь уравнение (3.5) с $\Omega_\alpha = \omega^\alpha \lambda^{n-1}$. Тогда предыдущее преобразование будет для него, как легко видеть, сравнивая (3.5) и (6.3), обычным сдвигом по времени. Тем самым, каждая высшая симметрия является сдвигом по времени для соответствующего высшего уравнения. Такая интерпретация высших симметрий обсуждалась в работе [50].

Важным свойством преобразований (6.3) является их рекуррентный характер, а именно

$$\delta_{(n+1,m)} P = \left(L_A^+ \, \delta_{(n,m)} P \right)_F . \qquad (6.5)$$

Поэтому для вычисления всех $\delta_n P$ достаточно знать $\delta_1 P$. Первым обратил внимание на существование и роль рекурсионного оператора типа L_A^+ (для уравнений семейства КдВ), по-видимому, Ленарт (см.[51]). Возможность вычисления рекурсионного оператора подобного L_A^+ без использования вспомогательной спектральной задачи (I.I) обсуждалась в[52].

Итак, каждому интегралу движения $C^{(m)}_{mn}$ соответствует однопараметрическая группа симметрии (6.3) и обратно. Поскольку интегралы движения находятся в инволюции, то соответствующие преобразования коммутируют. Таким образом,преобразования (6.5) с $n = 1, 2, \ldots$ образуют бесконечнопараметрическую группу. Общее преобразование из этой бесконечномерной группы симметрии можно представить в виде

$$\delta P = i \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\omega_\alpha (L_A^+) \, [H_\alpha, P] \right)_F \qquad (6.6)$$

где $\omega_\alpha(\lambda)$ $(\alpha = 1, \ldots N)$ – произвольные целые функции. Действительно, разлагая $\omega_\alpha(\lambda)$ в ряд по λ имеем

$$\delta P = i \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{\alpha n} \left((L_A^+)^n \, [H_\alpha, P] \right)_F , \qquad (6.7)$$

т.е. суперпозицию преобразований вида (6.5), параметрами которых являются коэффициенты $\varepsilon_{\alpha n}$ разложения функций ω_α.

Преобразования, относительно которых инвариантны уравнения (3.5), можно найти, и не используя гамильтоновость этих уравнений. А именно, рассмотрим инфинитезимальные преобразования (2.I4) ($B_\alpha = 1 - i\omega_\alpha$). Они имеют, как легко видеть, форму (6.7). Непосредственными вычислениями можноубедиться, что преобразования (6.7) или (6.3) являются преобразованиями симметрии для уравнений (3.5).

Подчеркнем, что преобразования (6.6) (или (6.3)) являются преобразованиями симметрии для любого уравнения вида (3.5). Универсальность бесконечномерной абелевой группы симметрии имеет тот же характер, что и универсальность интегралов движения. При редукциях общей системы часть преобразований симметрии (подобно интегралам движения) может исчезать.

Отметим наконец, что линейная по P часть преобразований (6.6), имеющая вид

$$\delta_c P = i \sum_{\alpha=1}^{N} \omega_\alpha \left(\left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)_A \right) [H_\alpha, P] \qquad (6.8)$$

есть преобразование симметрии линейных уравнений (3.26). Мы видим, что трансформационные свойства нелинейных интегрируемых уравнений и соответствующих линейных во многом похожи. Соответствие $i\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow L^+$ свидетельствует в пользу интерпретации метода обратной задачи рассеяния как нелинейного аналога преобразования Фурье[3,9,I3].

УП. БЭКЛУНД - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Преобразования (2.I4) кроме групп симметрии (6.6) содержат очень интересные преобразования совершенно иного типа.

Ограничимся для простоты случаем $N = 2$ $\left(P = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} \right)$. Положим в (2.I4) $B_1 = \lambda - \lambda_{01}$, $B_2 = \lambda - \lambda_{02}$, где λ_{01}, λ_{02} – комплексные константы. Расписывая (2.I4) по компонентам, получаем пару уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}(q' - q) + (q' + q) \int_{-\infty}^{x} (r'q' - rq) - 2i\lambda_{01} q' + 2i\lambda_{02} q = 0 \qquad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(q'-q)+(r'+r)\int_{-\infty}^{x}(r'q'-rq)+2i\lambda_{02}r'-2i\lambda_{01}r=0. \quad (7.2)$$

Интегральные члены в (7.I), (7.2) можно преобразовать в локальные. Умножим (7.I) на $r'-r$, (7.2) на $q'-q$ и сложим получившиеся уравнения. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(q'-q)(r'-r)+2(r'q'-rq)\int_{-\infty}^{x}(r'q'-rq)\right]-2i(\lambda_{01}-\lambda_{02})(r'q'-rq)=0.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{x}(r'q'-rq)=i(\lambda_{01}-\lambda_{02})-\sqrt{-(\lambda_{01}-\lambda_{02})^2-(q'-q)(r'-r)} \quad (7.3)$$

