ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Г.Конопельченко

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕДУКЦИЯХ

ПРЕПРИНТ 80 - 223

Новосибирск

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕДУКЦИЯХ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

На примере матричной Z_N редукции описан метод вычисления скобок Пуассона для редуцированных уравнений, интегрируемых с помощью матричной спектральной задачи произвольного порядка. Обсуждается семейство гамильтоновых структур и их поведение при редукциях.

HAMILTONIAN STRUCTURE OF THE INTEGRABLE EQUATIONS UNDER REDUCTIONS

B.G.Konopelchenko

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk-90, USSR

Abstract

A method for calculation of the Poisson brackets for equations integrable by the arbitrary order matrix spectral problem in the cases of the reductions is described. Matrix Z_N reduction is considered as an example. The infinite set of the Hamiltonian structures and their behaviour under the reductions is discussed.

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕДУКЦИЯХ

Б.Г.Конопельченко

I. Введение

Гамильтоновой интерпретации нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР), посвящена, начиная с работ [I,2], обширная литература (см.обзоры [3,4] и [5]). Важным шагом в этом направлении была работа [6], в которой проанализирована гамильтонова структура класса уравнений, интегрируемых с помощью спектральной задачи Захарова-Шабата $\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\psi + i\begin{pmatrix}0&q\\r&0\end{pmatrix}\psi$. Наиболее общий результат получен в серии работ Гельфанда и Дикого (см., например, [7,8]): в частности, был найден явный вид скобки Пуассона для класса уравнений, порождаемых спектральной задачей $\sum_{k=1}^{N} V_k(x)(-i\frac{\partial}{\partial x})^k\psi = \mu^N\psi$, где $V_k(x,t)$ – матрицы порядка M, а N – произвольное число. Важной особенностью уравнений, интегрируемых МОЗР является то, что им соответствует целое семейство гамильтоновых структур. Это обстоятельство впервые было замечено в работе [9] и затем обсуждалось в [I0-I4].

Из перечисленных работ следует, что в общем положении гамильтонова структура интегрируемых уравнений (при фиксированной спектральной задаче) является универсальной. При конкретных же редукциях скобка Пуассона часто модифицируется весьма нетривиальным образом. Поскольку редукции общих интегрируемых систем уравнений представляют большой интерес (см., например, [I5,I6]); то возникает задача анализа гамильтоновой структуры редуцированных уравнений.

В настоящей работе мы рассмотрим нелинейные дифференциальные уравнения, интегрируемые МОЗР с помощью спектральной задачи

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\lambda A\psi + i P(x,t)\psi, \qquad (I.I)$$

где λ – спектральный параметр, A – постоянная матрица порядка NM вида $A = A_N \otimes I_M$, где A_N – регулярная матрица порядка N (т.е. все собственные значения A_N различны) и I_M – единичная матрица порядка М, $P(x,t)$ – блочная матрица порядка NM с элементами размера М x М.

На примере матричной Z_N редукции в работе описан метод вычисления скобок Пуассона для редуцированных уравнений. Рассмотрены две калибровки задачи (I.I): в первой – диагональна матрица А, во второй – блочно-диагональна матрица $P(x,t)$. В качестве конкретных примеров рассмотрены неабелева двумеризованная цепочка Тода и ее континуальный предел. Обсуждается семейство гамильтоновых структур для уравнений, интегрируемых с помощью (I.I), и их поведение при редукциях. В работе также указаны редукция общей системы (I.I), при которой она эквивалентна спектральной задаче Гельфанда-Дикого, и семейство симплектических форм для уравнений, связанных с этой задачей.

План статьи следующий, Во втором разделе приведены некоторые необходимые в дальнейшем формулы. В третьем разделе найден общий вид интегрируемых уравнений при Z_N редукции в первой калибровке. В следующем разделе доказана гамильтоновость этих уравнений и указана скобка Пуассона. В пятом и шестом разделах рассмотрена Z_N редукция во второй калибровке: найдены общий вид уравнений и скобка Пуассона. В седьмом разделе обсуждается неабелева двумеризованная цепочка Тода. В восьмом разделе проанализировано поведение семейства симплектических форм и скобок Пуассона при Z_N и других редукциях. Редукция задачи (I.I) к спектральной задаче Гельфанда-Дикого и соответствующее семейство симплектических форм рассмотрены в последнем девятом разделе.

Автор признателен С.В.Манакову за полезные обсуждения и А.В.Михайлову за полезные обсуждения и за возможность ознакомиться с работой [23] до ее опубликования.

П. Интегрируемые уравнения в общем положении и некоторые соотношения

Общий вид уравнений интегрируемых с помощью (I.I) найден в [I7][ж]. В данной работе мы рассмотрим матричные аналоги урав-

ж) Структура уравнений, интегрируемых с помощью (I.I) (при M =I), рассматривалась также в [I8-20].

нений с M =I. В калибровке $P_{0(A)}$ = 0 эти уравнения имеют вид [2I] :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{N}\Big(\Omega_\alpha(L_A^+,t)[H_\alpha, P]\Big)_{F(A)} = 0, \qquad (2.I)$$

где $P(x,t)$ – блочная матрица порядка NM, $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ – произвольные мероморфные по λ функции.

Здесь и далее $\Phi_{0(A)}$ обозначает проекцию матрицы Φ на подпространство $g_{0(A)}$ – нулевую компоненту разложения Фиттинга матричной алгебры $gl(NM,C)$ относительно А

$$\big(g_{0(A)} = \{g,\ g\in gl(NM,C),\ [g,A]=0\}\big),\ a\ \ \Phi_{F(A)} \overset{df}{=} \Phi - \Phi_{0(A)}$$

(см. [I7, 2I]). Матрицы $H_\alpha = h_\alpha \otimes I_M$, где $h_\alpha\ (\alpha=1,\dots,N)$ – матрицы порядка N, образующие базис подалгебры $g_{0(A_N)}$, а $\otimes$ обозначает тензорное произведение. Оператор L_A^+ действует следующим образом, $L_A^+\Phi \overset{df}{=} (L_A)^+\Phi = -L^+\Phi_A$, где $[A,\Phi_A] \overset{df}{=} \Phi$, и $L^+\Phi = i\frac{\partial\Phi}{\partial x} + [P(x),\Phi(x)]_{F(A)} + i\Big[P(x), \int_{-\infty}^{x} dy\,[P(y),\Phi(y)]_{0(A)}\Big]$.

Приведем несколько соотношений, на которых основан вывод (2.I) и которые потребуются нам в дальнейшем.

Мы будем предполагать, что $P(x,t) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$. Стандартным образом вводятся фундаментальные матрицы – решения $F^\pm$ ($F^\pm \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \exp i\lambda Ax$) и матрица перехода $S(\lambda,t)$: $F^+(x,t,\lambda) = F^-(x,t,\lambda)S(\lambda,t)$. Полагая $\frac{dS}{dt} = i[Y(\lambda,t),S]$, где $Y(\lambda,t) = \sum_{\alpha=1}^{N}\Omega_\alpha(\lambda,t)H_\alpha$, из (I.I) имеем

$$\Big\langle\Big(\frac{\partial P}{\partial t} - i[Y(\lambda,t),P]\Big),\ \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}\Big\rangle = 0, \qquad (2.2)$$

где $\langle\varphi,\chi\rangle \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr(\varphi(x)\chi(x))$ и $\big(\overset{++}{\Phi}{}^{(in)}\big)_{k\ell} \overset{df}{=} (F^+)_{kn}(F^+)^{-1}_{i\ell}$ $(i,k,\ell,n=1,\dots,NM)$. Далее

$$L_A\,\overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{F(A)} = \lambda\,\overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{F(A)}, \qquad (2.3)$$

где $L_A\varphi \overset{df}{=} (L\varphi)_A$ и

$$L\Phi = -i\frac{\partial\Phi}{\partial x} - [P(x),\Phi(x)]_{F(A)} + i\Big[P(x), \int_{x}^{\infty} dy\,[P(y),\Phi(y)]_{0(A)}\Big]. \qquad (2.4)$$

Используя (2.3) и переходя в (2.2) от L_A к оператору L_A^+, сопряженному L_A относительно билинейной формы $\langle \varphi, \xi \rangle_F \stackrel{df}{=} \langle \varphi_{F(A)}, \xi_{F(A)} \rangle$, получаем (2.I).

