СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Т.А.Всеволожская

ХРОМАТИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ ЛИНЗ С БОЛЬШИМ УГЛОВЫМ АКЦЕПТАНСОМ

ПРЕПРИНТ 80-221

Новосибирск

ХРОМАТИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ ЛИНЗ С БОЛЬШИМ УГЛОВЫМ АКЦЕНТАНСОМ

Т.А.Всеволожская

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается искажение эмитанса пучка частиц за счет хроматической аберрации фокусирующих линз. Выводится условие ограничивающее длину фокусного расстояния линзы при светосильной фокусировке. На примере проекта FNAL /I,2/ определяются потери в эффективности захвата антипротонов при использовании для их собирания с мишени триплета квадруполей.

При фокусировке пучков частиц с большой угловой расходимостью становится существенным вопрос об аберрациях фокусирующих систем. Угол поворота частиц в линзе в этом случае достаточно велик, так что разброс его, обусловленный аберрациями, может оказаться сравнимым или большим разброса фазовых углов в пучке, что приведет к заметному увеличению его эмитанса.

Хроматическая аберрация обусловлена зависимостью от энергии частицы угла ее поворота в линзе. При угле поворота α разброс импульсов частиц Δp приводит к появлению углового разброса $\Delta\alpha_{chr} \propto \alpha \frac{\Delta p}{p}$, который складывается с собственным угловым разбросом пучка $\Delta\alpha_\beta$, и для того, чтобы избежать существенного увеличения его эмитанса, нужно удовлетворить условию $\Delta\alpha_{chr} < \Delta\alpha_\beta$. Для заданного эмитанса ε угловой разброс $\Delta\alpha_\beta$ определяется значением бета-функции пучка в линзе β как $\Delta\alpha_\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}}$, угол поворота α – значением бета-функции в источнике β_0 как $\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_0}}$, так что упомянутое выше условие имеет вид:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_0}} \cdot \left|\frac{\Delta p}{p}\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \quad \text{, т.е.} \quad \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \cdot \left|\frac{\Delta p}{p}\right| < 1$$

В случае тонкой линзы β определяется фокусным расстоянием f как $\beta = \beta_0 + \frac{f^2}{\beta_0} \approx \frac{f^2}{\beta_0}$ и мы получаем ограничение на фокусное расстояние линзы в виде $\frac{f}{\beta_0} \cdot \left|\frac{\Delta p}{p}\right| < 1$. В общем случае, если преобразование пучка фокусирующей системой описывается матрицей (M) как $(X) = (M)(X_0)$, где (X_0) и (X) – матрицы параметров пучка, соответственно, на выходе и входе системы, прирост углов и координат на выходе за счет хроматической аберрации (ΔX) описывается матрицей (M'), производной от диференцирования (M) по импульсу,

$$(M') = p\,\frac{d(M)}{dp}\,, \quad \text{т.е.} \quad (\Delta X) = \frac{\Delta p}{p}(M')(X_0)$$

Чтобы оценить влияние хроматической аберрации найдем обусловленное его увеличение эмитанса пучка. При этом прирост углов и координат удобно выразить в виде эффективного значения его в источнике пучка (ΔX_0) путем преобразования матрицы (ΔX) с выхода системы ко входу, а именно

$$(\Delta X_0) = (M)^{-1}(\Delta X) = \frac{\Delta p}{p}\cdot(M)^{-1}(M')(X_0) \qquad (ж)$$

Пусть источник пучка частиц характеризуется средними значениями квадрата углов, квадрата координат и произведения координат на углы $\langle\alpha_0^2\rangle$, $\langle x_0^2\rangle$ и $\langle\alpha_0 x_0\rangle$. Тогда эффективный эмитанс пучка ε_0 определяется как $\varepsilon_0=\sqrt{\langle x_0^2\rangle\langle\alpha_0^2\rangle-\langle\alpha_0 x_0\rangle^2}$. В отсутствие корреляции углов и координат (кроссовер) $\langle\alpha_0 x_0\rangle = 0$ и $\varepsilon_0 = \sqrt{\langle x_0^2\rangle\langle\alpha_0^2\rangle}$. С учетом эффективного прироста углов и координат в источнике за счет хроматической аберрации в соответствии с (ж) получаем

$$\langle(x_0+\Delta x_0)^2\rangle = \langle x_0^2\rangle + \left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle\left(a_{11}^2\langle x_0^2\rangle + a_{12}^2\langle\alpha_0^2\rangle\right)$$
$$\langle(\alpha_0+\Delta\alpha_0)^2\rangle = \langle\alpha_0^2\rangle + \left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle\left(a_{21}^2\langle x_0^2\rangle + a_{22}^2\langle\alpha_0^2\rangle\right)$$
$$\langle(\alpha_0+\Delta\alpha_0)(x_0+\Delta x_0)\rangle = \left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle\left(a_{11}\cdot a_{21}\langle x_0^2\rangle + a_{22}\cdot a_{12}\langle\alpha_0^2\rangle\right);$$