Подставляя (7.3) в (7.I) и (7.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(q'-q)=i(\lambda_{01}+\lambda_{02})(q'-q)+i(q'+q)\sqrt{(\lambda_{01}-\lambda_{02})^2+(q'-q)(r'-r)}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r'-r)=-i(\lambda_{01}+\lambda_{02})(r'-r)+i(r'+r)\sqrt{(\lambda_{01}-\lambda_{02})^2+(q'-q)(r'-r)}. \quad (7.5)$$

Соотношения (7.4) - (7.5) определяют преобразование $(q,r)\to(q',r')$ для совершенно произвольной пары функций (q,r). Предположим теперь, что $q(x,t)$, $r(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений (3.9). Теперь как нетрудно убедиться $q'(x,t)$, $r'(x,t)$ также удовлетворяют системе (3.9) и при этом

$$\frac{\partial}{\partial t}(q'-q)=-i\left\{(\lambda_{01}+\lambda_{02})(q'+q)-i\frac{\partial}{\partial x}(q'+q)\right\}\sqrt{(\lambda_{01}-\lambda_{02})^2+(q'-q)(r'-r)}$$
$$+i\left(q'r'+qr-(\lambda_{01}+\lambda_{02})^2\right)(q'-q), \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r'-r)=-i\left\{(\lambda_{01}+\lambda_{02})(r'+r)-i\frac{\partial}{\partial x}(r'+r)\right\}\sqrt{(\lambda_{01}-\lambda_{02})^2+(q'-q)(r'-r)} \quad (7.7)$$
$$-i\left(q'r'+qr-(\lambda_{01}+\lambda_{02})^2\right)(r'-r).$$

Итак, соотношения (7.4)-(7.7) задают преобразования $(q,r)\to(q',r')$, переводящее решение системы (3.9) в другое решение той же самой системы уравнений. Преобразования такого типа принято называть Бэклунд-преобразованиями (БП).

Бэклунд-преобразование (7.4) (7.7) обладает весьма интересными свойствами. Положим, например в (7.4) (7.7) $q=r=0$. Решая возникшие уравнения для q', r', получим простейшее солитонное решение системы (3.9):

$$q(x,t)=(\lambda_{01}-\lambda_{02})\frac{\exp\{-2i(\lambda_{01}^2+\lambda_{02}^2)t+i(\lambda_{01}+\lambda_{02})x-i\varphi_0\}}{\operatorname{ch}\{2i(\lambda_{01}^2+\lambda_{02}^2)t-i(\lambda_{01}-\lambda_{02})(x-x_0)\}},$$

$$r(x,t)=(\lambda_{02}-\lambda_{01})\frac{\exp\{2i(\lambda_{01}^2+\lambda_{02}^2)t-i(\lambda_{01}+\lambda_{02})x+i\varphi_0\}}{\operatorname{ch}\{2i(\lambda_{01}^2+\lambda_{02}^2)t-i(\lambda_{01}-\lambda_{02})(x-x_0)\}}$$

где φ_0 и x_0 - произвольные константы.
Тем самым, БП (7.4)-(7.7) добавляет к исходному решению солитон. Повторным применением БП (7.4) (7.7) можно получить любое многосолитонное решение. Кроме того, используя (7.6) и (7.7) можно построить бесконечный набор интегралов движения для системы (3.9). Здесь эти вопросы мы обсуждать не будем. История Бэклунд-преобразований, различные методы их построения и свойства рассматривались, например, в [2,6,9,I0,23].

БП (7.4)-(7.7) состоит из двух существенно различных частей: пространственной части $БП_x$ (7.4)-(7.5) и временной части $БП_t$ (7.6)-(7.7). Пространственная часть $БП_x$ является, как видно из ее построения, универсальной - ее вид определяется только выбором функций B_I и B_2. Временная же часть $БП_t$ существенно зависит от конкретного уравнения, т.е. от вида $\Omega_\alpha(\lambda)$. Так, для системы уравнений (3.9) и (3.I0) $БП_x$ одинаковые (7.4)-(7.5), а $БП_t$ различны.

При конкретных редукциях мы получаем из (7.4)-(7.7) солитонные БП различных конкретных уравнений. При $r=q^*$, $\lambda_{01}=\lambda_{02}^*=\mu+i\xi$ БП (7.4)-(7.7) - это БП для нелинейного уравнения Шредингера

$$\left(i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+2|q|^2q=0\right) \quad [6,53,54]:$$

$$Б\Pi_x: \frac{\partial}{\partial x}(q'-q) = 2i\mu(q'-q) + (q'+q)\sqrt{4\xi^2 - |q'-q|^2}, \quad (7.8)$$

$$Б\Pi_t: \frac{\partial}{\partial t}(q'-q) = -\left(2\mu(q'-q) - i\frac{\partial}{\partial x}(q'+q)\right)\sqrt{4\xi^2-|q'-q|^2}$$

$$+ i\left(|q'|^2 + |q|^2 - 4\mu^2\right)(q'-q).$$

В случае $r = q$ и $\lambda_{01} = -\lambda_{02} = ia$ $Б\Pi_x$: $\frac{\partial}{\partial x}(q'-q) = (q'+q)\sqrt{4a^2-(q'-q)^2}$ эквивалентно, как нетрудно видеть, следующему

$$q'-q = 2a \sin\left(\int_{-\infty}^{x} dy\,(q'+q)\right). \quad (7.9)$$

БП$_x$ (7.9) - это БП$_x$ для модифицированного уравнения КдВ

$$\frac{\partial}{\partial x}(w'-w) = 2a\sin(w'-w)$$

где $w = \int_{-\infty}^{x} dy\, q(y)$ [53,54,6]. При $q = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ имеем хорошо известное БП для уравнения синус-Гордона (3.25)

$$Б\Pi_x: \frac{\partial}{\partial x}(\varphi'-\varphi) = 4a\sin\left(\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right), \quad (7.10)$$

$$Б\Pi_t: \frac{\partial}{\partial t}(\varphi'+\varphi) = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right).$$