Доказательство гамильтоновости уравнений (2.I) в общем положении основывается на равенстве

$$\delta S_{in} = -i \langle \delta P, \bar{\Phi}^{(in)} \rangle, \tag{2.5}$$

где $(\bar{\Phi}^{(in)})_{k\ell} \stackrel{df}{=} (F^+)_{kn} (F^-)^{-1}_{i\ell}$, и соотношении

$$-L^+ \bar{\Phi}^{+(in)}_{F(A)} = \lambda \left[A, \bar{\Phi}^{(in)}_{F(A)} \right] + \left[P(x), \bar{\Phi}^{+(in)}_{O(A)}(x=-\infty) \right], \tag{2.6}$$

Простейшая скобка Пуассона, соответствующая уравнениям (2.I), имеет вид $\{ \mathcal{F}, \mathcal{H} \}_0 = \frac{1}{2} \langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta P}, [A, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta P}] \rangle$, где $\frac{\delta}{\delta P}$ обозначает функциональную производную.

Ш. Общий вид интегрируемых уравнений при Z_N редукции (А - калибровка).

Впервые Z_N редукция была рассмотрена в работах [22,23]. Для матричных уравнений (2.I) она порождается связями

$$R A R^{-1} = q A, \qquad R P R^{-1} = P, \tag{3.I}$$

где q^N =I. Представляют интерес два решения (3.I):

I) $(A_1)_{ik} = \delta_{ik} q^{i-1} I_M \stackrel{df}{=} A_{ik}$, $(R_1)_{ik} = \delta_{k,i+1} I_M \stackrel{df}{=} R_{ik}$ $(i,k=1,\dots,N)$, $q = \exp \frac{2\pi i}{N}$.

2) $(A_2)_{ik} = \delta_{k,i+1} I_M = R_{ik}$, $(R_2)_{ik} = q^{-(i-1)} \delta_{ik} I_M = (A^{-1})_{ik}$, $(i,k=1,\dots,N)$ $\quad q = \exp \frac{2\pi i}{N}$,

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \pmod N \end{cases}$. Так как $A = B R B^{-1}$,

где $B_{nm} = \frac{1}{\sqrt{N}} q^{-(n-1)(m-1)} I_M$, $(n,m=1,\dots,N)$, $q = \exp \frac{2\pi i}{N}$,

то эти два решения соответствуют различным калибровкам задачи (I.I) ($P_1 = B P_2 B^{-1}$, $\Psi_1 = B \Psi_2$). В первой калибровке (A - калибровка) диагональной является матрица A, во второй (R -калибровка) - блочно-диагональна (в силу (3.I)) матрица P (см. [23])

($\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} = i \lambda R \Psi_2 + i P_2 \Psi_2$). Число независимых элементов матрицы P равно N - I.

Найдем, следуя [I7], вид функций $\Omega_\alpha(\lambda, t)$, при котором уравнения (2.I) допускают Z_N редукцию. Из условия совместности связей (3.I) с (I.I) имеем $R S(\lambda, t) R^{-1} = S(\lambda q, t)$. Совместимость этого соотношения с уравнением $\frac{dS}{dt} = i[Y, S]$ дает $R Y(\lambda, t) R^{-1} = Y(q\lambda, t)$. Отсюда $\Omega_{\alpha+1}(\lambda, t) = \Omega_\alpha(q\lambda, t)$, т.е. $\Omega_\alpha(\lambda, t) = \Omega_1(q^{\alpha-1}\lambda, t)$. В результате общий вид функций $\Omega_\alpha(\lambda, t)$, при которых $[Y, P] \neq 0$, следующий $\Omega_\alpha(\lambda, t) = \sum_{p=1}^{N-1} q^{(\alpha-1)p} \lambda^p \Omega_p(\lambda^N, t)$, где $\Omega_p(\lambda^N, t)$ - произвольные функции λ^N.

Таким образом, уравнения (2.I) допускают Z_N редукцию при $Y = \sum_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha H_\alpha = \sum_{p=1}^{N-1} \lambda^p \Omega_p(\lambda^N, t) A^p$, где $\Omega_p(\lambda^N, t)$ произвольные мероморфные функции λ^N. В R - калибровке $Y = \sum_{p=1}^{N-1} \lambda^p \Omega_p(\lambda^N, t) R^p$.

Для анализа гамильтоновой структуры уравнений (2.I) при редукции, необходимо, согласно стандартной процедуре, разрешить связи $R P R^{-1} = P$, переписать уравнения (2.I) в форме, содержащей только независимые динамические переменные, и затем исследовать получившиеся уравнения (при N =2, M = I, см. [6]).

Рассмотрим сначала A - калибровку. Ограничимся для простоты случаем нечетного N.

Разрешим связи $RP = PR$ следующим образом. Введем кособиагональную матрицу Q, такую, что $Q_{\alpha\beta} = \delta_{\beta, N+1-\alpha} Q_\alpha$, где Q_α - квадратные матрицы порядка M и $Q_{\frac{N+1}{2}} = 0$. Поскольку $P_{n+1, m+1} = P_{n,m}$ $(n,m=1,\dots,N)$, то любая матрица P, удовлетворяющая условию (3.I), представима в виде

$$P = \sum_{m=1}^{N} R^{-m} Q R^m. \tag{3.2}$$

Матрицы Q_α (их $N-1$) суть независимые динамические переменные. Отметим, что $P = \sum_{m=1}^{N} R^m Q R^{-m}$.

Введем операцию проектирования Δ : $(\varphi_\Delta)_{nm} = \delta_{m, N+1-n} \varphi_{nm}$. В частности $P_\Delta = Q$ и $\langle Q, \varphi \rangle = \langle Q, \varphi_\Delta \rangle$.

Подставляя (3.2) в (2.2) и учитывая, что $Y(\lambda, t) = \sum_{p=1}^{N-1} \lambda^p \Omega_p(\lambda^N, t) A^p$, имеем

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}, \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(0)\Delta} \right\rangle - i \sum_{p=1}^{N-1} \lambda^p \Omega_p(\lambda^N, t) \left\langle [A^p, Q], \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)\Delta} \right\rangle = 0, \tag{3.3}$$

где $\varphi_{(n)} \overset{df}{=} \sum_{m=1}^{N} q^{nm} R^m \varphi_{F(A)} R^{-m}$.

Предложение (3.I). Имеют место соотношения

$$L_{(p)} \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)\Delta} = \lambda^N \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)\Delta}, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}_{(p)} \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(0)\Delta} = \lambda^p \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)\Delta}, \tag{3.5}$$

где

$$L_{(p)} \Phi \overset{df}{=} \sum_{m=1}^{N} q^{-pm} \left((L_A)^N R^{-m} \Phi R^m \right)_\Delta,$$

и

$$\mathcal{L}_{(p)} \Phi \overset{df}{=} \sum_{m=1}^{N} \left((L_A)^p R^{-m} \Phi R^m \right)_\Delta,$$

а оператор L дается формулой (2.4), в которой надо положить $P = \sum_{m=1}^{N} R^{-m} Q R^m$.