где a_{ij} – элементы матрицы $(M')_0 = (M)^{-1}\cdot(M')$. Здесь мы воспользовались независимостью углов, координат и импульсов частиц в исходном пучке, так что

$\langle\alpha_0 x_0\rangle, \langle\alpha_0\Delta p\rangle\langle x_0\Delta p\rangle = 0,\ \left\langle x_0^2\cdot\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle = \langle x_0^2\rangle\left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle$ и т.д.

Эффективный эмитанс пучка с учетом влияния аберрации есть

$$\varepsilon = \varepsilon_0\sqrt{1 + \left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle\left(a_{11}^2 + a_{22}^2 + \beta_0^2 a_{21}^2 + \frac{a_{12}^2}{\beta_0^2}\right) + \left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle^2\Delta^2} \qquad (ж\ ж)$$

где β_0 – эффективное значение бета-функции пучка в источнике $\beta_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\langle\alpha_0^2\rangle}}$, Δ – детерминант матрицы (M')$_0$.

При фокусировке тонкой линзой с фокусным расстоянием f, линейно зависящим от импульса частиц $f \propto p$, матрица (M') равна $\begin{pmatrix}-1 & f\\ 1/f & 1\end{pmatrix}$ (источник расположен в главном фокусе линзы для частиц с $\Delta p = 0$) и соотношение (ж ж) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0\sqrt{1+\left\langle\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2\right\rangle\left(2 + \frac{\beta_0^2}{f^2} + \frac{f^2}{\beta_0^2}\right)}$$

Если фокусирующая система представляет собой квадрупольный триплет, описываемый матрицей (M)

$$(M) = (m_3)(D_2)(m_2)(D_1)(m_1)(D_0)$$

где m_i – матрицы единичных квадруполей, D_i – промежутков между источником и входом в триплет и между квадруполями. Матрица (M') находится как

$$(M') = \big((m_3')(D_2)(m_2)(D_1)(m_1) + (m_3)(D_2)(m_2')(D_1)(m_1) + (m_3)(D_2)(m_2)(D_1)(m_1')\big)(D_0)$$

где (m_i') – производные от дифференцирования по импульсу матриц отдельных квадруполей $(m_i')=p\,\frac{d(m_i)}{dp}$, равные

$$(m_i') = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\psi_i\sin\psi_i & \frac{1}{\sqrt{K_i}}(\psi_i\cos\psi_i - \sin\psi_i)\\ -\sqrt{K_i}(\psi_i\cos\psi_i+\sin\psi_i) & -\psi_i\sin\psi_i\end{pmatrix}$$

в плоскости фокусировки

и
$$(m_i') = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_i\,\mathrm{sh}\,\psi_i & \frac{1}{\sqrt{K_i}}(\psi_i\,\mathrm{ch}\,\psi_i - \mathrm{sh}\,\psi_i)\\ \sqrt{K_i}(\psi_i\,\mathrm{ch}\,\psi_i+\mathrm{sh}\,\psi_i) & \psi_i\,\mathrm{sh}\,\psi_i\end{pmatrix}$$

– в плоскости фокусировки. Здесь $\psi_i = \sqrt{K_i}\, l_i$, $K_i = G_i \frac{e}{pc}$, G_i и l_i – градиенты поля и длины квадруполей.