БП$_t$ легко восстанавливается исходя из соответствующих уравнений.

Вернемся к БП (7.4),(7.5) в общем положении. Это БП задается двумя константами λ_{01}, λ_{02}. Обозначим его $B_{\lambda_{01},\lambda_{02}}$. Легко видеть, что $B_{\lambda_{02},\lambda_{01}} = (B_{\lambda_{01},\lambda_{02}})^{-1}$. Преобразование B_{λ_0,λ_0} является тождественным. На первый взгляд преобразование B_{λ_0,λ_0} нетривиально, однако в классе функций r, q, удовлетворяющих условиям $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|q(x)| < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|r(x)| < \infty$ (см. [I] гл.I.§ 9), оно эквивалентно тождественному. Отметим, что λ_{01}, λ_{02} не могут рассматриваться как групповые параметры преобразования $B_{\lambda_{01},\lambda_{02}}$. Это с очевидностью следует из закона преобразования данных рассеяния (2.2I) ($N = 2$)

$$(S^+)' = \frac{B_1(\lambda)}{B_2(\lambda)} S^+, \quad (S^-)' = \frac{B_2(\lambda)}{B_1(\lambda)} S^-, \quad (7.11)$$

где $S^+ \stackrel{df}{=} \frac{S_{21}}{S_{11}}$, $S^- \stackrel{df}{=} \frac{S_{12}}{S_{11}}$.

Мы рассмотрели БП с $B_1 = \lambda - \lambda_{01}$, $B_2 = \lambda - \lambda_{02}$. Выясним теперь общую структуру БП вида (2.I4) (N - произвольное).

Каждое конкретное уравнение (3.5) задается конкретными функциями $\Omega_\alpha(\lambda)$ $(\alpha = 1,\dots,N)$ и, следовательно, определенным законом (3.7) зависимости матрицы перехода от времени. Пусть функции $B_\alpha(\lambda)$ от времени не зависят. Тогда, как легко видеть, преобразования (2.I4) не меняют вида функций $\Omega_\alpha(\lambda)$ в (3.7). Тем самым, они трансформируют решения некоторого конкретного уравнения типа (3.5) в решение того же самого уравнения, т.е. эти преобразования являются Бэклунд-преобразованиями.

Всевозможные БП (2.I4) образуют, как это следует из закона преобразования данных рассеяния (при $N = 2$ см. (7.II)) бесконечномерную абелеву группу. Рассмотрим подробнее случай $N = 2$. Для произвольных мероморфных функций $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$ отношение B_1/B_2 в силу известных теорем теории функций комплексного переменного можно представить в виде

$$\frac{B_1}{B_2}(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{N_1}(\lambda - \lambda_{01i})}{\prod_{i=1}^{N_2}(\lambda-\lambda_{02i})} f(\lambda), \quad (7.12)$$

где функция $f(\lambda)$ не имеет ни нулей, ни полюсов. В результате произвольное БП (7.II) является комбинацией БП двух типов

$$(S^\pm)' = B^\pm S^\pm = \left(B_f^{(c)}\cdot B^{(d)}\right) S^\pm, \quad (7.13)$$

где

$$B_f^{(c)} = f(\lambda),$$

$$B^{(d)} = \frac{\prod_{i=1}^{N_1}(\lambda-\lambda_{01i})}{\prod_{i=1}^{N_2}(\lambda-\lambda_{02i})}. \quad (7.14)$$

БП $B_f^{(c)}$ и $B^{(d)}$ существенно различаются.. БП $B_f^{(c)}$ не меняют числа полюсов у данных рассеяния $S^\pm$ и следовательно, не изменяют числа солитонов *. Назовем БП $B_f^{(c)}$ континуальными. Континуальные БП образуют бесконечномерную абелеву группу $B^{(c)}$. Группа $B^{(c)}$ содержит в качестве подгруппы бесконечномерную группу симметрии, рассмотренную в предыдущем разделе.