Доказательство. Из соотношения (2.3) находим $L_A \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(n)} = \lambda \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(n+1)}$, $n = 1, \dots, N$. Т.к. $\varphi_{(n)} = \varphi_{(n+N)}$, отсюда имеем:

$$\left(L_A\right)^N \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)} = \lambda^N \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)}, \qquad (p = 1, \dots, N) \tag{3.6}$$
$$\left(L_A\right)^p \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(c)} = \lambda^p \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(p)}.$$

Заметим, что $R \varphi_{(n)} R^{-1} = q^{-n} \varphi_{(n)}$. Отсюда $\varphi_{(n)} = \sum_{m=1}^{N} q^{-nm} R^{-m} \varphi_{(n)\Delta} R^m$. Подставляя это выражение для $\varphi_{(n)}$ в (3.6) и применяя операцию Δ, получаем (3.4), (3.5).

В силу (3.4) и (3.5) уравнение (3.3) эквивалентно следующему

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}, \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(0)\Delta} \right\rangle - i \sum_{p=1}^{N-1} \left\langle [A^p, Q], \Omega_p(L_{(p)}, t) \mathcal{L}_{(p)} \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(0)\Delta} \right\rangle = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.7) имеем

$$\left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} - i \sum_{p=1}^{N-1} \left(\mathcal{L}^+_{(p)} \Omega(L^+_{(p)}, t) [A^p, Q] \right)_\Delta, \overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}_{(0)\Delta} \right\rangle = 0, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{L}^+_{(p)}$ и $L^+_{(p)}$ - операторы, сопряженные $\mathcal{L}_{(p)}$ и $L_{(p)}$ относительно билинейной формы $\langle \varphi, \chi \rangle_\Delta \overset{df}{=} \langle \varphi_\Delta, \chi_\Delta \rangle$:

$$\mathcal{L}^+_{(p)} \varphi = \sum_{m=1}^{N} \left(R^m \left((L^+_A)^p \varphi \right) R^{-m} \right)_\Delta, \tag{3.9}$$

$$L^+_{(p)} \varphi = \sum_{m=1}^{N} q^{-pm} \left(R^m \left((L^+_A)^N \varphi \right) R^{-m} \right)_\Delta. \tag{3.10}$$

В операторе L^+_A $\quad P = \sum_{m=1}^{N} R^{-m} Q R^m$.

Соотношение (3.8) выполняется, если

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - i \sum_{p=1}^{N-1} \left(\mathcal{L}^+_{(p)} \Omega_p(L^+_{(p)}, t) [A^p, Q] \right)_\Delta = 0. \tag{3.11}$$

Уравнения (3.II) представляют собой форму уравнений (2.I) при Z_N редукции, содержащую только независимые переменные Q.

Нетрудно видеть, что уравнение (3.3) эквивалентно также уравнению (3.7) с обратным порядком "множителей" Ω_p и $\mathcal{L}_{(p)}$. В результате имеем эквивалентную форму уравнения (3.II)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - i \sum_{p=1}^{N-1} \left(\Omega_p(L^+_{(0)}, t) \mathcal{L}^+_{(p)} [A^p, Q] \right)_\Delta = 0. \tag{3.12}$$

IУ. Гамильтонова структура уравнений при Z_N редукции (A - калибровка)

Покажем, что уравнения (3.II) и (3.I2) являются гамильтоновыми.

Подставляя (3.2) в (2.5) имеем

$$\delta S_{nn} = -i \left\langle \delta Q, \overset{-+}{\Phi}{}^{(nn)}_{(0)\Delta} \right\rangle. \tag{4.1}$$

Отсюда

$$\frac{\bar{\Phi}^{+(nn)}_{(c)\Delta}}{S_{nn}(\lambda)} = i\frac{\delta}{\delta Q^T}\ln S_{nn}(\lambda). \qquad (4.2)$$

$$(n=1,\dots,NM)$$

Вводя обозначения

$$\Pi^{(p)}(x,t,\lambda) \overset{df}{=} \sum_{e=1}^{NM}(A^p)_{ee}\frac{1}{S_{ee}(\lambda)}\bar{\Phi}^{+(ee)}(x,t,\lambda) \qquad (4.3)$$

и

$$\Pi^{(p)}_{(n)} \overset{df}{=} \sum_{m=1}^{N} q^{nm} R^m \Pi^{(p)} R^{-m}, \qquad (4.4)$$

из (4.2) имеем

$$\Pi^{(p)}_{(0)\Delta}(x,t,\lambda) = i\frac{\delta}{\delta Q^T(x,t)}\, tr\left(A^p \ln S_{0(A)}(\lambda)\right). \qquad (4.5)$$

Из соотношения (2.6) следует

$$(\overset{+}{L}_A - \lambda)[A, \Pi^{(p)}] = -[Y, P(x,t)] \qquad (4.6)$$

Отсюда получаем

$$\overset{+}{L}_A[A,\Pi^{(p)}_{(n)}] = \lambda[A,\Pi^{(p)}_{(n+1)}] - \sum_{m=1}^{N} q^{(n+p)m}[A^p,P]. \qquad (4.7)$$

$$(n=1,\dots,N)$$

Учитывая, что $\sum_{m=1}^{N} q^{\alpha m} = \delta_{\alpha N}\cdot N$, из системы равенств (4.7) находим

$$\left((\overset{+}{L}_A)^N - \lambda^N\right)[A,\Pi^{(p)}_{(0)}] = -N\lambda^{N-p}(\overset{+}{L}_A)^{p-1}[A^p,P]. \qquad (4.8)$$

$$(p=1,\dots,N-1)$$

Лемма (4.I).

Имеют место соотношения

$$\left(\mathcal{L}^+_{(p)}(\overset{+}{L}_{(p)})^n[A^p,Q]\right)_\Delta = \frac{1}{(n+1)!}\left(\mathcal{D}_Q\frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}}\frac{\Pi^{(p)}_{(0)\Delta}}{N\lambda^{N-p}}\right)_\Delta\Bigg|_{\lambda=\infty} \qquad (4.9)$$

и

$$\left(\left(\mathcal{L}^+_{(p)}(\overset{+}{L}_{(p)}-\lambda_0^N)^{-n}[A^p,Q]\right)\right)_\Delta = -\frac{1}{(n-1)!}\left(\mathcal{D}_Q\frac{\partial^{n-1}}{\partial(\lambda^N)^{n-1}}\frac{\Pi^{(p)}_{(0)\Delta}}{N\lambda^{N-p}}\right)_\Delta\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}, \qquad (4.10)$$

где n = 1,2,3... и

$$\mathcal{D}_Q\varphi \overset{df}{=} \sum_{m=1}^{N} R^m(\overset{+}{L}\varphi)R^{-m}. \qquad (4.11)$$

Доказательство. Перепишем (4.8) в виде

$$\left[A, \frac{\Pi^{(p)}_{(0)}}{N\lambda^{N-p}}\right] = -\left((\overset{+}{L}_A)^N-\lambda^N\right)^{-1}(\overset{+}{L}_A)^{p-1}[A^p,Q]. \qquad (4.12)$$

Разлагая (4.12) в асимптотический ряд по λ^{-N} находим

$$(\overset{+}{L}_A)^p(\overset{+}{L}_A)^{Nn}[A^p,P] = \frac{1}{(n+1)!}\overset{+}{L}_A\frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}}\left[A,\frac{\Pi^{(p)}_{(0)\Delta}}{N\lambda^{N-p}}\right]\Bigg|_{\lambda=\infty}. \qquad (4.13)$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

Из (4.I2) также имеем

$$(\overset{+}{L}_A)^p\left((\overset{+}{L}_A)^N-\lambda_0^N\right)^{-n}[A^p,P] = -\frac{1}{(n-1)!}\overset{+}{L}_A\frac{\partial^{n-1}}{\partial(\lambda^N)^{n-1}}\left[A,\frac{\Pi^{(p)}_{(0)\Delta}}{N\lambda^{N-p}}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} \qquad (4.14)$$

$$(n=1,2,3,\dots)$$

Применяя к (4.I3) и (4.I4) операцию Δ, учитывая (3.2) и представляя величину Z, удовлетворяющую условию $RZR^{-1}=q^pZ$, в виде $Z=\sum_{m=1}^{N} q^{-pm}R^mZ_AR^{-m}$ получаем (4.9) и (4.I0).