Рассмотрим в качестве примера хроматическую аберрацию квадрупольного триплета, предложенного для собирания антипротонов с мишени в проекте источника антипротонов высокой энергии ФНАЛ / 1 /. Квадруполи, составляющие триплет, имеют длины $l_1 = l_2 = l_3 = 0{,}95$ м промежутки $D_0 = 0{,}536$ м (от эффективного источника антипротонного пучка в середине мишени до входного края триплета), $D_1 = 0{,}775$ м, $D_2 = 0{,}626$ м и значения параметра K – $K_1 = K_2 = 0{,}923\,м^{-2}$, $K_3 = 0{,}564\,м^{-2}$. Матрицы (M) в каждом из поперечных направлений равны

$$(M_x) = \begin{pmatrix} 0{,}792 & 2.18 \\ -0{,}490 & -0{,}0863 \end{pmatrix}, (M_y) = \begin{pmatrix} -2{,}06 & 3{,}76 \\ -0{,}088 & -0{,}324 \end{pmatrix},$$

матрицы (M') –

$$(M'_x) = \begin{pmatrix} 2{,}55 & 4{,}98 \\ 2{,}37 & 3{,}73 \end{pmatrix}, (M'_y) = \begin{pmatrix} 4{,}03 & 2{,}32 \\ -0{,}975 & 1{,}24 \end{pmatrix}$$

и матрицы (M')$_0$ –

$$(M'_x)_0 = \begin{pmatrix} -5{,}40 & -8{,}56 \\ 3{,}13 & 5{,}40 \end{pmatrix}, (M'_y)_0 = \begin{pmatrix} 2{,}36 & -5{,}43 \\ 2{,}37 & 2{,}36 \end{pmatrix}.$$

Значение бета-функции в эффективном источнике β_0 определяется длиной мишени l_0 как $\beta_0 = \frac{l_0\sqrt{3}l}{2\sqrt{3}}$, т.е. $\beta_0 \cong 0{,}02$ м при $l_0 = 7$ см. Подстановка этого значения β_0 и элементов матриц (M')$_0$ в выражение (**) дает увеличение эмитанса по каждому из поперечных направлений в отношениях

$$\varepsilon_x/\varepsilon_{ox} = \sqrt{1+\langle(\tfrac{\Delta p}{p})^2\rangle\cdot 1.8\cdot 10^5}$$

$$\varepsilon_y/\varepsilon_{oy} = \sqrt{1+\langle(\tfrac{\Delta p}{p})^2\rangle\cdot 7.5\cdot 10^4}$$

Если $\frac{\Delta p}{p} = \pm\ 2.10^{-3}$, влиянием хроматической аберрации можно пренебречь, если же $\frac{\Delta p}{p} = \pm\ 2.10^{-2}$ ($\langle(\frac{\Delta p}{p})^2\rangle = \frac{4}{3}.10^{-4}$), увеличение эмитанса составляет $\varepsilon_x : \varepsilon_{ox} = 5$ и $\varepsilon_y : \varepsilon_{oy} = 3.3$ раз. Численное моделирование эффективности захвата антипротонов с импульсом

4,5 ГэВ/с и разбросом $\frac{\Delta p}{p} = \pm\ 2.10^{-2}$ в акцептанс $\varepsilon_x^{(a)} = \varepsilon_y^{(a)} = 5.10^{-6}$ м.рад обнаруживает уменьшение ее за счет хроматической аберрации триплета в 3 ÷ 4 раза (для значений β – функции акцептанса 2÷1 см), что согласуется с полученным увеличением эмитанса пучка, поскольку эффективность захвата F пропорциональна квадратному корню из отношения произведений значений акцептанса по каждому из поперечных направлений к произведению значений эмитанса, $F \propto \sqrt{\frac{\varepsilon_x^{(a)}\cdot\varepsilon_y^{(a)}}{\varepsilon_x\cdot\varepsilon_y}}$. Если собирание пучка с мишени производится аксиально-симметричной линзой с фокусным расстоянием $f = 20$ см (литиевая линза), увеличение эмитанса по каждому из направлений при $\frac{\Delta p}{p} = \pm\ 2.10^{-2}$ составляет ~ 1% и такого же порядка уменьшение эффективности захвата.

Таким образом, хроматическая аберрация при светосильной фокусировке пучков частиц с большим энергетическим разбросом накладывает серьезные ограничения на величину фокусного расстояния линзы или, иными словами, на величину преобразования его β-функции пучка. Аналогичные ограничения могут возникать и за счет других аберраций – аберраций от нелинейности поля, краевых эффектов и т.д. Количественная оценка их влияния требует знания реальной топографии поля линзы.

Л и т е р а т у р а:

1. Beam Transport and Target system for pp and p$\bar{p}$ Colliding Beams, FNAL 06/20/78

2. Design Report. The Fermilab High Intensity Antiproton Sourse, FNAL, October, 1979

3. Б.Ф.Баянов и др. Труды V Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, т.II, 101, 1977.