БП (7.I4) имеют дискретный характер. Произвольное БП такого типа можно представить в форме

$$B^{(d)} = \prod_{i=1}^{N_2} B_{\lambda_{02i}}^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{N_1} B_{\lambda_{01i}}^{\frac{1}{2}}, \tag{7.I5}$$

где $B_{\lambda_0}^{-\frac{1}{2}} \overset{df}{=} \left(B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$, а $B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}$ – это следующее БП –

$$S^+ \longrightarrow (S^+)' = (\lambda - \lambda_0)\, S^+. \tag{7.I6}$$

В терминах r, q и r', q' $B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}$ имеет вид ($B_1 = \lambda - \lambda_0$, $B_2 = 1$):

$$\frac{\partial q'}{\partial x} + q'(x) \int_{-\infty}^{x} (q'r' - qr) - 2i\lambda_0 q' - 2iq = 0, \tag{7.I7}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} - r(x) \int_{-\infty}^{x} (q'r' - qr) + 2i\lambda_0 r + 2ir' = 0.$$

Исключая интегральные члены, имеем

$$B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}(q \to q'):\quad \frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{1}{2i} q'^2 r - 2i\lambda_0 q' - 2iq = 0, \tag{7.I8}$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{2i} r^2 q' + 2i\lambda_0 r + 2ir' = 0.$$

Выписывая преобразование (2.I4) с $B_1 = I$, $B_2 = \lambda - \lambda_0$, легко убедиться в том, что БП $B_{\lambda_0}^{-\frac{1}{2}}$ действительно является обратным к $B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}$. Нетрудно также проверить, используя $B_{\lambda_{01}}^{\frac{1}{2}}(q \to q')$ (7.I8) и $B_{\lambda_{02}}^{-\frac{1}{2}}(q' \to q'')$, что БП (7.4)-(7.5)

---

* Напомним, что каждый полюс данных рассеяния соответствует одному солитону /I/.

$$B_{\lambda_{01}, \lambda_{02}} = B_{\lambda_{02}}^{-\frac{1}{2}} B_{\lambda_{01}}^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что из вакуума ($q = 0$, $r = 0$) БП $B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}$ (7.I8). например для системы (3.9), рождает решение $q' = const \cdot \exp(-i4\lambda_0^2 t + 2i\lambda_0 x)$, $r' = 0$, а БП $B_{\lambda_0}^{-\frac{1}{2}}$ рождает решение $q' = 0$, $r' = const \cdot \exp(4i\lambda_0^2 t - 2i\lambda_0 x)$. Используя эти решения, по формулам (7.I5),(7.I8) можно построить произвольное многосолитонное решение системы(3.9). Аналогично и для других систем вида (3.5) ($N = 2$).

Назовем БП $B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}$ элементарным. Из (7.I6) следует, что λ_0 является индексом, нумерующим элементарные БП, и не может рассматриваться как групповой параметр. Всевозможные дискретные БП (7.I5) образуют бесконечную дискретную группу.

Континуальные и дискретные БП коммутируют между собой. Тем самым, полная группа БП есть тензорное произведение $B^{(c)} \otimes B^{(d)}$, где $B^{(c)}$ – бесконечномерная непрерывная группа континуальных БП и $B^{(d)}$ – бесконечная дискретная группа солитонных БП с континуальным набором элементарных БП $\{B_{\lambda_0}^{\frac{1}{2}}\}$.

При редукциях группа БП редуцируется. Так, например, для нелинейного уравнения Шредингера ($r = q^*$) элементарным БП является преобразование $B_{\lambda_0} = B_{\lambda_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot B_{\lambda_0^*}^{\frac{1}{2}}$. Более подробно групповые свойства БП рассмотрены в /55/.

Аналогичной структурой обладают БП и для произвольного N. Отметим только, что в этом случае имеется N – I типов элементарных БП.

Итак, для любого уравнения вида (3.5) преобразования (2.I4) со всевозможными функциями $B_\alpha(\lambda)$ $(\alpha = 1, \dots, N)$, независящими от времени, образуют бесконечную группу B. Эта группа действует на многообразии решений конкретного уравнения (3.5) транзитивно. По аналогии с системами с конечным числом степеней свободы группу B естественно называть динамической /56/.

Рассмотрим наконец преобразования (2.I4 с функциями B_α, зависящими от времени (C = B). В этом случае вид функций Ω_α меняется, а именно

$$\Omega_\alpha(\lambda, t) \to \Omega'_\alpha(\lambda, t) = \Omega_\alpha(\lambda, t) + i\frac{\partial}{\partial t} \ln B_\alpha(\lambda, t) \tag{7.I9}$$

Поэтому такие преобразования (2.I4) трансформируют решения одного уравнения вида (3.5) (с функциями Ω_α) в решения другого уравнения (с функциями $\Omega'_\alpha = \Omega_\alpha + i \frac{\partial}{\partial t} \ln B_\alpha$). Преобразования такого типа называют обобщенными БП /9,I0/. Например, преобразование (2.I4) с

$$B_1 = \exp\{ i(4\lambda^3 - 2\lambda^2)t \}, \quad B_2 = \exp\{ -i(4\lambda^3 - 2\lambda^2)t \}$$

трансформирует решения системы (3.9) в решения системы (3.I0).

Отметим, что соотношение (3.3) представляет собой обобщенное БП от уравнения $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ $(\Omega_\alpha \equiv 0)$ к уравнению (3.5) $\left(B_\alpha = \exp\{ -i \int_0^t \Omega_\alpha(\lambda, s) ds \} \right)$.

Ясно, что, подбирая функции $B_\alpha(\lambda, t)$, мы с помощью обобщенных БП можем преобразовать друг в друга любые два уравнения типа (3.5). Тем самым, бесконечная группа обобщенных БП действует транзитивно на всем множестве рассматриваемых нами интегрируемых уравнений.

Мы видим, таким образом, что теория дифференциальных уравнений, интегрируемых с помощью (I.I), целиком погружается в теорию нелинейных преобразований вида (2.I4). На существование преобразований типа (2.I4), их роль и свойства обратили внимание Калоджеро и Дегасперис /9,I0/.

УШ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МИУРЫ

Преобразования симметрии и Бэклунд – преобразования, рассмотренные в предыдущих разделах, – это преобразования уравнений (и решений) либо в общем положении, либо в некоторой фиксированной редукции. Существуют, оказывается, также преобразования, связывающие различные уравнения, соответствующие различным редукциям общей системы. Примером ~~такого~~ преобразования является знаменитое преобразование Миуры между уравнением КдВ и модифицированным уравнением КдВ /57/. В работе /58/ этот результат был усилен, а именно было показано, что преобразование Миуры связывает между собой целиком оба семейства – семейства высших уравнений КдВ и семейство высших уравнений мКдВ .

Здесь мы рассмотрим преобразование Миуры для матричных

(операторных) аналогов уравнений КдВ и мКдВ. Процедура построения матричных (и операторных) аналогов уравнений (3.5) была сформулирована в /59/. Общий вид матричных (операторных) уравнений, интегрируемых с помощью матричной (операторной) спектральной задачи Захарова–Шабата

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi + i \begin{pmatrix} 0 & Q(x,t) \\ R(x,t) & 0 \end{pmatrix} \Psi \tag{8.I}$$

где Q , R – матрицы порядка N (или операторы), следующий:

$$\frac{\partial P}{\partial t} - 2i\Omega(L^+_A, t) AP = 0, \tag{8.2}$$

где $P = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\Omega(\lambda, t)$ – произвольная мероморфная по λ функция и

$$L^+_A \Phi = -\frac{i}{2} A \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{i}{2}\left[P(x), \int_{-\infty}^{x} [P(y), A\Phi(y)] \right]. \tag{8.3}$$

При $\Omega = -4\lambda^3$ уравнение (8.2) имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + 3\frac{\partial Q}{\partial x} RQ + 3QR\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + 3\frac{\partial R}{\partial x} QR + 3RQ\frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

Система (8.4) является матричным (операторным) аналогом системы (3.I0). В качестве конкретных редукций получаем [ж] :

α) $R = i$, $Q = -iu$ – матричное (операторное) КдВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial u}{\partial x} u + 3u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{8.5}$$

β) $R = Q$ – матричное (операторное) мКдВ

ж Матричные аналоги НУШ , КдВ и мКвД, рассматривались в /42, 60/. Об операторных интегрируемых уравнения см.также /6I/.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}+3\frac{\partial Q}{\partial x}Q^2+3Q^2\frac{\partial Q}{\partial x}=0. \tag{8.6}$$

Редукции $R=i$, $Q=-iU$ и $R=Q$ в (8.2) возможны при любых нечетных $\Omega(\lambda)$. Соответствующие семейства уравнений можно записать в компактной форме.

Семейство КдВ /10/:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\omega(L_U)\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{8.7}$$

где $\omega(\lambda)$ – произвольная функция и

$$L_U\Phi=-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2[U(x),\Phi(x)]_+ + \tag{8.8}$$

$$+\Big[\frac{\partial U}{\partial x},\int_{-\infty}^{x}dy\,\Phi(y)\Big]_+ + \Big[U(x),\int_{-\infty}^{x}dy\Big[U(y),\int_{-\infty}^{y}dz\,\Phi(z)\Big]_-\Big]_-.$$

Здесь и далее $[\ ,\ ]_-$, $[\ ,\ ]_+$ обозначают соответственно коммутатор и антикоммутатор. При $\omega=-4\lambda$ имеем матричное (операторное) уравнение КДВ. Заметим, что уравнение (8.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\omega(\tilde{L}_U)U=0, \tag{8.9}$$

ГДЕ

$$\tilde{L}_U\Phi=-\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+2[U(x),\Phi(x)]_+ \tag{8.10}$$

$$-\int_{-\infty}^{x}dy\Big[\frac{\partial U}{\partial y},\Phi(y)\Big]_+ + \int_{-\infty}^{x}dy\Big[U(y),\int_{-\infty}^{y}dz\,[U(z),\Phi(z)]_-\Big]_-.$$

Совпадение (8.7) и (8.9) вытекает из равенства

$$L_U\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\tilde{L}_U\Phi.$$

Семейство мКдВ выглядит следующим образом /38/:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-D_-\,\omega(L_Q^+)Q=0, \tag{8.11}$$

где $L_Q^+=\frac{1}{4}D_+D_-$, а

$$D_\pm=\frac{\partial}{\partial x}+\Big[Q(x),\int_{-\infty}^{x}dy\,[Q(y),\cdot\,]_\pm\Big]_\pm. \tag{8.12}$$

Матричное мКдВ соответствует $\omega=-4\lambda$. Для наших целей (8.11) удобно переписать в форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-\omega(\tilde{L}_Q)\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \tag{8.13}$$

где $\tilde{L}_Q=-\frac{1}{4}D_-D_+$. Для целых функций $\omega(\lambda)$ эквивалентность (8.11) и (8.13) следует из равенств

$$D_-L_Q^+=\tilde{L}_Q D_- \quad \text{и} \quad D_-Q=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим теперь спектральную задачу (8.1). При редукции $R=i$, $Q=-iU$ она эквивалентна матричному уравнению Шредингера $\Big(\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}\Big)$:

$$\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}=-\lambda^2\Psi_2-U\Psi_2. \tag{8.14}$$

В случае $R=Q$ из (8.1) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Psi_1+\Psi_2)=-\lambda^2(\Psi_1+\Psi_2)-\Big(Q^2-i\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)(\Psi_1+\Psi_2). \tag{8.15}$$

Сравнивая (8.14) и (8.15) мы видим, что они переходят друг в друга, если положить

$$U=Q^2-i\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.16}$$

Это и есть преобразование Миуры. Выясним теперь как связаны уравнения (8.7) и (8.I3). Из определений операторов L_u и $\tilde{L}_Q$ вытекает соотношение

$$L_u \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{u=Q^2-i\frac{\partial Q}{\partial x}} = \left[Q, \tilde{L}_Q \frac{\partial Q}{\partial x}\right]_+ - i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{L}_Q\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.I7}$$

Отсюда следует, что

$$L_u^n \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{u=Q^2-i\frac{\partial Q}{\partial x}} = \left[Q, \tilde{L}_Q^n \frac{\partial Q}{\partial x}\right]_+ - i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{L}_Q^n\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{8.I8}$$

$$(n=2,3,\dots)$$

В силу (8.I8) для любой целой функции $\omega(\lambda)$ имеем

$$\mathcal{F}^{\omega}_{(u)}\Big|_{u=Q^2-i\frac{\partial Q}{\partial x}} = \left[Q, \mathcal{F}^{\omega}_{(Q)}\right]_+ - i\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}^{\omega}_{(Q)}, \tag{8.I9}$$

где

$$\mathcal{F}^{\omega}_{(u)} = \frac{\partial u}{\partial t} - \omega(L_u)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \mathcal{F}^{\omega}_{(Q)} = \frac{\partial Q}{\partial t} - \omega(\tilde{L}_Q)\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тем самым, если Q является решением уравнения (8.II), то $u = Q^2 - i\frac{\partial Q}{\partial x}$ есть решение уравнения (8.7) (с той же ω). При $\omega = -4\lambda$ имеем связь между матричным мКдВ и матричным КдВ. Формулы (8.I6), (8.I9) представляют собой матричное (операторное) обобщение результата работы /58/.

Преобразование Миуры существенно отличается от преобразований симметрии и Бэклунд - преобразований. Оно связывает между собой различные "сечения" общей системы (3.5), соответствующие различным редукциям. С увеличением N число возможных редукций системы (3.5) растет и поэтому набор преобразований типа Миуры должен становиться богаче.

IX. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы видим, таким образом, что трансформационные свойства дифференциальных уравнений, интегрируемых с помощью линейной спектральной задачи (I.I), определяются универсальной группой нелинейных преобразований вида (I.2). Центральную роль в этих преобразованиях играет оператор Λ^+. Схема, изложенная в настоящем обзоре, работает и для других линейных спектральных задач. Проблема состоит в вычислении явного вида оператора Λ^+. Некоторые конкретные операторы L^+ и их свойства обсуждались П.П.Кулишом /62/.

Автор признателен Ю.Б.Румеру за внимание к работе и полезные обсуждения.

Приложение

Здесь мы получим ряд соотношений, включающих величины $\left(\tilde\Phi^{(in)}\right)_{ke} = \left(\psi'\right)_{kn}\left(\psi^{-1}\right)_{ie}$ и интегродифференциальные операторы $\Lambda,\ \Lambda^+,\ L,\ L^+$.

Обозначим $\left(\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}\right)_{ke} = \left(F^+\right)'_{kn}\left(F^+\right)^{-1}_{ie}$,

$$\left(\overset{-+}{\tilde\Phi}{}^{(in)}\right)_{ke} = \left(F^+\right)'_{kn}\left(F^-\right)^{-1}_{ie}$$

Из (I.I) находим

$$\frac{\partial\tilde\Phi^{(in)}}{\partial x} = i\lambda\left[A, \tilde\Phi^{(in)}\right] + i\rho'(x)\tilde\Phi^{(in)}(x) - i\tilde\Phi^{(in)}(x)\rho(x). \qquad (\text{п.I})$$

Отсюда

$$\frac{\partial\tilde\Phi^{(in)}_D}{\partial x} = i\left(\rho'(x)\tilde\Phi^{(in)}_F(x) - \tilde\Phi^{(in)}_F(x)\rho(x)\right)_D. \qquad (\text{п.2})$$

Из (п.2) имеем

$$\tilde\Phi^{(in)}_D(x) = \tilde\Phi^{(in)}_D(+\infty) - i\int_x^\infty\left(\rho'\tilde\Phi^{(in)}_F - \tilde\Phi^{(in)}_F\rho\right)_D, \qquad (\text{п.3})$$

или

$$\tilde\Phi^{(in)}_D = \tilde\Phi^{(in)}_D(-\infty) + i\int_{-\infty}^x\left(\rho'\tilde\Phi^{(in)}_F - \Phi^{(in)}_F\rho\right)_D, \qquad (\text{п.4})$$

где $\int_x^\infty f \stackrel{df}{=} \int_x^\infty dy\, f(y)$, $\int_{-\infty}^x f \stackrel{df}{=} \int_{-\infty}^x dy\, f(y)$.

Из асимптотических свойств F^+ и F^- находим

$$\left(\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_D(+\infty)\right)_{kk} = \delta_{ik}\delta_{kn}, \qquad (\text{п.5})$$

$$\left(\overset{-+}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_D(-\infty)\right)_{kk} = \delta_{ik}\delta_{kn}.$$

Из (П.I), (П.3), (П.5) получаем

$$\Lambda\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_F = \lambda\left[A, \overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_F\right] + \rho'(x)\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_D(+\infty) - \qquad (\text{п.6})$$

$$- \overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_D(+\infty)\,\rho(x) \quad (i, n = 1,\dots,N),$$

где $$\Lambda\Phi = -i\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \left(\rho'(x)\Phi(x) - \Phi(x)\rho(x)\right)^+_F$$
$$+ i\rho'(x)\int_x^\infty\left(\rho'\Phi - \Phi\rho\right)_D - i\int_x^\infty\left(\rho'\Phi - \Phi\rho\right)\cdot\rho(x). \qquad (\text{п.7})$$

В частности, т.к. при $i \neq n$ $\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_D(+\infty) = 0$,

$$\Lambda\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_F = \lambda\left[A, \overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(in)}_F\right] \quad (i \neq n), \qquad (\text{п.8})$$

т.е.

$$\Lambda_A\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(F)}_F = \lambda\overset{++}{\tilde\Phi}{}^{(F)}_F. \qquad (\text{п.9})$$

Явный вид оператора Λ^+ находится прямым вычислением. Отметим, что $\Lambda^+_A\Phi \stackrel{df}{=} \Lambda^+\Phi_A = \left(\Lambda_A\right)^+\Phi$.

Выписывая для величины $\left(\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}\right)_{ke} = \left(F^+\right)'_{kn}\left(F^-\right)^{-1}_{ie}$ уравнения типа (п.I), (п.2), (п.4), нетрудно убедиться, что

$$L^+\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_F = \lambda\left[A, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_F\right] - \left[\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_D(-\infty), \rho(x,t)\right], \qquad (\text{п.10})$$

где $L^+ \stackrel{df}{=} \Lambda^+(\rho' = \rho)$.

Отсюда имеем

$$\left(L^+_A - \lambda\right)\left[A, \overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}_F\right] = -S_{nn}\left[\overset{-+}{\delta}{}^{(nn)}, \rho(x,t)\right], \qquad (\text{п.II})$$

где $\left(\overset{-+}{\delta}{}^{(nn)}\right)_{kk} = \delta_{kn}$. Умножая левую и правую части (П.II) на $\left((S_D)^{-1}H_\alpha\right)_{nn}$ и суммируя по n, получаем

$$\left(L_A^{+}-\lambda\right)\left[A, \Pi_{\alpha F}(x,t,\lambda)\right] = -\left[H_\alpha, P(x,t)\right], \qquad (\text{п.I2})$$

где мы обозначили

$$\left(\Pi_\alpha(x,t,\lambda)\right)_{kl} \stackrel{df}{=} \sum_{n=1}^{N} \left((S_\infty)^{-1} H_\alpha\right)_{nn} \left(\bar{\Phi}_F^{+(nn)}\right)_{kl} = \left(F^{+} H_\alpha (S_\infty)^{-1} (F^{-})^{-1}\right)_{kl} \qquad (\text{п.I3})$$

Отметим, что при выводе соотношений (п.I), (п.8) мы нигде не использовали тот факт, что элементы матрицы $\rho(x,t)$ коммутируют между собой. Тем самым, эти соотношения имеют место и для операторозначных элементов матрицы потенциалов $\rho(x,t)$.

Литература

I. Теория солитонов. Метод обратной задачи, авт.Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., под ред. С.П.Новикова, М.,"Наука" I980.

2. Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W., Proc. IEEE,(1973), 61, 1433.

3. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H., Stud. Appl. Math., (1974), 53, 249.

4. Dynamical Systems, Theory and Applicatios, Ed. J. Moser, Lecture Notes in Physics, 1975, v. 38.

5. Гельфанд И.М., Дикий Л.А., УМН, I975, т.30, стр.67.

6. Backlund Transformatios, The Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, Ed. R. Miura, Lecture Notes in Mathematics (1976), v. 515.

7. Miura R.M., SIAM Review, (1976), 18, 412.

8. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П., УМН, I976, т.3I, стр.55.

9. Calogero F., Degasperis A., Nuovo Cim., (1976), 32B, 201.

I0. Calogero F., Degasperis A., Nuovo Cim., (1977), 39B, 1.

II. Кричевер И.М., УМН, (I977), т.32, стр.I83

I2. Ablowitz M.J., Stud. Appl. Math., (1978), 58, 17.

I3. Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, Research Notes in Mathematics, 26, Ed. F.Calogero; Pitman, London, 1978.

I4. " Solitons", Topics in Current Physics, v. 17, Eds. R.Bullough, P. Caudrey; Springer-Verlag, 1980.

I5. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений "Наука", 1978.

I6. Kumei S., J. Math. Phys., (1975), 16, 2461; (1977), 18, 256; (1978), 19, 195.

I7. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Л., ДАН СССР (1976), т.227, стр.539.

I8. Ibragimov N.H.,Anderson R.L., J.Math.Anal.Appl.,(1977), 59, 145.

I9. Конопельченко Б.Г., Ядерн.физ., (1977), т.26, стр.658.

20. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б., ДАН СССР (1979), т.244, стр.56.

2I. Жибер А.В., Шабат А.Б., ДАН СССР, (1979), т.247, стр.II03.

22. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б., Функц. анализ и его приложения (1980), т.I4, стр.25.

23. Конопельченко Б.Г., Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-23, № 80-I47 (1980).

24. Захаров В.Е., Манаков С.В., ЖЭТФ, (1975), т.69, стр.I654.

25. Konopelchenko B.G., Phys. Lett. (1980), 75A, 447.

26. Konopelchenko B.G., preprint Institute of Nuclear Physics N 80-16, Novosibirsk (1980).

27. Герджиков В.С., Иванов М.И., Кулиш П.П., ТМФ (1980), 44 342.

28. Konopelchenko B.G., Journ. Phys. A: Mat.and Gen.(in press), preprint INF N79-135 (1979).

29. Конопельченко Б.Г., препринт ИЯФ СО АН СССР, № 80-75 (1980).

30. Newell A.C., Proc. Roy. Soc. (1979), A365, 283.

3I. Kaup D.J., Stud. Appl. Math., (1976), 55,9.

32. Манаков С.В., ЖЭТФ (1973), т.65, стр.505.

33. Flaschka H., Newell A., in [4] ,355.

34. Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д., Труды математического ин-та АН СССР, (1976), т.I42, стр.254.

35. Будагов А.С., Тахтаджян Л.А., ДАН СССР (1977), т.235, стр.805.

36. Будагов А.С., Записки научных семинаров ЛОМИ, (1978), т.77, стр.24.

37. Захаров В.Е., Михайлов А.В., ЖЭТФ (1978), т.74, с р.I953.

38. Конопельченко Б.Г., Мохначев В.Г., препринт ИЯФ СО АН СССР, № 80-I43 (1980).

39. Михайлов А.В., Письма в ЖЭТФ (1979), т.30, стр.443.

40. Pohlmeyer K., Rehren K.-H., Phys. Lett. (1979), 89B, 76; J.Math. Phys., (1979), 20, 2628.

4I. Захаров В.Е., Шабат А.Б., Функц.анализ и его приложения (1979), т.I3, стр.I3.

42. Zakharov V.E., in "Solitons", [14] , (1980).

43. Михайлов А.В., Труды советско-американского симпозиума по теории солитонов, Киев, сентябрь 1979 г.

44. Magri F., J. Math. Phys., (1978), 19, 1156.

45. Кулиш П.П., Рейман А.Г., Записки научных семинаров ЛОМИ. (1978), т.77, стр.I34.

46. Гельфанд И.М., Дорфман И.Я., Функц.анализ и его приложения, (1979), т.I3. стр.I3.

47. Faddeev L.D., in "Solitons", [14] , (1980).

48. Захаров В.Е., Михайлов А.В., Функц.анализ и его приложения (1980), т.14, стр.55.

49. Арнольд В.И., Математические методы классической механики, Наука 1974.

50. McGuiness M.J., J. Math. Phys., (1978), 19, 2285.

51. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal H.D., Miura R.M., Comm. Pure Appl. Math., (1974), 27, 97.

52. Olver P.J., J. Math. Phys., (1977), 18, 1212.

53. Chen H.H., Phys. Rev. Lett., (1974), 33, 925.

54. Lamb G.L. Jr., J.Math. Phys., (1974), 15, 2157.

55. Konopelchenko B.G., Phys. Lett., (1979), 74A, 189.

56. Konopelchenko B.G., J. Phys. A: Mathematical and General (1979), 12, 1937.

57. Miura R.M., J. Math. Phys., (1968), 9, 1202.

58. Newell A.C., in [6], p. 227.

59. Konopelchenko B.G., Phys. Lett., (1980), 79A, 39.

60. Марченко В.А., Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, "Наукова Думка" 1977.

61. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V., Phys. Lett., (1979), 73A, 292; 74A, 185.

62. Кулиш П.П., Записки научных семинаров ЛОМИ (1980), т.96, стр.105.