Рассмотрим уравнения (3.I2) с

$$\Omega_p = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_{p(n)}(t)(\lambda^N)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\tilde{\omega}_{p(n\gamma)}(t)(\lambda^N-\lambda^N_{0\gamma})^{-n} \qquad (4.15)$$

где $\omega_{p(n)}$ и $\tilde{\omega}_{p(n\gamma)}$ - произвольные функции.

Теорема (4.I)

Уравнения (3.I2) с функциями Ω_p вида (4.I5) являются гамильтоновыми со скобкой Пуассона

$$\{F, H\}_0 = \left\langle \frac{\delta F}{\delta Q^T}, \mathcal{D}_Q \frac{\delta H}{\delta Q^T} \right\rangle, \qquad (4.I6)$$

где оператор $\mathcal{D}_Q$ дается формулой (4.II), и гамильтонианом

$$H = -\sum_{p=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{p(n)}(t) \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}} \frac{tr(A^p \ln S_{o(A)}(\lambda))}{N \lambda^{N-p}}\Big|_{\lambda=\infty} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{n,\gamma=1}^{\infty} \tilde{\omega}_{p(n\gamma)}(t) \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial(\lambda^{N})^{n-1}} \frac{tr(A^p \ln S_{o(A)}(\lambda))}{N \lambda^{N-p}}\Big|_{\lambda=\lambda_{0\gamma}}. \qquad (4.I7)$$

Доказательство. Из (4.5), (4.9), (4.I0) следует, что уравнение (3.I2) с функцией Ω_p типа (4.I5) может быть записано в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left(\mathcal{D}_Q \frac{\delta H}{\delta Q^T}\right)_\Delta, \qquad (4.I8)$$

где функционал H дается формулой (4.I7). Легко видеть, что уравнение (4.I8) представимо в гамильтоновой форме $\frac{\partial Q}{\partial t} = \{Q, H\}$ со скобкой Пуассона (4.I6) и гамильтонианом H. Тот факт, что на ко-векторах $\frac{\delta H}{\delta Q^T}$, где H имеют вид (4.I7), скобка (4.I6) действительно является скобкой Пуассона проверяется непосредственным вычислением.

Отметим, что

$$\frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}} \frac{tr(A^p \ln S_{o(A)}(\lambda))}{N \lambda^{N-p}}\Big|_{\lambda=\infty} = C_p^{(nN+p)},$$

где $C_p^{(n)}$ – интегралы движения для уравнений (3.II), возникающие из разложения $tr(A^p \ln S_{o(A)}(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} C_p^{(n)}$. Все $C_p^{(n)}$ являются локальными функционалами $Q(x,t)$ [I7]. Тем самым,

для целых функций $\Omega_p = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{p(n)}(t)(\lambda^N)^n$ гамильтониан $H = \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{p(n)}(t)\, C_p^{(nN+p)}$.

У. Z_N редукция в R – калибровке

Калибровка, в которой диагональна матрица P, рассматривалась А.В.Михайловым [22,23] в связи с двумеризованной цепочкой Тода. Здесь мы обсудим общие уравнения (2.I) для произвольных N и M. В этой калибровке общий вид $Y(\lambda,t)$ следующий $Y(\lambda,t) = \sum_{m=1}^{N-1} \lambda^m \Omega_m(\lambda^N,t) R^m$, а уравнение (2.2) эквивалентно

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial t} - i \sum_{m=1}^{N-1} \lambda^m \Omega_m(\lambda^N,t)[R^m, P],\ \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)} \right\rangle = 0. \qquad (5.I)$$

Т.к. матрица P блочно-диагональна ($P_{ik} = \delta_{ik} P_i$; $i,k = 1,\dots,N$; P_i – матрицы M x M), то из (5.I) имеем

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial t}, \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_0} \right\rangle - i \sum_{m=1}^{N-1} \lambda^m \Omega_m(\lambda^N,t) \left\langle [R^m, P], \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m} \right\rangle = 0, \qquad (5.2)$$

где $(\varphi_{\Delta m})_{ik} \overset{df}{=} \delta_{i,m+k}\, \varphi_{m+k,k}$, $i,k = 1,\dots,N$ и $\varphi_{m+k,k}$ – матрицы порядка M. Отметим, что $\varphi_{\Delta m} = R^{-m}(R^m \varphi)_{\Delta_0}$, $\varphi = \sum_{m=1}^{N} \varphi_{\Delta m}$ и матрица $\tilde{\varphi}_{\Delta m} \overset{df}{=} R^m \varphi_{\Delta m}$ является блочно-диагональной: $(\tilde{\varphi}_{\Delta m})_{ik} = \delta_{ik}\, \varphi_{m+k,k}$ $(i,k = 1,\dots,N)$. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{N} (P_{F(R)})_{ii} = 0$ и $\sum_{i=1}^{N} (\tilde{\Phi}^{F(R)}_{F(R)\Delta m})_{ii} = 0$ и обозначая $\chi_{(m)i} \overset{df}{=} (\tilde{\Phi}^{F(R)}_{F(R)\Delta m})_{ii}$ $(i = 1,\dots,N)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \chi_{(0)i} \right\rangle - i \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N} \lambda^m \Omega_m(\lambda^N,t) \left\langle \mathcal{U}_i^{(m)}, \chi_{(m)i} \right\rangle = 0 \qquad (5.3)$$

где
$u_i \overset{df}{=} P_i + \sum_{\ell=1}^{N-1} P_\ell$ $(i = 1,\dots,N-1)$; $\mathcal{U}_i^{(m)} \overset{df}{=} u_{i+m} - u_m - u_i$.

Предложение (5.I). Имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{L}_{(m)ik}\, \chi_{(0)k} = \lambda^m \chi_{(m)i}, \qquad (5.4)$$

$$(i = 1,\dots,N-1)$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} L_{(m)ik}\, \chi_{(m)k} = \lambda^N \chi_{(m)i}, \qquad (5.5)$$

где

$$\mathcal{L}_{(m)ik} = \left(R^m (L_R)^m\right)_{ik} - \left(R^m (L_R)^m\right)_{iN}, \tag{5.6}$$

$$L_{(m)ik} = \left(R^m (L_R)^N R^{-m}\right)_{ik} - \left(R^m (L_R)^N R^{-m}\right)_{iN}, \tag{5.7}$$

$$(i, k = 1, \dots, N-1)$$

а

$$L_{\alpha\beta}\,\cdot = -i\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x} - \delta_{\alpha\beta}\left[P_\alpha(x), \cdot\right] + \tag{5.8}$$

$$+\frac{1}{N}\left[P_\beta(x), \cdot\right] + \frac{i}{N}\left[P_\alpha(x), \int_x^\infty dy\left[P_\beta(y), \cdot\right]\right],$$

$$P_N = -\sum_{e=1}^{N-1} P_e . \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, N)$$

Доказательство. Из соотношения (2.3) находим $L_R \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m} = \lambda \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_{m+1}}$.

Отсюда

$$(L_R)^m \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_0} = \lambda^m \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m}, \tag{5.9}$$

$$(m = 1, \dots, N)$$

$$(L_R)^N \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m} = \lambda^N \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m}. \tag{5.10}$$

Перейдем в (5.9), (5.10) от $\overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m}$ к блочно-диагональной матрице $\tilde{\overset{++}{\Phi}}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m} = R^m \overset{++}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta_m}$. Учитывая, что для блочно-диагональной матрицы φ – $\varphi_{c(R)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi_{ii}$, из общего оператора L (2.4) получаем (5.8). Расписывая, далее равенства (5.9), (5.10) по компонентам, вводя величины $\chi_{(m)i}$ и учитывая, что $\sum_{i=1}^{N-1} \langle z_i, (L\varphi)_i \rangle = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\beta=1}^{N} \langle z_i, L_{i\beta}\varphi_\beta \rangle = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \langle z_i, (L_{ik} - L_{iN})\varphi_k \rangle$, приходим к (5.4), (5.5), где $P_N = -\frac{1}{N}\sum_{e=1}^{N-1} u_e$.

В силу (5.4), (5.5) уравнение (5.3) эквивалентно следующему

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t}, \chi_{(0)i} \right\rangle - \tag{5.11}$$

$$-i\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{N-1} \left\langle (u_{i+m} - u_m - u_i), \left(\mathcal{L}_m \Omega_m(L_{(0)}, t)\chi_{(0)}\right)_i \right\rangle = 0.$$

Переходя в (5.11) от $\mathcal{L}_{(m)}$ и $L_{(0)}$ к сопряженным операторам $\mathcal{L}^+_{(m)}$ и $L^+_{(0)}$, аналогично разделу III окончательно получаем уравнения

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = i\sum_{m=1}^{N-1}\left(\Omega_m(L^+_{(0)}, t)\mathcal{L}^+_{(m)} u^{(m)}\right)_e, \qquad (e = 1, \dots, N-1) \tag{5.12}$$

где

$$\left(L^+_{(0)}\right)_{ki} = \left(L^+_R\right)^N_{ki} - \left(L^+_R\right)^N_{Ni}, \tag{5.13}$$

$$\left(\mathcal{L}^+_{(m)}\right)_{ki} = \left(\left(L^+_R\right)^m R^{-m}\right)_{ki} - \left(\left(L^+_R\right)^m R^{-m}\right)_{Ni}, \tag{5.14}$$

и

$$L^+_{\beta\alpha}\cdot = i\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x} + \delta_{\alpha\beta}\left[P_\beta(x), \cdot\right] - \tag{5.15}$$

$$-\frac{1}{N}\left[P_\beta(x), \cdot\right] + \frac{i}{N}\left[P_\beta(x), \int_{-\infty}^{x} dy\left[P_\alpha(y), \cdot\right]\right].$$

В операторе (5.15) $P_i = u_i - \frac{1}{N}\sum_{e=1}^{N-1} u_e$ и $P_N = -\frac{1}{N}\sum_{e=1}^{N-1} u_e$.

Формулы (5.13), (5.14) вытекают из очевидных равенств

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\beta=1}^{N} \langle z_i, L_{i\beta}\varphi_\beta \rangle = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{\beta=1}^{N} \langle (L^+)_{\beta i} z_i, \varphi_\beta \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \left\langle \left((L^+)_{ki} - (L^+)_{Ni}\right) z_i, \varphi_k \right\rangle.$$

Уравнения (5.12) эквивалентны уравнениям (3.11), (3.12).

Операторы $\mathcal{L}_{(m)}$ (5.6) и $L_{(m)}$ (5.7) можно представить также в следующем виде:

$$L_{(m)} = \widetilde{L}_{(m-1)} \widetilde{L}_{(m-2)} \cdots \widetilde{L}_{(N)} \widetilde{L}_{(N-1)} \cdots \widetilde{L}_{(m+1)} \widetilde{L}_{(m)}\,, \qquad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_{(m)} = \widetilde{L}_{(m-1)} \widetilde{L}_{(m-2)} \cdots \widetilde{L}_{(1)} \widetilde{L}_{(0)}\,, \qquad (m=1,\dots,N) \qquad (5.17)$$

где

$$\widetilde{L}_{(m)ik} = \left(R^{m+1} L_R R^{-m}\right)_{ik} - \left(R^{m+1} L_R R^{-m}\right)_{iN}. \qquad (5.18)$$

Действительно, из уравнения $L_R \overset{-+}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta m} = \lambda \overset{-+}{\Phi}{}^{F(R)}_{F(R)\Delta m+1}$ имеем $\sum_{k=1}^{N-1} \widetilde{L}_{(m)ik} \chi_{(m)k} = \lambda \chi_{(m+1)i}$ $(m=1,\dots,N;\ i,k=1,\dots,N-1)$, где $\widetilde{L}_{(m)}$ определен формулой (5.18). Из этой системы уравнений получаем (5.4) и (5.5) с операторами $L_{(m)}$ и $\mathcal{L}_{(m)}$ в форме (5.16), (5.17).

Аналогично для операторов $L^{+}_{(m)}$ и $\mathcal{L}^{+}_{(m)}$:

$$L^{+}_{(m)} = \widetilde{L}^{+}_{(m)} \widetilde{L}^{+}_{(m+1)} \cdots \widetilde{L}^{+}_{(N)} \widetilde{L}^{+}_{(1)} \cdots \widetilde{L}^{+}_{(m-2)} \widetilde{L}^{+}_{(m-1)}, \qquad (5.19)$$

$$\mathcal{L}^{+}_{(m)} = \widetilde{L}^{+}_{(0)} \widetilde{L}^{+}_{(1)} \cdots \widetilde{L}^{+}_{(m-2)} \widetilde{L}^{+}_{(m-1)}\,, \qquad (m=1,\dots,N) \qquad (5.20)$$

где

$$\left(\widetilde{L}^{+}_{(m)}\right)_{ik} = \left(R^{m} L^{+}_{R} R^{-m-1}\right)_{ik} - \left(R^{m} L^{+}_{R} R^{-m-1}\right)_{Nk}. \qquad (5.21)$$

Подобным же образом в виде произведений операторов можно представить операторы $\mathcal{L}_{(p)}$, $L_{(p)}$ и $\mathcal{L}^{+}_{(p)}$ (3.9), $L^{+}_{(p)}$ (3.10) из раздела Ш.

УI. Гамильтонова структура уравнений (R – калибровка)

Выясним гамильтонову структуру уравнений (5.12). Из соотношения (2.5) имеем

$$\delta S_{in} = -i \sum_{k=1}^{N-1} \left\langle \delta U_k, \left(\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\Delta_0}\right)_{kk} \right\rangle.$$

Отсюда

$$\left(\overset{-+}{\Phi}{}^{0(R)(in)}_{\Delta_0}(x,t,\lambda)\right)_{kk} = i\,\frac{\delta}{\delta U^{T}_{k}(x,t)} \left(S_{0(R)}(\lambda)\right)_{in} \qquad (6.1)$$
$$(k=1,\dots,N-1)$$

Из вытекающего из (2.6) равенства

$$-L^{+} \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\Delta m} = \lambda\left[R, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\Delta m+1}\right] + \left[P(x,t), \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{0(R)\Delta m}(x=-\infty)\right]$$

аналогично разделу IУ находим

$$\left(\left(L^{+}_{R}\right)^{N} - \lambda^{N}\right)\left[R, \Pi^{(m)}_{\Delta_0}\right] = -N\lambda^{N-m}\left(L^{+}_{R}\right)^{m-1}\left[R^{m}, P\right], \qquad (6.2)$$

где

$$\Pi^{(m)} \overset{df}{=} F^{+}\left(S_{0(R)}\right)^{-1} R^{m} \left(F^{-}\right)^{-1}. \qquad (6.3)$$

Лемма (6.1). Имеют место соотношения

$$\left(\left(L^{+}_{(0)}\right)^{n} \mathcal{L}^{+}_{(m)} U^{(m)}\right)_{i} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\mathcal{D}_{u}\right)_{ik} \frac{i}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}} \left.\frac{\left(\Pi^{(m)}_{\Delta_0}\right)_{kk}}{N\lambda^{N-m}}\right|_{\lambda=\infty}, \qquad (6.4)$$

$$\left(\left(L^{+}_{(0)} - \lambda^{N}_{0}\right)^{-n} \mathcal{L}^{+}_{(m)} U^{(m)}\right)_{i} = -\sum_{k=1}^{N-1} \left(\mathcal{D}_{u}\right)_{ik} \frac{i}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial(\lambda^{N})^{n-1}} \left.\frac{\left(\Pi^{(m)}_{\Delta_0}\right)_{kk}}{N\lambda^{N-m}}\right|_{\lambda=\lambda_0} \qquad (6.5)$$

$$(i=1,\dots,N-1;\ m=1,\dots,N;\ n=1,2,3,\dots)$$

где

$$\left(\mathcal{D}_{u}\right)_{ik} = i\,\delta_{ik}\frac{\partial}{\partial x} + \delta_{ik}\left[U_k(x) - \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1} U_\ell(x), \cdot\right] - \qquad (6.6)$$
$$-\frac{1}{N}\left[U_i(x), \cdot\right] + \frac{i}{N}\left[U_i(x), \int_{-\infty}^{x} dy \left[U_k(y) - \frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N-1} U_\ell(y), \cdot\right]\right].$$

Доказательство полностью аналогично доказательству леммы (4.1) ($\left(\mathcal{D}_{u}\right)_{ik} = L^{+}_{ik} - L^{+}_{Nk}$).

Теорема (6.1). Уравнения (5.12) с функциями $\Omega_m(\lambda^N, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{m(n)}(t)(\lambda^N)^n + \sum_{n,\gamma=1}^{\infty} \widetilde{\omega}_{m(n\gamma)}(t)\left(\lambda^N - \lambda^N_{0\gamma}\right)^{-n}$, где $\omega_{m(n)}(t)$ и $\widetilde{\omega}_{m(n\gamma)}(t)$ – произвольные функции, являются гамильтоновыми со скобкой Пуассона

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_0=\sum_{i,k=1}^{N-1}\left\langle \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta U_i^T},(\mathcal{D}_u)_{ik}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta U_k^T}\right\rangle, \tag{6.7}$$

где оператор $\mathcal{D}_u$ дается формулой (6.6), и гамильтонианом

$$\mathcal{H}=-\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{m(n)}(t)\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}}\frac{tr(R^m\ln S_{o(R)}(\lambda))}{N\lambda^{N-m}}\Bigg|_{\lambda=\infty}$$

$$+\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n,\gamma=1}^{\infty}\tilde{\omega}_{m(n\gamma)}(t)\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial(\lambda^{N})^{n-1}}\frac{tr(R^m\ln S_{o(R)}(\lambda))}{N\lambda^{N-m}}\Bigg|_{\lambda=\lambda_{o\gamma}}. \tag{6.8}$$

Доказательство. Из (6.I) имеем

$$\left(\Pi^{(m)}_{\Delta_0}(x,t,\lambda)\right)_{ii}=i\frac{\delta}{\delta U_i^T(x,t)}\,tr(R^m\ln S_{o(R)}(\lambda)), \tag{6.9}$$

где $\frac{dS_{o(R)}}{dt}=0$. В силу (6.4), (6.5), (6.9) уравнение (5.I2) можно записать в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}=\sum_{k=1}^{N-1}(\mathcal{D}_u)_{ik}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta U_k^T}, \quad (i=1,\dots,N-1) \tag{6.I0}$$

где $\mathcal{H}$ дается формулой (6.8). Далее очевидно, что уравнение (6.I0) представимо в форме $\frac{\partial U_i}{\partial t}=\{U_i,\mathcal{H}\}$ со скобкой Пуассона (6.7).

Для целых функций $\Omega_m=\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{m(n)}(t)(\lambda^N)^n$ гамильтониан $\mathcal{H}=\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_{m(n)}(t)\,C_m^{(nN+m)}$, где $C_m^{(nN+m)}$ – локальные интегралы движения.

Отметим, что скобка Пуассона (6.7) (так же как и скобка (4.I6)) является универсальной.

УП. Пример: двумеризованная неабелева цепочка Тода

Рассмотрим уравнение (2.I) при $\Omega_\alpha=\omega_\alpha\lambda^{-1}$. В этом случае оно, как показано в [I7], эквивалентно уравнению $GL(NM,C)$ – Gordon

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}V^{-1}\right)-[A,VYV^{-1}]=0, \tag{7.I}$$

где $Y=\sum_{\alpha=1}^{N}\omega_\alpha H_\alpha$, $P=-i\frac{\partial V}{\partial x}V^{-1}$. Уравнение (7.I) допускает матричную Z_N редукцию, при этом V – блочно-диагональная матрица и $Y\sim R^{-1}$. Положим $V_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}g_\beta$, (α,β = I,...,N), где g_α – матрицы M x M, $Y=R^{-1}A^{-1}$. В результате из (7.I) получаем уравнения двумеризованной цепочки Тода [23]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x}g_\alpha^{-1}\right)+g_{\alpha+1}g_\alpha^{-1}-g_\alpha g_{\alpha-1}^{-1}=0. \quad (\alpha=1,\dots,N). \tag{7.2}$$

Уравнение (7.2), как нетрудно видеть, эквивалентно уравнению (5.I2) с $\Omega_1=\dots=\Omega_{N-2}=0,\Omega_{N-1}=\lambda^{-N}$, т.е.

$$\left(\tilde{L}^{+}_{(N-1)}\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i=-i(U_{i-1}-U_i-U_{N-1}), \quad (i=1,\dots,N-1) \tag{7.3}$$

где $U_k=-i\frac{\partial g_k}{\partial x}g_k^{-1}$ $(k=1,\dots,N-1)$ и $\tilde{L}^{+}_{(N-1)}$ дается формулой (5.2I). Уравнение (7.3), в отличие от (7.2), содержит только независимые динамические переменные U_k и является гамильтоновым (теорема (6.I)) со скобкой Пуассона (6.7) и гамильтонианом

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{N}\frac{tr(R^{-1}\ln S_{o(R)}(\lambda))}{\lambda}\Bigg|_{\lambda=0}=-\frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial\lambda}tr(R^{-1}\ln S_{o(R)}(\lambda))\Bigg|_{\lambda=0}. \tag{7.4}$$

Гамильтониан (7.4) можно представить в более явном виде. Воспользуемся для этого тождеством

$$i(F^-(x,t,\lambda))^{-1}RF^+(x,t,\lambda)-iRS=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial(F^-(x,t,\lambda))^{-1}}{\partial\lambda}F^+(x,t,\lambda)\right)-iRS, \tag{7.5}$$

ж) Об обобщении уравнения sine-Gordon на классические группы см. [24-26].

которое получается непосредственно из спектральной задачи $\frac{\partial F}{\partial x} = i\lambda RF + iPF$. Из (7.5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln S_{\alpha(R)}(\lambda) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \left((F^-)^{-1} R F^+\right)_{\alpha(R)} \left(S_{\alpha(R)}\right)^{-1} - R \right\}, \qquad (7.6)$$

В результате (учитывая, что $S_{F(R)}(\lambda=0)=0$ при $\Omega_\alpha = \omega_\alpha \lambda^{-1}$)

$$\mathcal{H} = \frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr\left(R^{-1}V^{-1}RV - 1\right), \qquad (7.7)$$

т.к. $V(x,t) \stackrel{def}{=} F^-(x,t,0)$. Поскольку $V_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} g_\beta$ окончательно получаем

$$\mathcal{H} = \frac{i}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, tr\left(\sum_{\alpha=1}^{N} g_\alpha^{-1} g_{\alpha+1} - 1\right). \qquad (7.8)$$

Гамильтониан $\mathcal{H}$ можно также выразить через U_ℓ $(\ell=1,\dots,N-1)$ – он является нелокальным функционалом этих переменных.

В заключение отметим, что для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} g^{-1}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} g^{-1}(x,y)\right) = 0$, рассмотренного в [23] и являющегося континуальным пределом уравнения (7.2), скобка Пуассона есть континуальный предел ($N \to \infty$) скобки (6.7) и имеет вид

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, dy\, tr\left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta U^T(x,y)}\, \mathcal{D}\, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta U^T(x,y)}\right), \qquad (7.9)$$

где $U(x,y) = -i \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} g^{-1}(x,y)$ и $\mathcal{D} = i\frac{\partial}{\partial x} + [U(x,y), \cdot\,]$.

УШ. Семейство гамильтоновых структур и редукции

Также как и при $N = 2$ [9-I0] уравнениям (2.I) при произвольных N и М в общем положении соответствует бесконечное семейство скобок Пуассона, т.е. фиксированное уравнение (2.I) может быть представлено в виде [I7]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \{P, \mathcal{H}_{-n}\}_n, \qquad (8.I)$$

где n – произвольное целое число, $\mathcal{H}_{-n}$ – соответствующий гамильтониан, а скобка Пуассона $\{\,,\}_n$ есть

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_n \stackrel{def}{=} -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta P^T}, (L_A^+)^n \left[A, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta P^T}\right]\right\rangle. \qquad (8.2)$$

Подобная неоднозначность гамильтоновой структуры сохраняется и при Z_N редукции. Действительно, например в R -калибровке, вместе с равенством (6.4) имеем

$$\left((L_{(0)}^+)^{n+\ell} \mathcal{L}_{(m)}^+ U^{(m)}\right)_i = \sum_{k=1}^{N-1} \left((L_{(0)}^+)^\ell \mathcal{D}_U\right)_{ik} \frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial(\lambda^{-N})^{n+1}} \frac{(\Pi^{(m)}_{\Delta_0})_{kk}}{N\lambda^{N-m}}\Bigg|_{\lambda=\infty},$$

где ℓ – произвольное целое число. Отсюда следует, что конкретное уравнение (5.I2) можно записать в виде (8.I), где

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_n = \sum_{i,k=1}^{N-1}\left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta U_i^T}, \left((L_{(0)}^+)^n \mathcal{D}_U\right)_{ik} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta U_k^T}\right\rangle. \qquad (8.3)$$

Аналогичным образом выглядит семейство скобок Пуассона и в А- калибровке:

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_n = \left\langle \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta Q^T}, (L_{(0)}^+)^n \mathcal{D}_Q \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta Q^T}\right\rangle. \qquad (8.4)$$

Ясно, что семейство скобок (8.3), (8.4) получается в результате Z_N редукции скобок (8.2). Наиболее же прозрачным поведение гамильтоновых структур при редукциях становится при рассмотрении соответствующих симплектических 2 – форм.

В общем положении с уравнениями (2.I) связано семейство замкнутых симплектических форм

$$\omega_P^{(n)}(\delta_1 P, \delta_2 P) = \frac{1}{2}\langle (L_A^+)^n \delta_1 P, \delta_2 P_A\rangle - \frac{1}{2} \langle \delta_1 P_A, (L_A^+)^n \delta_2 P\rangle, \qquad (8.5)$$

где n – произвольное целое число (при $N = 2$, $M = I$ см. [I0]). Теоретико-групповая интерпретация структур типа (8.5) дана в [I3] . Нетрудно убедиться, что скобки Пуассона, соответствующие формам (8.5), для функционалов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ вида (6.8), в точности совпадают со скобками $\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}_{-n}$ (8.2).

Теорема (8.I). При Z_N редукции $\omega_P^{(n)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{RP=PR} = 0$, если $n \neq kN-1$ ($k = 0, \pm I, \pm 2, \ldots$), и (в А - калибровке)

$$\omega_Q^{(k)}(\delta_1 Q, \delta_2 Q) \stackrel{\text{df}}{=} \omega_P^{(kN-1)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{RP=PR} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{D}_Q^{-1}\left(\overset{+}{L}_{(0)}\right)^k \delta_1 Q, \delta_2 Q\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \delta_1 Q, \mathcal{D}_Q^{-1}\left(\overset{+}{L}_{(0)}\right)^k \delta_2 Q\right\rangle. \tag{8.6}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Симплектические формы (8.6) задают семейство гамильтоновых структур для уравнений (3.I2).

Нетрудно убедиться, что скобки Пуассона, соответствующие формам (8.6), есть (8.4).

В общем случае редукция семейства форм (8.5) задает семейство симплектических форм для редуцированных уравнений. Пример I: при редукции $P = -P^T$, имеющей место при нечетных $\Omega_\alpha(\lambda)$, $\omega_P^{(2n)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{P=-P^T} = 0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а семейство форм $\omega_Q^{(n)}(\delta_1 Q, \delta_2 Q) \stackrel{\text{df}}{=} \omega_P^{(2n+1)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{P=Q-Q^T}$, где Q - верхняя треугольная матрица, связано с семейством скобок Пуассона, рассмотренным в [27]. Пример 2: при редукциях $P = P_+$ и $P = P_-$, где P_+ и P_- - соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы с нулями на диагонали, $\omega_P^{(n)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{P=P_+} = \omega_P^{(n)}(\delta_1 P, \delta_2 P)\big|_{P=P_-} = 0$, для $n = 0, I, 2, \ldots$.

Аналогичным образом, исходя из (8.5), нетрудно найти семейства гамильтоновых структур и при других редукциях. В частности, для Z_{2N}, $\mathcal{D}_{2N}$ редукций [23] и для редукции, при которой уравнения (2.I) эквивалентны уравнениям, рассмотренным в [7,8].

IX. Редукция к спектральной задаче Гельфанда-Дикого

Рассмотрим спектральную задачу (I.I) для подмножества матриц P вида

$$P_{(9,1)} = \begin{pmatrix} 0, & Q_{N-2} & Q_{N-3} & \ldots & Q_2 & Q_1 & Q_0 \\ I_M & 0 & Q_{N-2} & \ldots & & Q_2 & Q_1 \\ 0 & (1+q) I_M & 0 & \ldots & & & Q_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \left(\sum_{i=1}^{N-2} q^{i-1}\right) I_M & 0 & Q_{N-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \left(\sum_{i=1}^{N-1} q^{i-1}\right) I_M & 0 \end{pmatrix} \tag{9.I}$$

где $q = \exp\frac{2\pi i}{N}$, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{N-2}$ - матрицы MxM и I_M - единичная матрица MxM.

Лемма 9.I. Спектральная задача (I.I) при редукции (9.I) и $(A)_{ik} = q^{i-1}(H_i)_{ik}$ $(i,k = 1, \ldots, N)$ эквивалентна спектральной задаче Гельфанда-Дикого $\sum_{k=0}^{N} V_k(x)\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \chi = \lambda^N \chi$ с $V_N = I_M$, $V_{N-1} = 0$. Коэффициенты V_k ($k = 0, I, \ldots, N-1$) связаны с $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{N-2}$ соотношениями

$$\sum_{k=0}^{N} V_k(x)\, P_{N\ell}^{(k)}(x) = 0 \qquad (\ell = 1, \ldots, N) \tag{9.2}$$

где $P^{(k+1)} = -i\frac{\partial}{\partial x} P^{(k)} + P^{(k)} P_{(9.1)}$, $P^{(0)} = I_M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство основывается на прямом вычислении для $\chi = \psi_N$, где $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$. Соотношения (9.2) легко разрешаются как относительно Q_k, так и относительно V_k. Для N =2 имеем хорошо известный результат $Q_0 = -V_0$. При N =3 $(q = \exp\frac{2\pi i}{3})$

$$V_0 = i(1+q)\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - i Q_0\right), \quad V_1 = -(2+q) Q_1$$

или

$$Q_0=\frac{1}{1+q}V_0+\frac{i}{2+q}\frac{\partial}{\partial x}V_1, \quad Q_1=-\frac{1}{(2+q)}V_1.$$

При $N=4$ $\left(q=\exp\frac{2\pi i}{4}\right)$

$$V_2=-(3+2q+q^2)Q_2,$$

$$V_1=-i(3+3q+2q^2)\frac{\partial Q_2}{\partial x}+(1+q)(2+q+q^2)Q_1,$$

$$V_0=(1+q+q^2)\left\{(1+q)Q_0-i(1+q)\frac{\partial Q_1}{\partial x}-Q_2^2-\frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}\right\}.$$

Для произвольного N, в частности, $V_{N-2}=$ $=-\left(\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k-1}q^{i-1}\right)Q_{N-2}$.

Уравнения, связанные со спектральной задачей Гельфанда-Дикого, имеют вид [7,8]:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}=\sum_{s=0}^{N-2}l_{rs}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta V_s^T} \qquad (r=0,\dots,N-2) \quad (9.3)$$

и гамильтоновы относительно скобки Пуассона (скобки Гельфанда-Дикого) [7,8]

$$\{F,\mathcal{H}\}_{Г.Д.}=\sum_{r,s=0}^{N-2}\left\langle\frac{\delta F}{\delta V_r^T}, l_{rs}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta V_s^T}\right\rangle.$$

Уравнения (9.3) возникают в результате редукции (9.I) общих уравнений (2.I). Иерархию гамильтоновых структур для уравнений (9.3) определяет следующая

Теорема (9.I). При редукции (9.I) и $A_{ik}=q^{i-1}(H_i)_{ik}$

$$\omega_P^{(n)}(\delta_1 P,\delta_2 P)\Big|_{P=P_{(9.1)}}=0, \quad n\neq kN-1 \ (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

а семейство замкнутых симплектических форм

$$\omega_V^{(k)}(\delta_1 V,\delta_2 V)\overset{df}{=}\omega_P^{(kN-1)}(\delta_1 P,\delta_2 P)\Big|_{P=P_{(9.1)}}=\sum_{r,s=0}^{N-2}\langle\delta_1 V_r, M_{rs}^{(k)}\delta_2 V_s\rangle \quad (9.4)$$

где $M^{(k)}$ - некоторые матричные $(N-1)\times(N-1)$ интегродифференциальные операторы, задает иерархию гамильтоновых структур для уравнений (9.3), связанных со спектральной задачей Гельфанда-Дикого. В частности, $\omega_V^{(1)}$ - симплектическая форма, соответствующая скобке Гельфанда-Дикого.

Доказательство. Первая часть теоремы проверяется непосредственно. Явный вид операторов $M^{(k)}$ находится прямым вычислением. Например, при $N=2$

$$M^{(1)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}dy\,\cdot-\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}dy\,\cdot$$

и $\omega_V^{(1)}(\delta_1 V,\delta_2 V)$ эквивалентна матричному аналогу симплектической формы для семейства уравнений KgB [I,2]:

$$\omega_V^{(1)}(\delta_1 V,\delta_2 V)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,tr\left(\delta_1 V(x)\int_{-\infty}^{x}dy\,\delta_2 V(y)-\delta_1 V(x)\int_{x}^{\infty}dy\,\delta_2 V(y)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}dy\,tr\left(\delta_1 V(x)\,\delta_2 V(y)-\delta_2 V(x)\,\delta_1 V(y)\right).$$

При $N=3$

$$M_{11}^{(1)}=\frac{1}{18}\left[\int_{-\infty}^{x}dy\,V_1(y),\int_{-\infty}^{y}dz\,\cdot\right]+\frac{1}{18}\left[\int_{x}^{\infty}dy\,V_1(y),\int_{y}^{\infty}dz\,\cdot\right],$$

$$M_{10}^{(1)}=M_{01}^{(1)}=-\frac{i}{6}\int_{-\infty}^{x}dy\,\cdot+\frac{i}{6}\int_{x}^{\infty}dy\,\cdot,$$

$$M_{00}^{(1)}=0.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что $M^{(k)}_\circ l=$ $=I$ $\left(\sum_{r,s=0}^{N-2}\langle\varphi_r(M^{(k)}_\circ l)_{rs}\varphi_s\rangle=\sum_{r=0}^{N-2}\langle\varphi_r\cdot\varphi_r\rangle\right)$, где l - ядро скобки Гельфанда-Дикого.

Цитированная литература:

I. Gardner C.S., Korteweg-de Vries Equation and Generalization IV. The Korteweg-de Vries Equation as a Hamiltonian System, J. Math. Phys., 12 (1971), 1548-1551.

2. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Уравнение КдФ -полностью интегрируемая гамильтонова система. Функ.анализ 5, вып.4, (1971), 18-27.

3. В.Е.Захаров. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией. Известия ВУЗов, Радиофизика, 17 (1974), 431-453.

4. Faddeev L.D., A Hamiltonian Interpretation of the Inverse Scattering Method, in "Solitons", Topics in Current Physics, v. 17 (1980), Eds. R.Bullough, P.Caudrey.

5. Теория солитонов. Метод обратной задачи, авт. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., под.ред. Новикова С.П., М., "Наука", 1980.

6. Flaschka H., Newell A.C., Integrable systems of nonlinear Equation, Lecture Notes in Physics, v.38 (1975), 355-440.

7. И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Резольвента и гамильтоновы системы, Функц.анализ II, вып.2, (1977), II-27.

8. И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Исчисление струй и нелинейные гамильтоновы системы, Функц.анализ, 12, вып.2 (1978), 8-23.

9. Magri F., A simple model of the integrable Hamiltonian equations, J.Math.Phys., 19 (1978), 1156-1162.

10. П.П.Кулиш, А.Г.Рейман. Иерархия симплектических форм для уравнения Шредингера, Дирака на прямой. Записки научных семинаров,ЛОМИ, 77, (1978), 134-147.

II. И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Семейство гамильтоновых структур, связанных с интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями, препринт № 136 (1978) ИПМ АН СССР.

12. И.М.Гельфанд, И.Я.Дорфман. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические системы, Функц.анализ 13, вып.4, (1979), 13-30.

13. А.Г.Рейман, М.А. Семенов - Тян - Шанский. Семейство гамильтоновых структур, иерархия гамильтонианов и редукция для матричных дифференциальных операторов первого порядка, Функц.анализ, 14, вып.2 (1970), 77-78.

14. П.П.Кулиш. Порождающие операторы интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений. Записки научных семинаров ЛОМИ, 96 (1980), 105-112.

15. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния I, Функц.анализ, 8, вып.3, (1974), 43-53; II., Функц.анализ 13, вып.3 (1979), 13-22.

16. Zakharov V.E., The Inverse Scattering Method, in "Solitons", Topics in Current Physics, v.17 (1980).

17. Б.Г.Конопельченко. Структура нелинейных дифференциальных уравнений, связанных с линейной спектральной задачей произвольного порядка, препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-75 (1980).

18. Newell A.C., The general structure of the integrable evolution equations, Proc. Roy. Soc. (London), A365 (1979),283-311.

19. Miodek I., "IST-solvable" nonlinear evolution equations and existence - An extension of Lax's method, J.Math.Phys.19 (1978), 19-31.

20. П.П.Кулиш. Обобщенный анзатц Бете и квантовый метод обратной задачи рассеяния, препринт ЛОМИ Р-3-79 (1979).

21. Konopelchenko B.G., On the structure of the integrable evolution equations, Phys. Lett., 79A (1980), 39-43.

22. А.В.Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. Письма в ЖЭТФ. 30, (1979), 443-448.

23. Mikhailov A.V., "Reduction problem and Inverse problem Method", Proc. Kiev Soviet-American Meeting (Kiev 1979), North-Holland P.C. (1980).

24. А.С.Будагов, Л.А.Тахтаджян. Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы, ДАН СССР, 235, (1977), 805-808.

25. А.С.Будагов. Вполне интегрируемая модель теории поля с нетривиальным взаимодействием частиц в двумерном пространстве-времени, Записки научных семинаров ЛОМИ, 77, (1978), 24-56.

26. В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, ЖЭТФ, 74, (1978), 1953-1973.

27. Konopelchenko B.G., On the structure of the equations integrable by the arbitrary order linear spectral problem, J. Phys. A: Math. and Gen. (in press); the INP preprint 80-16 (1980).

Работа поступила - 11 ноября 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 5.1-1981 г. МН 13674
Усл. 1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 5

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР