СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ



Б.Г.Конопельченко

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППЫ СИММЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ I

ПРЕПРИНТ 80-23

Новосибирск

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППЫ СИММЕТРИИ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ I

Б.Г.Конопельченко

## А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются групповые свойства линейных и нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений. Обсуждается структура высших интегралов движения, групп симметрии и Бэклунд-преобразований. Анализируется общая структура групп преобразований, допускаемых интегрируемыми уравнениями. Показано, что специфические свойства таких уравнений тесно связаны с их специальными свойствами симметрии.

THE CONSERVATIONS LAWS AND SYMMETRY GROUPS
OF THE INTEGRABLE EQUATIONS

B.G.Konopelchenko

Institute of Nuclear Physics,
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The group properties of the linear and nonlinear integrable equations are considered. The structure of higher integrals of motion, symmetry groups and Backlund-transformations are discussed. The general structure of the groups of transformations admissible by the integrable equations are analysed. It is shown that the specific properties of the integrable equations are closely related with the special group properties of these equations.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППЫ СИММЕТРИИ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Конопельченко

## I. Введение

В последние годы, благодаря методу обратной задачи рассеяния, круг нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих детальное исследование, значительно расширился. Для дифференциальных уравнений, интегрируемых этим методом, характерен ряд очень интересных свойств - решения солитонного типа, бесконечные наборы законов сохранения, полная интегрируемость и т.д. Все это резко отличает нелинейные уравнения, к которым применим метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), от других нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Основная цель настоящей работы - обсудить свойства симметрии уравнений, интегрируемых МОЗР, и показать, что специфические свойства таких уравнений тесно связаны с их специальными групповыми свойствами.

Впервые существование нелинейных дифференциальных уравнений с весьма необычными свойствами было, по-видимому, продемонстрировано в работах /I,2/. В этих работах рассматривались процессы столкновения уединенных стационарных волн (т.е. решений типа $\varphi_s(x-vt)$ ) соответственно для уравнения синус-Гордона /I/ и уравнения Кортевега-де-Вриза /2/. Численные эксперименты на ЭВМ показали, что уединенные стационарные волны (получившие впоследствии название солитонов) при столкновении не меняют форму и скорости. Это был неожиданный результат. Гораздо более естественным было бы, если после столкновения волны двигались бы с другими скоростями и имели другую форму. Тем более, что обычные законы сохранения не могли привести к таким сильным ограничениям: закон сохранения импульса, как известно, требует лишь сохранения суммарного импульса.

Обнаружение того факта, что солитоны для уравнений синус-

Гордона и Кортевега-де-Вриза не взаимодействуют, привело к интенсивному поиску других нелинейных дифференциальных уравнений с подобными свойствами и к открытию нового метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений - метода обратной задачи рассеяния (см.обзоры /3-9/).

С другой стороны было ясно, что отсутствие взаимодействия между солитонами связано с существованием какого-то нового интеграла движения, не связанного с кинематическими группами симметрии типа групп Галилея, Лоренца и группы сдвигов. Будем называть такие интегралы движения высшими. Простейший пример высшего интеграла движения дает нам аддитивная сохраняющаяся величина T, значения которой в асимптотических состояниях равны ж) $T_{\binom{in}{out}} = p^3_{\binom{in}{out}}$ где $p$ -асимптотические импульсы частиц (солитонов). Действительно, для процесса рассеяния двух частиц (I+2 $\to$ 3+4) из законов сохранения импульса $p_1+p_2 = p_3+p_4$ и величины T: $p_1^3+p_2^3 = p_3^3+p_4^3$ следует, что либо $p_3=p_1, p_4=p_2$, либо $p_3=p_2, p_4=p_1$ Легко также убедиться, что для процессов распада (I $\to$ 2+3) сохранение T (и импульса) дает: $p_1=p_2,\ p_3=0$ либо $p_1=p_3,\ p_2=0$

Тем самым, существование высшего интеграла движения T приводит к невозможности распада и отсутствию передачи импульса, хотя в исходном нелинейном дифференциальном уравнении подобных ограничений, на первый взгляд, может не содержаться.

Именно такого типа интегралы движения для уравнения Кортевега-де-Вриза (КдВ) были найдены в работе /57/. Вскоре было показано /58,59/, что это уравнение обладает бесконечным числом независимых высших интегралов движения. Из этого вытекает, что тривиальными являются процессы с произвольным числом солитонов, т.е. что взаимодействие фактически отсутствует.

---

ж) Подчеркнем, что тензор $T \neq P^3$, где $P$ -оператор импульса.



Структура бесконечного набора интегралов движения для уравнения КдВ прояснилась после того, как была доказана его полная интегрируемость /I5/. Напомним, что полная интегрируемость гамильтоновой системы означает существование таких канонических переменных, в которых все координаты являются циклическими /I0,II/. Уравнения движения в этих переменных (переменных типа действие-угол) являются линейными и, следовательно, легко интегрируются, а соответствующие канонические импульсы являются интегралами движения. Теории, описываемые полевыми уравнениями можно, как известно, рассматривать как системы с бесконечным числом степеней свободы. Тем самым, полная интегрируемость полевого уравнения автоматически означает существование для этого уравнения бесконечного числа интегралов движения. Полная интегрируемость приводит также к очень специальному устройству динамики, в частности, для уравнения КдВ к её тривиальности.

К настоящему времени метод обратной задачи рассеяния позволил детально исследовать и доказать полную интегрируемость широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений, встречающихся в самых разных областях физики /I3-44/.

Характерной чертой нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР, является наличие бесконечных наборов интегралов движения. Знание высших интегралов движения дает возможность качественно и количественно исследовать такие свойства решений как устойчивость, параметры солитонов, процессы взаимодействия /I4,3,65/. В этом отношении высшие интегралы движения дают значительно больше информации, чем традиционные кинематические интегралы движения. Понятна, поэтому, необходимость исследования структуры и возможных типов высших интегралов движения.

Ясно, что существование высших интегралов движения связано с какой-то дополнительной симметрией уравнений. Знание же полной симметрии задачи всегда всегда позволяет сильно продвинуться в понимании динамики.

Уравнения, интегрируемые МОЗР, допускают также очень своеобразный тип преобразований - так называемые Бэклунд-преобразования. Это нелинейные неоднородные по полю преобразования, переводящие решения некоторого дифференциального уравнения в решения того же самого уравнения. Формулы, задающие Бэклунд-преобразования, можно использовать для нахождения явного вида многосолитонных решений и в качестве производящих формул для получения бесконечных наборов законов сохранения. В этом отношении Бэклунд-преобразования эквивалентны МОЗР.

Перечисленные выше вопросы представляют интерес не только с "практической" точки зрения применения групповых свойств для анализа свойств решений дифференциальных уравнений. Не менее важным является вопрос о возможных типах симметрии и соотношении динамики и симметрии.

Солитонной тематике и методу обратной задачи рассеяния посвящено большое количество статей и обзоров (см., например, /3-9/). Отметим среди них обзор /3/, содержащий подробную библиографию по 1973 г. В настоящей же работе мы рассмотрим групповые свойства интегрируемых МОЗР нелинейных дифференциальных уравнений, а именно: свойства и структуру высших интегралов движения, группы симметрии и Бэклунд-преобразования, общую структуру групп преобразований, допускаемых такими уравнениями.

Высшие интегралы движения интегрируемых уравнений устроены очень специальным образом. Их существование приводит к полному снятию вырождения, т.е. к тому, что фиксированным значением всех интегралов движения соответствует лишь единственное (с точностью до перестановок частиц) состояние. Отсюда вытекает, что процессы с обменом квантовыми числами, и в частности, импульсом отсутствуют. Это справедливо для дифференциальных уравнений, интегрируемых МОЗР с помощью линейной матричной задачи размерностью 2x2. Для уравнений, интегрируемых с помощью операторов размерности 3x3 и выше, динамика устроена менее тривиально - при некоторых специальных соотношениях между значениями высших интегралов движение возможны нетривиальные процессы (модель трех волн, киральные поля).

Мы убедимся, что наличие высших интегралов движения связано с инвариантностью дифференциальных уравнений относительно непрерывных нелинейных преобразований полевых переменных.



Группами симметрии нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемых МОЗР, являются бесконечные группы Ли типа $G_{n\infty}$, в подходящих переменных они суть группы Ли $G_n$, с параметрами, локально зависящими от инфинитезимальных операторов конечнопараметрической группы $G_n$. Бесконечные наборы коммутирующих интегралов движения соответствуют бесконечным абелевым подгруппам групп $G_{n\infty}$.

В обзоре также рассматриваются интенсивно изучаемые в последнее время Бэклунд-преобразования. Для дифференциальных уравнений, интегрируемых МОЗР, существуют Бэклунд-преобразования различных типов с различной групповой структурой. В несолитонном секторе Бэклунд-преобразования образуют бесконечномерную абелеву группу, в солитонном секторе - бесконечную непрерывную абелеву группу, дискретную коммутативную группу. Свойство полной интегрируемости дифференциального уравнения тесно связано с абелевым характером группы Бэклунд-преобразований.

Вполне интегрируемые дифференциальные уравнения кроме групп симметрии и групп Бэклунд-преобразований допускают и более широкие группы преобразований - так называемые динамические группы. Динамическая группа - это группа преобразований, переводящих любое решение некоторого уравнения в любое другое решение того же уравнения. Бесконечная группа симметрии и бесконечная группа Бэклунд-преобразований являются подгруппами бесконечной динамической группы. Многообразие решений вполне интегрируемого уравнения оказывается однородным пространством этой группы. Тем самым, информация, содержащаяся во вполне интегрируемом уравнении, совпадает с информацией, содержащейся в его динамической группе. Более того, самое дифференциальное уравнение может быть получено из динамической группы чисто групповым способом (методом нелинейных реализаций).

При переходе к квантовой теории, анализ высших интегралов движения и групп симметрии усложняется. В ряде случаев удается показать, что учет квантовых эффектов приводит лишь к некоторой модификации высших интегралов движения. Следствием существования высших интегралов в квантовой теории является отсутствие множественного рождения и факторизации $S$-матрицы.

Мы также обсудим некоторые общие свойства групп симметрии: структуру групп, допускаемых дифференциальными уравнениями, связанные с ними квантовые числа, соотношение между группами симметрии и динамикой.

Наконец, в обзоре рассмотрены групповые свойства метода обратной задачи рассеяния. Показано, что МОЗР допускает формулировку, явно учитывающую симметрию интегрируемого уравнения.

План обзора следующий. Во втором разделе обсуждаются высшие интегралы движения линейных дифференциальных уравнений. Некоторые сведения о методе обратной задачи рассеяния приведены в третьем разделе. В четвертом разделе рассматриваются высшие интегралы движения и их свойства для нелинейных интегрируемых уравнений. Соотношению полной интегрируемости, интегралов движения и свойств динамики посвящены два следующих раздела. В частности, в шестом разделе разобран пример интегрируемой МОЗР нелинейной системы с нетривиальными процессами - модель трех волн. Бесконечные группы симметрии интегрируемых уравнений рассматриваются в седьмом разделе. В восьмом разделе обсуждаются свойства и групповая структура Бэклунд-преобразований. Соотношение между МОЗР и Бэклунд-преобразованиями анализируется в следующем девятом разделе. Динамическим группам интегрируемых уравнений посвящен десятый раздел. Переход от классической теории к квантовой кратко обсуждается в одиннадцатом разделе. В предпоследнем, двенадцатом разделе рассмотрен пример частично интегрируемой нелинейной системы с бесконечным числом высших интегралов движения - уравнения сверхпроводимости в приближении Бардина-Купера-Шриффера.

## П. Высшие интегралы движения линейных уравнений

Структура и свойства высших интегралов движения наиболее просты для линейных дифференциальных уравнений [ж)]. Сам по себе

ж) Подчеркнем, что мы рассматриваем уравнения теории поля. Зависимые величины в дифференциальных уравнениях являются полями, заданными в точках пространства-времени.



случай линейных уравнений, в силу тривиальности динамики, не представляет особого интереса. Однако обсудить его имеет смысл. Во-первых, для линейных уравнений, допускающих полное исследование, легко понять возможную структуру высших интегралов движения. Во-вторых, нелинейные вполне интегрируемые дифференциальные уравнения подходящим каноническим преобразованием могут быть отображены в линейные уравнения. Тем самым, при анализе групповых свойств нелинейных уравнений весьма полезным может оказаться знание свойств симметрии линейных уравнений.

Обычные интегралы движения и законы сохранения линейных уравнений, а также их свойства хорошо известны (см.например, /12/). Это законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, заряда и т.п. Собственные значения соответствующих интегралов движения характеризуют физическое состояние. В частности, фиксирование собственных значений полного набора обычных интегралов движения однозначно задает одночастичное состояние. Характерным для обычных интегралов движения является то, что соответствующие плотности содержат поля и производные полей в степенях, не превышающих тех, которые имеются в лагранжиане (гамильтониане). Высшими мы будем называть законы сохранения, содержащие более высокие порядки производных и степени полей.

Впервые высший интеграл движения был построен в работе /45/ для уравнений Максвелла. Быстро выяснилось, что подобные интегралы движения можно построить для других линейных уравнений и, более того, что для каждого уравнения имеется бесконечное число таких интегралов движения /46-54/.

Существование бесконечных наборов законов сохранения для любого трансляционно-инвариантного уравнения, описывающего свободное поле, достаточно очевидно. Действительно, поскольку уравнение для свободного поля $\psi(x)$ линейно по полю, то этому же уравнению удовлетворяют и поля $\frac{\partial^n \psi(x)}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_n}}$, где $x = \{x^\mu, \mu = 0,1,2,3\}$ - координаты пространства-времени, а $n$ -любое целое положительное число. Далее, т.к. при построении сохраняющейся величины важно только то, что поле удовлетворяет некоторому уравнению, то вместо $\psi(x)$ мы можем использовать любую компоненту поля $\frac{\partial^n \psi(x)}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_n}}$.

В результате, для свободного поля получаем бесконечный набор (мультиплет) высших интегралов движения ( $n = 1,2,3...$), связанных с исходным интегралом движения ( $n = 0$).

Приведем несколько примеров. Нейтральное скалярное поле $\varphi(x)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^\mu \partial x^\mu} + m^2 \varphi(x) = 0$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. С законом сохранения $4$ -вектора энергии - импульса $P_\mu$ ассоциирован бесконечный мультиплет интегралов движения:

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\nu \, T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)}$$

$$T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^{n+1}\varphi(x)}{\partial x^\mu \partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}} \cdot \frac{\partial^{n+1}\varphi(x)}{\partial x^\nu \partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} - \right. \tag{2.1}$$

$$- g_{\mu\nu} \frac{\partial^{n+1}\varphi(x)}{\partial x^\sigma \partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}} \cdot \frac{\partial^{n+1}\varphi(x)}{\partial x^\sigma \partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} +$$

$$\left. + m^2 g_{\mu\nu} \frac{\partial^{n}\varphi(x)}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}} \cdot \frac{\partial^{n}\varphi(x)}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} \right) + (\tau \leftrightarrow \rho)$$



где $\mu, \nu, \tau, \rho = 0,1,2,3$; $n = 0,1,2,\dots$ .
Отметим, что не все величины $P^{(n)}_{\mu(\tau\dots)(\rho\dots)}$ независимы, т.к.

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_{n-1}\tau_n)} = m^2 P^{(n-1)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_{n-1})(\rho_1\dots\rho_{n-1})}$$

Можно также построить бесконечный мультиплет, связанный с моментом: $\mathcal{J}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)} = \int d\sigma_\lambda M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\dots)}$ . Однако в силу соотношения

$$M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\dots)} = x_\mu T^{(n)}_{\lambda\nu(\dots)} - x_\nu T^{(n)}_{\lambda\mu(\dots)}$$

величины $\mathcal{J}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)}$ не являются независимыми.
Для свободного спинорного поля $\psi(x)$ ($i\gamma_\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - m\psi = 0$, где $\gamma_\mu$ -матрицы Дирака) легко построить три бесконечных набора высших интегралов движения /56/. Первый мультиплет - мультиплет заряда:

$$Q^{(n)}_{(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \int d\sigma_\mu \mathcal{J}^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} \tag{2.2}$$

$$\mathcal{J}^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\gamma_\mu \frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \text{э.с.}$$

Второй мультиплет - мультиплет 4-импульса

$$P^{(n)}_{\mu(\dots)} = \int d\sigma_\nu T^{(n)}_{\mu\nu(\dots)} \tag{2.3}$$

$$T^{(n)}_{\mu\nu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\dots\rho_n)} = \frac{i}{2}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\dots\partial x^{\tau_n}}\gamma_\mu \frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial x^\nu\partial x^{\rho_1}\dots\partial x^{\rho_n}} + \text{э.с.}$$

Наконец, третий мультиплет - мультиплет моментов

$$\mathcal{J}^{(n)}_{\mu\nu(\dots)} = \int d\sigma_\lambda M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\dots)} \tag{2.4}$$

$$M^{(n)}_{\lambda,\mu\nu(\tau_1\cdots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)} = x_\mu T^{(n)}_{\lambda\nu(\tau_1\cdots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)} - x_\nu T^{(n)}_{\lambda\mu(\tau_1\cdots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)} + \frac{1}{8}\frac{\partial^n\bar\psi}{\partial x^{\tau_1}\ldots\partial x^{\tau_n}}(\gamma_\lambda\sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}\gamma_\lambda)\frac{\partial^n\psi}{\partial x^{\rho_1}\ldots\partial x^{\rho_n}} + (\tau\leftrightarrow\rho)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$.

Аналогичным образом могут быть построены высшие интегралы движения для любого свободного поля и систем полей.

Все результаты этого раздела, справедливы для пространства-времени произвольной размерности $N$. Лоренцевские индексы во всех формулах принимают значения $0,1,\ldots,N-1$.

Приведенные выше интегралы движения, как мы уже отмечали, получаются из обычных заменой $\psi(x)\to\frac{\partial^n\psi(x)}{\partial x^{\mu_1}\ldots\partial x^{\mu_n}}$ и связаны с трансляционной инвариантностью линейных уравнений. Оказывается, что каждая обычная группа симметрии порождает бесконечные серии высших интегралов движения. Пусть уравнение

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = 0$$

инвариантно относительно преобразований $\psi(x)\to\psi'(x) = \psi(x) + a_\alpha \mathcal{D}_\alpha\psi(x)$, где $a_\alpha$ $(\alpha=1,\ldots,N)$ параметры преобразований, $\mathcal{D}_\alpha$ – инфинитезимальные операторы группы. Тогда $\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{D}_\alpha\psi(x) = 0$ и, следовательно,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathcal{D}_{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{\alpha_n}\psi(x) = 0$$

Делая в обычных сохраняющихся величинах $I_{\alpha\mu}\{\psi,\psi\}$ замену

$$\psi(x)\longrightarrow\mathcal{D}_{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{\alpha_n}\psi(x)$$

получаем бесконечный набор высших интегралов движения $(\alpha,\beta=1,\ldots,N;$ $n=1,2,3,\ldots)$



$$I_{\alpha(\alpha_1\cdots\alpha_n)(\beta_1\cdots\beta_n)} = \int d\sigma_\mu I_{\alpha\mu}\{\mathcal{D}_{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{\alpha_n}\psi, \mathcal{D}_{\beta_1}\cdots\mathcal{D}_{\beta_n}\psi\} \quad (2.5)$$

Формула (2.5) дает общий вид высших интегралов движения, порождаемых обычными интегралами. Существуют, по-видимому, высшие интегралы движения, отличные от (2.5).

Высшие интегралы движения типа (2.I) – (2.4) можно получить из обычных также следующим образом /48/. Возьмем обычный сохраняющийся тензор $I_{\alpha\mu}\{\varphi(x)\}$ и сделаем в нем замену $\varphi(x)\to\varphi(x\pm a)$. Поскольку для трансляционно-инвариантных уравнений $\varphi(x\pm a)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $\varphi(x)$, то тензор $I_{\alpha\mu}\{\varphi(x\pm a)\}$ тоже будет сохраняющимся. Разложим $I_{\alpha\mu}\{\varphi(x\pm a)\}$ в ряд Тейлора по $a_\mu$:

$$I_{\alpha\mu}\{\varphi(x\pm a)\} = I_{\alpha\mu}\{\varphi(x)\} + a_{\mu_1} I_{\alpha\mu\mu_1}\{\varphi(x)\} + \frac{1}{2!}a_{\mu_1}a_{\mu_2} I_{\alpha\mu\mu_1\mu_2}\{\varphi(x)\} + \cdots$$

В силу произвольности $a_\mu$ тензоры $I_{\alpha\mu\mu_1\ldots\mu_n}$ (коэффициенты разложения) также являются сохраняющимися, а величины $I_{\alpha\mu_1\ldots\mu_n} = \int d\sigma_\mu I_{\alpha\mu\mu_1\ldots\mu_n}\{\varphi(x)\}$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ – интегралами движения. Нетрудно убедиться, что полученные таким способом высшие интегралы движения совпадают с интегралами типа (2.I)–(2.4). Например, для свободного скалярного поля $\varphi(x)$ с массой $m$ из сохранения тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ следует сохранение тензора,

$$T_{\mu\nu}\{\varphi(x\pm a)\} = \frac{\partial\varphi(x+a)}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\varphi(x-a)}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\varphi(x+a)}{\partial x^\rho}\cdot\frac{\partial\varphi(x-a)}{\partial x^\rho} - m^2\varphi(x+a)\,\varphi(x-a)\right).$$

Разлагая этот тензор в ряд Тейлора по $a_\mu$ в качестве коэффициентов разложения получаем тензоры (2.I).

Итак, мы видим, что любое линейное дифференциальное уравнение в частных производных обладает бесконечными наборами интегралов движения. Соответствующие этим интегралам плотности являются билинейными функционалами полей и содержат высокие порядки производных.

Физический смысл высших интегралов движения типа (2.I)-(2.4) наиболее прозрачен в импульсном представлении /5I/. Вводя для свободного вещественного скалярного поля положительно и отрицательно-частотные части стандартным образом $\left(\varphi(x) = \int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\left(a(k)e^{-ikx}+a^+(k)e^{ikx}\right)\right)$ находим

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1\cdots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)} = \int d^4k\,\delta(k^2-m^2)\,k_\mu k_{\tau_1}\cdots k_{\tau_n}k_{\rho_1}\cdots k_{\rho_n}\,a^+(k)a(k) \qquad (2.6)$$

Таким образом, высшие интегралы движения (2.I) суть моменты величины $a^+(k)a(k)$ различных степеней. Обычный 4-вектор энергии-импульса - это её первый момент ( $n$ = 0). Для спинорного поля интегралы движения (2.2)-(2.3) имеют вид (2.6) с заменой *)

$$a^+(k)a(k) \to \sum_\sigma \left(a^+_\sigma(k)a_\sigma(k) \pm b_\sigma(k)b^+_\sigma(k)\right)$$

( $\sigma$ -проекция спина), т.е. являются моментами $\sum_\sigma\left(a^+_\sigma(k)a_\sigma(k)\pm b_\sigma(k)b^+_\sigma(k)\right)$. Аналогичным образом

---

*) Знак плюс соответствует интегралам $Q^{(n)}_{(\cdots)}$, знак минус - $P^{(n)}_{\mu(\cdots)}$.



выглядят и другие высшие интегралы движения.

Значения высших интегралов движения $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\ldots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)}$ для произвольного $N$ -частичного состояния легко находятся из формулы (2.6). Пусть $k_{1\mu},\ldots,k_{N\mu}$ - 4-импульсы частиц. Поскольку для $N$ -частичного состояния $a^+(k)a(k) = \sum_{i=1}^{N}\delta(k-k_i)$ ( $\delta(z)$ -дельта-функция Дирака) имеем

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1,\ldots,\tau_{2n})} = \sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}k_{i\tau_1}\cdots k_{i\tau_{2n}} \qquad (2.7)$$

Собственные значения высших интегралов движения $P^{(n)}_{\mu(\cdots)}$, таким образом, выражаются через собственные значения обычного интеграла $P^{(n=0)}_{\mu}$ -через 4-импульс частиц **). Это свойство высших интегралов приводит к сильным ограничениям. Действительно, рассмотрим $N$ -частичное состояние с 4 -импульсами частиц $k_1,\ldots,k_N$. Сохранение величин $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\cdots\tau_{2n})}$ означает, что одновременно принимают определенные значения следующие комбинации 4-импульсов частиц

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu} = C_\mu \qquad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}k_{i\tau_1}k_{i\tau_2} = C_{\mu\tau_1\tau_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}k_{i\tau_1}\cdots k_{i\tau_{2n}} = C_{\mu\tau_1\cdots\tau_{2n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n=0,1,2,\ldots,\infty)$$

---

**) Обратим еще раз внимание на то, что высшие интегралы $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\cdots\tau_{2n})}$ не равны произведению $P_\mu P_{\tau_1}\cdots P_{\tau_{2n}}$, где $P_\mu = P^{(n=0)}_{\mu}$.

выглядят и другие высшие интегралы движения.

Значения высших интегралов движения $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_n)(\rho_1\cdots\rho_n)}$ для произвольного $N$ -частичного состояния легко находятся из формулы (2.6). Пусть $K_{1\mu},\dots,K_{N\mu}$ - 4-импульсы частиц. Поскольку для $N$ -частичного состояния $a^+(k)\,a(k) = \sum_{i=1}^{N}\delta(k-k_i)$ ( $\delta(z)$ -дельта-функция Дирака) имеем

$$P^{(n)}_{\mu(\tau_1,\dots,\tau_{2n})} = \sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}\,k_{i\tau_1}\cdots k_{i\tau_{2n}} \qquad (2.7)$$

Собственные значения высших интегралов движения $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$, таким образом, выражаются через собственные значения обычного интеграла $P^{(n=0)}_{\mu}$ -через 4-импульс частиц [жж]. Это свойство высших интегралов приводит к сильным ограничениям. Действительно, рассмотрим $N$ -частичное состояние с 4 -импульсами частиц $K_1,\dots,K_N$. Сохранение величин $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\cdots\tau_{2n})}$ означает, что одновременно принимают определенные значения следующие комбинации 4-импульсов частиц

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu} = C_\mu \qquad (2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}\,k_{i\tau_1}\,k_{i\tau_2} = C_{\mu\tau_1\tau_2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{N} k_{i\mu}\,k_{i\tau_1}\cdots k_{i\tau_{2n}} = C_{\mu\tau_1\cdots\tau_{2n}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(n = 0,1,2,\dots,\infty)$$

жж) Обратим еще раз внимание на то, что высшие интегралы $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\dots\tau_{2n})}$ не равны произведению $P_\mu P_{\tau_1}\cdots P_{\tau_{2n}}$, где $P_\mu = P^{(n=0)}_{\mu}$.



Расписывая равенства (2.8) по компонентам, нетрудно убедиться, что сохранение $C_\mu, C_{\mu\tau_1\tau_2},\dots,C_{\mu\tau_1\dots\tau_{2n}},\dots$ означает сохранение 4-импульса каждой частицы (с точностью до перестановок частиц). Напомним, что сохранение 4-импульса требует сохранения его суммарной величины. Высшие же интегралы движения $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\cdots\tau_{2n})}$ $(n=1,2,\dots)$ приводят, как мы видим, к сохранению 4-импульса отдельной частицы. В общем случае результатом существования высших интегралов движения типа (2.5) является сохранение всех квантовых чисел каждой частицы.

Для понимания структуры и свойств интегралов движения линейных уравнений важно то, что сохраняющимися являются не только моменты величины $a^+(k)\,a(k)$, но и она сама (для каждого $k$ ). Величины $a^+(k)\,a(k)$ образуют бесконечный (континуальный) набор интегралов движения с очень простым физическим смыслом - $a^+(k)\,a(k)$ суть числа заполнения состояний. Независимость чисел заполнения от времени и есть основная характеристика линейных систем с точки зрения законов сохранения. Существование высших интегралов движения импа $P^{(n)}_{\mu(\dots)}$ является следствием этого свойства. Отметим, однако, что сохранение всей бесконечной серии интегралов движения $\{P^{(n)}_{\mu(\dots)},\ (n=0,1,2,\dots,\infty)\}$ для свободного скалярного поля эквивалентно сохранению чисел заполнения.

Сохранение квантовых чисел любого состояния для свободного поля есть, тривиальное следствие отсутствия взаимодействия. Интересно здесь то, что факт отсутствия взаимодействия может быть сформулирован на языке законов сохранения как результат существования в системе высших интегралов движения типа (2.5).

Линейные трансляционно-инвариантные дифференциальные уравнения являются простейшими вполне интегрируемыми уравнениями. Совершая преобразование Фурье по пространственным координатам, мы, как хорошо известно, получаем бесконечную систему несвязанных уравнений для Фурье-компонент $a(k)$. Каждое из этих уравнений легко интегрируется и, в результате, мы имеем решение исходного дифференциального уравнения для поля $\varphi(x)$. Переменные типа действие-угол выглядят очень просто - это $a^+(k)a(k)$ и $\arg a(k)$. Переменные типа действия $(a^+(k)\,a(k))$

Расписывая равенства (2.8) по компонентам, нетрудно убедиться, что сохранение $C_\mu, C_{\mu\tau_1\tau_2}, \ldots, C_{\mu\tau_1\ldots\tau_{2n}}, \ldots$ означает сохранение 4-импульса каждой частицы (с точностью до перестановок частиц). Напомним, что сохранение 4-импульса требует сохранения его суммарной величины. Высшие же интегралы движения $P^{(n)}_{\mu(\tau_1\ldots\tau_{2n})}$ $(n=1,2,\ldots)$ приводят, как мы видим, к сохранению 4-импульса отдельной частицы. В общем случае результатом существования высших интегралов движения типа (2.5) является сохранение всех квантовых чисел каждой частицы.

Для понимания структуры и свойств интегралов движения линейных уравнений важно то, что сохраняющимися являются не только моменты величины $a^+(k)\,a(k)$, но и она сама (для каждого $k$). Величины $a^+(k)\,a(k)$ образуют бесконечный (континуальный) набор интегралов движения с очень простым физическим смыслом – $a^+(k)\,a(k)$ суть числа заполнения состояний. Независимость чисел заполнения от времени и есть основная характеристика линейных систем с точки зрения законов сохранения. Существование высших интегралов движения ипа $P^{(n)}_{\mu(\ldots)}$ является следствием этого свойства. Отметим, однако, что сохранение всей бесконечной серии интегралов движения $\{P^{(n)}_{\mu(\ldots)},\ (n=0,1,2,\ldots,\infty)\}$ для свободного скалярного поля эквивалентно сохранению чисел заполнения.

Сохранение квантовых чисел любого состояния для свободного поля есть, тривиальное следствие отсутствия взаимодействия. Интересно здесь то, что факт отсутствия взаимодействия может быть сформулирован на языке законов сохранения как результат существования в системе высших интегралов движения типа (2.5).

Линейные трансляционно-инвариантные дифференциальные уравнения являются простейшими вполне интегрируемыми уравнениями. Совершая преобразование Фурье по пространственным координатам, мы, как хорошо известно, получаем бесконечную систему несвязанных уравнений для Фурье-компонент $a(k)$. Каждое из этих уравнений легко интегрируется и, в результате, мы имеем решение исходного дифференциального уравнения для поля $\varphi(x)$. Переменные типа действие-угол выглядят очень просто – это $a^+(k)a(k)$ и $\arg a(k)$. Переменные типа действия $(a^+(k)\,a(k))$



не зависят от времени и образуют континуальный набор интегралов движения. Высшие интегралы движения типа (2.5) суть высшие моменты переменной действия.

## Ш. Интегралы движения нелинейных уравнений. Метод обратной задачи рассеяния

I. Исследование структуры интегралов движения нелинейных дифференциальных уравнений является сложной задачей. Для построения обычных законов сохранения можно пользоваться некоторыми хорошо известными методами, например, теоремой Нетер /I0-I2/. Однако, при отыскании высших интегралов движения эти методы в лучшем случае малоэффективны. По этой причине построение высших интегралов движения даже в случае одной пространственной координаты потребовало большой "ручной" работы.

Впервые они были построены для уравнения КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad \Big(u_{\underbrace{z\ldots z}_{n}} \equiv \frac{\partial^n u}{\partial z^n}\Big) \tag{3.I}$$

Эти интегралы имеют вид

$$I_n\{u\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T_n\{u(x,t), u_x, \ldots;\}$$

где $T_n\{u, u_x, u_{xx}, \ldots\}$ полином по $u(x,t)$ и пространственным производным от $u$ порядка $n-2$, содержащий слагаемое $u^n$ /58,59/. Первые шесть $T_n$ равны *)

$$T_1 = u \tag{3.2}$$

*) В работах /58,59/ приведен также явный вид величин $X_n$, удовлетворяющих вместе с $T_n$ закону сохранения

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} + \frac{\partial X_n}{\partial x} = 0$$

$$T_2 = u^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} u_x^2 + u^3$$

$$T_4 = \frac{1}{5} u_{xx}^2 + 2uu_x^2 + u^4$$

$$T_5 = \frac{1}{14} u_{xxx}^2 + uu_{xx}^2 + 5u^2u_x^2 + u^5$$

$$T_6 = \frac{1}{42} u_{xxxx}^2 - \frac{10}{21} u_{xx}^3 + \frac{3}{7} uu_{xxx}^2 - \frac{5}{6} u_x^4 +$$

$$+ 3u^2u_{xx}^2 + 10u^3u_x^2 + u^6$$

Интегралы движения $I_1$, $I_2$, $I_3$ имеют простой смысл. В частности $I_3$ -гамильтониан уравнения КдВ. $I_4, I_5, I_6$ и т.д.- это высшие интегралы движения, содержащие высокие степени поля и производные от $u$ высокого порядка. С ростом $n$ вид $T_n$ быстро усложняется. В работах /58,59/ приведены явные выражения одиннадцати $T_n$ и указана общая процедура их построения.

Простой и компактный способ вычисления любого $T_n$ был найден после открытия метода обратной задачи рассеяния. Способ этот позволяет получать рекуррентные соотношения для $T_n$ и является общим для всех уравнений, интегрируемых МОЗР. Метод обратной задачи рассеяния не только дает возможность вычисления высших интегралов движения, но и раскрывает более глубокие групповые свойства интегрируемых уравнений.

2. Существует несколько вариантов метода обратной задачи рассеяния. Этот метод позволяет проинтегрировать широкий класс нелинейных дифференциальных уравнений с любым числом независимых переменных. Мы будем интересоваться в основном уравнениями с двумя независимыми переменными: одной пространственной и



одной временной координатой. Нам потребуется МОЗР не в полном своем объеме, а только некоторые его части. Изложим их, опуская детали.

Отправной точкой МОЗР является сопоставление нелинейному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{F}(u, u_x, u_t, \dots) = 0 \tag{3.3}$$

линейной системы

$$X \Psi = 0 \tag{3.4}$$

$$T \Psi = 0 \tag{3.5}$$

где $X$ и $T$ -дифференциальные (матричные) операторы. При этом условие совместности системы (3.4)-(3.5) должно быть эквивалентно уравнению (3.3). Рассмотрим случай двух независимых переменных $t$ и $x$ и специальных операторов $X$ и $T$ вида:

$$\begin{gathered} \left[\frac{\partial}{\partial x} - Q_1(\{u\}, \lambda)\right] \Psi = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - Q_2(\{u\}, \lambda)\right] \Psi = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $Q_1$, $Q_2$ -матрицы, зависящие от $u$, $u_x$, $u_t$, ... и спектрального параметра $\lambda$. Условие совместности системы (3.6) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} + [Q_1, Q_2] = 0 \tag{3.7}$$

Равенства (3.7) должны выполняться при всех $\lambda$ .

Если нелинейное уравнение может быть представлено в виде (3.7), то ему сопоставить систему (3.6) и, следовательно, к нему применим МОЗР. Приведем несколько примеров. С помощью двурядных матриц

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -i\lambda & u_1 \\ u_2 & i\lambda \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$$

интегрируется целый ряд уравнений /21/, и в частности:

1) Уравнение КдВ:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.8}$$

$$u_1 = u, \quad u_2 = 1$$

$$A = 4i\lambda^3 + 2i\lambda u + u_x$$

$$B = 4\lambda^2 + 2i\lambda u_x + 2u^2 - u_{xx}$$

$$C = 4\lambda^2 + 2u$$

2. Нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2u^* = 0 \tag{3.9}$$

$$u_1 = -u, \quad u_2 = u^*,$$

$$A = 2i\lambda^2 - iuu^*,$$

$$B = -2\lambda u - iu_x,$$

$$C = 2\lambda u^* - iu_x^*$$



3. Уравнение синус-Гордона

$$u_{tx} = \sin u \tag{3.10}$$

$$u_1 = -u_2 = -\frac{1}{2}u_x$$

$$A = -\frac{i}{4\lambda}\cos u$$

$$B = C = -\frac{i}{4\lambda}\sin u$$

Из релятивистски-инвариантных нелинейных уравнений в двумерном пространстве-времени, кроме уравнения синус-Гордона, в матрицах 2х2 интегрируется массивная модель Тирринга ММТ /30,31/. С помощью матриц $Q_1$ и $Q_2$ большей размерности интегрируется модель $N$ волн /24/, главные киральные поля /37/ и ряд других моделей /17,22,26,29,33,39-43/.

В МОЗР главную роль играет оператор $X$ . Уравнение (3.4) осуществляет отображение поля $u(t,x)$ в спектральные данные оператора $X$ . Оператор $T$ выполняет вспомогательную функцию. Он определяет зависимость спектральных характеристик оператора $X$ от времени.

Рассмотрим для иллюстрации нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) /16/. Спектральная задача имеет вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \begin{pmatrix} i\lambda & -u \\ u^* & -i\lambda \end{pmatrix} \Psi = 0 \tag{3.11}$$

Если $u(x,t)$ достаточно быстро убывает на бесконечности $|x| \to \infty$ то каждое решение системы (3.11) определяется одной из своих асимптотик при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ . Прямая задача рассеяния для (3.11) заключается в определении одной из этих асимптотик по заданной другой. Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении $u(x,t)$ по данным рассеяния (т.е.по матрице рассеяния).

Задача рассеяния для системы (3.II) во многом аналогична задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Напомним как вводятся данные рассеяния. Определим при вещественном $\lambda$ функции Йоста $\varphi, \psi$ как решения системы (3.II) с асимптотиками

$$\varphi \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

$$\psi \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

Функции $\varphi$ и $\psi$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\lambda$ при каждом $x$.

Если $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ есть решение (3.II) при вещественном $\lambda$, то $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u_2^* \\ -u_1^* \end{pmatrix}$ —также решение этой системы. Поэтому пара решений $\psi$ и $\tilde{\psi}$ образуют полную систему решений. Тем самым,

$$\varphi = a(\lambda)\tilde{\psi} + b(\lambda)\psi \qquad (3.I2)$$

Величины $a(\lambda), b(\lambda)$ являются элементами унитарной матрицы рассеяния (матрицы перехода)

$$S = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ -b^*(\lambda) & a^*(\lambda) \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $S$ выражаются через функции Йоста

$$a(\lambda) = (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)(x,\lambda), \quad b(\lambda) = (\tilde{\psi}_1\varphi_2 - \tilde{\psi}_2\varphi_1)(x,\lambda) \qquad (3.I3)$$

Из (3.I3) следует, что $a(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости и



$$a(\lambda) \to 1 \quad \text{при} \quad |\lambda| \to \infty, \ \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Точки верхней полуплоскости $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, N)$, в которых $a(\lambda_i) = 0$, соответствуют собственным значениям линейной задачи (3.II), При этом

$$\varphi(x,\lambda_i) = b(\lambda_i)\psi(x,\lambda_i) = C_i\psi(x,\lambda_i) \quad (i = 1, \dots, N)$$

Можно показать, что нули $a(\lambda)$ расположены на мнимой оси. Набор $S = \{a(\lambda), b(\lambda), \lambda_i, C_i;\ i = 1, \dots, N\}$ и есть данные рассеяния. Данные рассеяния по построению не зависят от пространственной координаты $x$. Их зависимость от времени $t$, играющего в уравнении (3.4) роль параметра, определяется уравнением (3.5). Нетрудно убедиться, что

$$a(\lambda,t) = a(\lambda,0) \qquad (3.I4)$$

$$b(\lambda,t) = e^{4i\lambda^2 t} b(\lambda,0), \quad C_i(t) = e^{4i\lambda_i^2 t} C_i(0) \qquad (3.I5)$$

Используя далее уравнения обратной задачи рассеяния (уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко) по данным рассеяния можно восстановить $u(x,t)$. При этом удается найти явный вид широкого класса решений – так называемые многосолитонные решения /I6/.

В общем случае схема МОЗР примерно такая же. Её можно представить следующим образом

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{F}(u, u_x, u_t, \ldots) = 0$ | $\longleftrightarrow$ | $X\Psi = 0$, $T\Psi = 0$ |
| $u(x,t)$ | $\longleftrightarrow$ | $S(\lambda, t)$ |
| $u(x,0) \to S(\lambda,0) \to S(\lambda,t) \to u(x,t)$ | | |

Различные варианты МОЗР по-существу, эквивалентны этому. Отметим, что МОЗР можно рассматривать как нелинейное обобщение метода преобразования Фурье /21/.

С помощью линейной спектральной задачи

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\lambda\sigma_3\psi + \left\{\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)u_1 + \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)u_2\right\}\psi = 0 \qquad (3.16)$$

( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -матрицы Паули) интегрируются также уравнения с произвольным числом пространственных координат /29/. Эти уравнения можно записать в следующем виде

$$\sigma_3 \frac{\partial v(t,x,\vec{y})}{\partial t} + \vec{V}(t,L,\vec{y})\sigma_3 \frac{\partial v(t,x,\vec{y})}{\partial \vec{y}} + \qquad (3.17)$$

$$+ \gamma(t,L,\vec{y})\, v(t,x,\vec{y}) = 0$$



где $v = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$, $\vec{V}$ и $\gamma$ - произвольные функции и оператор $L$ равен

$$L = \frac{1}{2i}\sigma_3 \frac{\partial}{\partial x} - vIv^T\sigma_2 \qquad (3.18)$$

$$(If)(x) = \int_x^\infty d\xi\, f(t,\xi,\vec{y})$$

Вообще, для нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР характерно существование двух типов решений. Первый - решения солитонного типа. Они задаются нулями диагональных элементов матрицы перехода $S(\lambda)$ и их удается находить в явном виде. Решения второго типа определяются значениями $S(\lambda)$ на вещественной оси. Для них вычисляются только асимптотики. Первый тип решений соответствует дискретному спектру интегрирующего оператора $X$, второй тип решений - непрерывному спектру.

Многообразие решений нелинейного интегрируемого уравнения, имеет, как правило, два инвариантных подмногообразия. Одно из них содержит решения, соответствующие чисто дискретному спектру - будем называть его солитонным сектором. Второе содержит решения определяемые чисто непрерывным спектром - несолитонный сектор. Решения из этих двух секторов обладают разными свойствами. Как мы увидим, различаются и их групповые свойства.

## IУ. <u>Интегралы движения и МОЗР</u>

I. Обратим теперь внимание на тот факт, что диагональные элементы матрицы перехода $S$ от времени не зависят. Не зависит от времени, естественно, и количество нулей $a(\lambda)$ и их положение. Тем самым, диагональные элементы матрицы перехода и их свойства суть сохраняющиеся характеристики: $a(\lambda)$

и её нули $\lambda_i$ образуют бесконечный набор интегралов движения нелинейного уравнения. Эти интегралы движения являются фундаментальными, но к сожалению, они лишь неявные функционалы полевых переменных.

МОЗР дает возможность построить из них счетный набор явных и локальных интегралов типа (3.2). Рассмотрим для определенности нелинейное уравнение Шредингера /I6/. Вывод основан на использовании уравнений (3.II)-(3.I3).

Из формул (3.I3) следует, что функция $\ln a(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$, $\Im\lambda>0$ и допускает асимптотическое разложение по степеням $\lambda^{-1}$:

$$\ln a(\lambda) \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda^n} \qquad (4.I)$$

Коэффициенты разложения $C_n$ являются, естественно, интегралами движения. Выразим их через полевые переменные $u(x,t)$. Для этого заметим, что (см.формулу (3.I2))

$$\varphi_1(x,\lambda)\, e^{i\lambda x} \to a(\lambda) \text{ при } x\to+\infty, \quad \Im\lambda>0, \quad \lambda\neq\lambda_i \qquad (4.2)$$

где $\varphi_1$ -верхняя компонента функции Йоста $\varphi$. Обозначая $\ln(\varphi_1 \exp(-i\lambda x)) = \Phi$, имеем $\Phi(x,\lambda)\to \ln a(\lambda)$ при $x\to+\infty$.

Далее, легко убедиться в справедливости соотношения

$$\ln a(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Phi'(x,\lambda), \quad \Phi' = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad (4.3)$$

Функция $\Phi'(x,\lambda)$, входящая в интеграл (4.3) удовлетворяет, как это вытекает из (3.II), уравнению

$$2i\lambda\,\Phi' = |u|^2 + \Phi'^2 + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\Phi'\right) \qquad (4.4)$$

Разложим теперь $\Phi'(x,\lambda)$ в асимптотический ряд по $\lambda^{-1}$

$$\Phi'(x,\lambda) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{(2i\lambda)^n} \qquad (4.5)$$

Из формул (4.I), (4.3), (4.5) следует, что

$$C_n = \frac{1}{(2i)^n}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \quad (n=1,2,\dots) \qquad (4.6)$$

Подставляя разложение (4.5) в формулу (4.4) мы получаем следующие рекурретные соотношения для $f_n(x)$:

$$f_{n+1} = u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u} f_n\right) + \sum_{j+k=n} f_j f_k, \quad f_1 = |u|^2 \qquad (4.7)$$

Эти рекуррентные соотношения и решают задачу: используя их мы можем вычислить любой интеграл движения $C_n$ $(n=1,2,\dots)$. Все $C_n$ в силу (4.7) представляют собой полиномы от функций $u(x,t)$ и её производных по $x$. Приведем явный вид первых пяти интегралов движения:

$$C_1 = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|u|^2,$$

$$C_2 = -\frac{1}{(2i)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(u^* u_x - u u_x^*), \qquad (4.8)$$

$$C_3 = -\frac{1}{(2i)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(|u_x|^2 - |u|^4),$$

$$C_4 = \frac{1}{(2i)^4}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(u u^*_{xxx} + 3u u^*_x |u|^2),$$

$$C_5 = \frac{1}{(2i)^5}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(|u_{xx}|^2 + 2|u|^6 - \left(\frac{\partial}{\partial x}|u|^2\right)^2 - 6|u_x|^2|u|^2\right)$$

Первые три интеграла имеют простой физический смысл и совпадают с точностью до множителей с зарядом $(C_1)$, импульсом $(C_2)$ и энергией $(C_3)$. Это обычные интегралы движения. Константы $C_4, C_5$ являются высшими интегралами движения: максимальная суммарная степень $u$ и $u_x$ в $C_n$ равны $n+1$, максимальный порядок производной по $x$ – $(n-1)$. Интегралы $C_n \ (n \geq 4)$ непосредственного физического смысла не имеют. Подробнее мы обсудим их ниже.

Аналогичным способом можно получать бесконечные серии явных интегралов движения и для других нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемых МОЗР. Например, для уравнения КдВ рекурентные соотношения для плотности $T_n$ имеют вид /I5/ $(T_n = \sigma_{2n-1},\ n = 1, 2, \ldots)$

$$\sigma_j(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{j-1}(x) - \sum_{k=1}^{j-1}\sigma_{j-k-1}(x)\,\sigma_k(x) \qquad (4.9)$$

$$j = 2, 3, \ldots; \qquad \sigma_1 = u(x)$$

Нетрудно проверить, что полученные таким образом интегралы движения совпадают (с точностью до множителей) с интегралами (3.2) /58/. Однако МОЗР, как мы видим, дает гораздо более простой способ их вычисления.

Отметим одно общее свойство интегралов движения типа (3.2), (4.8). Все они (исключая $T_1$) содержат часть билинейную по полю $u(x,t)$. Обозначим её $C_n^0\,(I_n^0)$. Легко проверить, что $C_n^0\,(I_n^0)$ ($n$ = I, 2, ...) являются интегралами движения уравнения, совпадающего с линейной частью НУШ (КдВ). Таким образом, высшие интегралы нелинейных дифференциальных уравнений, интегрируемых МОЗР, получаются "деформацией" (добавлением нелинейностей) высших интегралов движения соответствующих линейных уравнений.

Бесконечные наборы интегралов движения построены для большинства нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР: как для уравнений, КдВ /I5/, НУШ /I6/, синус-Гордон /I8,20/ массивная модель Тирринга /30,3I/ и т.д., так и для уравнений с операторами $X, T$ размерностью 3x3 и выше – модель трех волн /24/, $\sigma$ – модели /27/, главные киральные поля /80/.



Вообще, существование бесконечных серий законов сохранения – характерное свойство интегрируемых МОЗР нелинейных уравнений. Структура интегралов движения определяется, как мы видели, интегрирующим оператором $X$ и является весьма специальной: для всех интегралов имеется один производящий функционал – величина $a(\lambda)$. В общем случае, производящие функционалы интегралов движения – это диагональные элементы матрицы перехода $S(\lambda)$.

Существование у нелинейного уравнения высших интегралов движения и применимость к этому уравнению МОЗР тесно связаны между собой. Первое, по-видимому, является необходимым условием второго. Однако, наличие высших интегралов не достаточно для интегрируемости (см.разд.XII).

2. Обратим внимание на еще одно важное свойство высших интегралов движения. Если нелинейное уравнение имеет эти интегралы, то число их обязательно бесконечно. Во всех до конца исследованных случаях это так. По-видимому, справедливо общее <u>утверждение</u>: нелинейное дифференциальное уравнение либо обладает бесконечным числом высших интегралов движения либо не обладает таковыми вообще.

Это предположение весьма правдоподобно, поскольку существование высшего интеграла движения накладывает сильные ограничения на возможный вид уравнения. Соответствующие ограничения, по-видимому, настолько жестки, что удовлетворяющее им уравнение обладает уже бесконечным набором высших интегралов.

Приведем один конкретный пример, рассмотренный в работе /69/. Линейное уравнение

$$\varphi_{\sigma\tau} + m^2\varphi = 0, \quad \tau = \frac{t-x}{2}, \ \sigma = \frac{t+x}{2} \qquad (4.II)$$

обладает, как мы видели во втором разделе, бесконечным набором высших законов сохранения. Один из простейших можно представить в виде сохраняющегося тока $(\mathcal{J}_\tau^{(2)}, \mathcal{J}_\sigma^{(2)})$ с компонентами

$$\mathcal{J}_\tau^{(2)} = (\partial_\sigma^2 \varphi)^2, \quad \mathcal{J}_\sigma^{(2)} = -m^2 (\partial_\sigma \varphi)^2 \tag{4.12}$$

$$\partial_\tau \mathcal{J}_\tau^{(2)} - \partial_\sigma \mathcal{J}_\sigma^{(2)} = 0 \tag{4.13}$$

Будем теперь переходить от линейного уравнения (4.II) к нелинейному. Как мы уже отмечали, высшие интегралы нелинейных уравнений получаются "деформацией" соответствующих высших интегралов линейных уравнений. При этом линейное уравнение "деформируется" в нелинейное. Выясним, как можно видоизменить уравнение (4.II), если потребовать, чтобы нелинейность содержала только степени поля $\varphi$ и сохраняющиеся токи получали добавки по $\varphi$ степени выше второй. Запишем "деформированное" уравнение в виде бесконечного ряда

$$\varphi_{\sigma\tau} + m^2 \varphi = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \varphi^n \tag{4.14}$$

Определим константы $a_n$. Рассмотрим ток $\mathcal{J}_\tau^{(2)}$. Для его сохранения должно выполняться уравнение

$$\partial_\tau \varphi_{\sigma\sigma}^2 = 2\varphi_{\sigma\sigma}\varphi_{\sigma\sigma\tau} = \partial_\sigma \mathcal{J}_\sigma^{(2)} + \partial_\tau F(\varphi, \varphi_\sigma, \dots) \tag{4.15}$$

где в правой части может возникнуть дополнительный член в виде производной по $\tau$. Модифицируя ток, этот член можно перенести в левую часть. Используя (4.I4) перепишем (4.I5) в виде

$$\partial_\tau \varphi_{\sigma\sigma}^2 = \partial_\sigma \left[ \varphi_\sigma^2 \left( -m^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \varphi^{n-1} \right) \right] - \tag{4.16}$$



$$- \varphi_\sigma^3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \varphi^{n-2}$$

Для того, чтобы равенство (4.I6) выражало закон сохранения, последнее слагаемое должно быть полной производной по $\tau$. Выразим в этом слагаемом член, содержащий $\varphi$ $(n=3)$, через уравнение движение (4.I4). В результате получим

$$\frac{6a_3}{4m^2} \partial_\tau \varphi_\sigma^4 - \varphi_\sigma^3 \Big( 2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \big[ (n+2)(n+1) a_{n+2} + 6m^{-2} a_3 a_n \big] \varphi^n \Big)$$

Тем самым, последний член в (4.I6) состоит из двух слагаемых. Первое имеет вид полной производной по $\tau$, второе – ряд по $\varphi$, который нельзя представить в виде производной по $\sigma$ или по $\tau$. Следовательно, этот ряд должен тождественно обратиться в нуль. Это дает соотношение между его коэффициентами

$$a_2 = a_{2n} = 0, \quad a_{2n+1} = -\frac{m^2 A^n}{(2n+1)!}, \quad A = -6a_3 m^{-2}$$

Уравнение (4.I4) в результате имеет вид

$$\varphi_{\sigma\tau} + m^2 A^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh}\left(A^{-\frac{1}{2}} \varphi\right) = 0 \tag{4.17}$$

где $A$ – произвольная константа.

Таким образом, требование существования высшего интеграла движения почти однозначно фиксирует вид нелинейного уравнения.

Уравнение (4.I7), как известно, интегрируется МОЗР[ж)] и обладает бесконечным набором высших интегралов движения.

Итак, мы видим, что существование одного высшего интеграла движения означает существование бесконечного числа этих интегралов.

Аналогичные результаты нетрудно получить и для других конкретных уравнений.

Отметим также результат работы /64/, в которой рассматривался класс обобщенных уравнений КдВ

$$u_t + u^p u_x + u_x^{2q+1} = 0 \qquad (4.I8)$$

где $p, q$ - неотрицательные целые числа и

$$u_x^r \equiv \frac{\partial^r u}{\partial x^r}$$

В этой работе показано, что в зависимости от значений чисел $p$ и $q$ уравнения (4.I8) имеют либо три закона сохранения, либо бесконечное число, а именно:

I) при $p = 0$ и $q$ - произвольном уравнения линейны и имеют бесконечное число законов сохранения.

2) при $q = 0$ и $p$ - произвольном уравнения (4.I8) подстановкой $v = u^p + 1$ сводятся к уравнению $v_t + v v_x = 0$ для которого легко построить бесконечное число законов сохранения.

3) бесконечное число законов сохранения имеет также еще в двух случаях: $p = 1$, $q = 1$ (уравнение КдВ) и $p = 2$, $q = 1$ (модифицированное уравнение КдВ).

4) остальные уравнения типа (4.I8) обладают только тремя законами сохранения. Это обычные законы сохранения аналогичные $T_1, T_2, T_3$ в формулах (3.2).

---

ж) Уравнение синус-Гордона - это частный случай А = -I.



Таким образом, уравнения класса (4.I8) либо обладают бесконечным числом высших интегралов движения, либо не обладают ими совсем.

3. Высшие законы сохранения, рассмотранные в предыдущих пунктах являются локальными функционалами полевых переменных (плотности интегралов движения зависят от поля $u(x,t)$ и конечного числа его производных в одной и той же точке). Нелинейные уравнения, интегрируемые МОЗР, обладают также бесконечными наборами нелокальных интегралов движения. Процедура их построения полностью аналогична описанной в п.I этого раздела.

Рассмотрим в качестве примера нелинейную $O(3)$ $\sigma$ -модель /27/. Уравнения движения этой модели

$$\partial_\mu \partial_\mu q^a + (\partial_\mu q^b \cdot \partial_\mu q^b) q^a = 0, \quad q^b q^b = 1 \qquad (4.I9)$$

где $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $(x^\mu = \{t, x\})$, $a, b$ = I,2,3, интегрируются с помощью следующей линейной спектральной задачи /27,78/

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\{(q_t \times q)^a - \lambda (q_x \times q)^a\} i\sigma^a U \qquad (4.20A)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\{(q_x \times q)^a - \lambda (q_t \times q)^a\} i\sigma^a U \qquad (4.20B)$$

где $U$ -представление группы $SO(3)$ размерности 2 x 2; $(A \times B)^a = \varepsilon^{abc} A^b B^c$, $\sigma^a$ -матрицы Паули.

Нетрудно убедиться, что величина $Q(\lambda) = U(t, \infty)$ от времени не зависит. Следователь, коэффициенты $Q_n$ разложения $Q(\lambda)$ в ряд по $\lambda$

$$Q(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Q_n$$

образуют бесконечный набор интегралов движения. Для определения явной зависимости $Q_n$ от $q^a(t,x)$ перепишем (4.20а) в виде интегрального уравнения

$$U(x,t;\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{-\lambda^2+1} \int\limits_{-\infty}^{x} dy \{ (q_t \times q)^a (t,y) - \tag{4.21}$$
$$- \lambda (q_y \times q)^a (t,y) \} i\sigma^a U(t,y;\lambda) .$$

Подставляя в (4.2I) разложение

$$U(t,x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(t,x)$$

получаем рекуррентные соотношения /78/

$$U_n(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{x} dy \{ (q_t \times q)^a (t,y) i\sigma^a \sum_{0 \le k \le \frac{n-1}{2}} U_{n-2k-1}(t,y) - \tag{4.22}$$

$$- (q_y \times q)^a (t,y) i\sigma^a \sum_{1 \le \ell \le \frac{n}{2}} U_{n-2\ell}(t,y) \} , \quad n \ge 1$$

где $U_0(t,x) = 1$ , $U(t,-\infty) = 1$.
Из формул (4.22) видно, что интегралы движения $Q_n \equiv U_n(t,\infty)$ являются суммами $m$ -кратных ( $m < n$ ) упорядоченных интегралов. Первые $Q_n$ равны ( $Q_n = Q_n^0 + i Q_n^a \sigma^a$ ).

$$Q_1^0 = 0 , \quad Q_1^a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy (q_t \times q)^a (t,y) \tag{4.23}$$

$$Q_2^0 = - \frac{1}{2} Q_1^a Q_1^a$$

$$Q_2^a = - \int dy_1 \, dy_2 \, \theta(y_1 - y_2) \epsilon^{abc} (q_t \times q)^b (t,y_1) \cdot (q_t \times q)^c (t,y_2) \tag{4.24}$$
$$- \int dy (q_y \times q)^a (t,y)$$



$Q_1^a$ –полный изоспин системы. Интгралы движения $Q_n$ $(n \ge 2)$ нелокальны и не могут быть представлены в виде интегралов от локальных плотностей. В силу нелокальности интегралы движения $Q_n$ $(n \ge 2)$ не являются аддитивными: если поля $q^a(t,x)$ сосредоточены в двух неперекрывающихся областях $\{e\}$ и $\{r\}$ , то

$$Q_n[r+e] \ne Q_n[r] + Q_n[e] \tag{4.25}$$

Отметим, что вместо аддитивности выполняется следующее соотношение для производящих функционалов $Q[r+e](\lambda)$, $Q[r](\lambda)$, $Q[e](\lambda)$ :

$$Q[r+e](\lambda) = Q[r](\lambda) \cdot Q[e](\lambda) \tag{4.26}$$

Раскладывая $Q$ в ряд по $\lambda$ получаем, например,

$$Q_1^a[r+e] = Q_1^a[r] + Q_1^a[e] \tag{4.27}$$

$$Q_2^a[r+e] = Q_2^a[r] + Q_2^a[e] - \epsilon^{abc} Q_1^b[r] Q_1^c[e]$$

Свойства (4.26), (4.27) можно интерпретировать как "неабелевую" аддитивность.

Нелокальные интегралы типа (4.25) возникли при разложении в окрестности $\lambda = 0$ . Эта точка является регулярной для спектральной задачи (4.20). При разложении в окрестности сингулярной точки $\lambda$ = I (или $\lambda$ = –I) мы получим бесконечный набор локальных интегралов движения.

Аналогичным образом можно построить нелокальные интегралы движения для других уравнений, интегрируемых МОЗР. В общем случае, при разложении диагональных элементов матрицы перехода в окрестности любой регулярной точки спектральной задачи получаются, как правило, серии нелокальных интегралов движения. Бесконечные серии локальных интегралов движения возникают при разложении вокруг сингулярных точек.

## У. Полная интегрируемость.

Ситуация с законами сохранения нелинейного дифференциального уравнения в значительной степени проясняется, если удастся доказать его полную интегрируемость. Полная интегрируемость означает существование переменных $S_k$, $\Omega_k$ типа действие-угол /10,11/: т.е. таких канонических переменных, что гамильтониан системы зависит только от канонических импульсов $S_k$, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{dS_k}{dt}=0\,,\qquad \frac{d\Omega_k}{dt}=\frac{\delta\mathcal{H}\{S\}}{\delta S_k}\,. \tag{5.1}$$

где индекс $k$ нумерует канонические переменные. Переменные $S_k$ являются интегралами движения, а уравнение для $\Omega_k$ легко интегрируется. Поскольку $S_k$ образуют полный набор, (по одному интегралу движения на каждую степень свободы), то любой интеграл движения выражается через $\{S_k\}$.

Для уравнений, к которым применим МОЗР, полная интегрируемость доказана в большинстве случаев /15,20,23,25,28,31,42,9/. Рассмотрим наш традиционный пример – нелинейное уравнение Шредингера /23/. Оно записывается в виде

$$iu_t=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u^*}\,,\qquad iu_t^*=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \tag{5.2}$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ есть

$$\mathcal{H}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\left(|u_x|^2-|u|^4\right) \tag{5.3}$$



Скобки Пуассона двух функционалов $\alpha$, $\beta$ задаются формулой

$$\{\alpha,\beta\}=i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u}\cdot\frac{\delta\beta}{\delta u^*}-\frac{\delta\alpha}{\delta u^*}\cdot\frac{\delta\beta}{\delta u}\right) \tag{5.4}$$

Тем самым, если $u(x,t)$ отождествлять с канонической координатой, то канонический импульс $\pi(t,x)=iu^*(t,x)$ *):

$$\{u(t,x),\pi(t,y)\}=\delta(x-y)$$

Важным промежуточным этапом при построении переменных типа действие-угол является переход от переменных $u(t,x)$, $u^*(t,x)$ к данным рассеяния $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Данные рассеяния удовлетворяют линейным уравнениям и поэтому ясно, что они связаны с переменными действие-угол. Используя равенства (3.13) удается вычислить скобки Пуассона для данных рассеяния /23/:

$$\{a(\lambda),a(\lambda')\}=0\,,\quad\{b(\lambda),b(\lambda')\}=0$$

$$\{a(\lambda),b(\lambda')\}=\frac{1}{\lambda'-\lambda}\,a(\lambda)\,b(\lambda')-i\pi\,\delta(\lambda-\lambda')\,a(\lambda)\,b(\lambda). \tag{5.5}$$

После этого нетрудно проверить, что переменные

$$P_\lambda=-\frac{4}{\pi}\ln|a(\lambda)|^2\,,\quad Q_\lambda=\frac{1}{4}\arg b(\lambda) \tag{5.6}$$

являются каноническими, т.е.

$$\{P_\lambda,P_{\lambda'}\}=0,\ \{Q_\lambda,Q_{\lambda'}\}=0,\ \{P_\lambda,Q_{\lambda'}\}=\delta(\lambda-\lambda') \tag{5.7}$$

---

*) Точнее, $u(t,x), iu^*(t,x)$ есть континуум канонических переменных.

Если $a(\lambda)$ имеет нули в верхней полуплоскости (которые можно считать простым) переменные $P_\lambda, Q_\lambda$ должны быть дополнены дискретным набором канонических переменных, связанных с нулями $\lambda_m$ величины $a(\lambda)$. Эти переменные имеют вид /23/

$$P_m = \lambda_m, \quad Q_m = -\ln C_m^2, \quad m = 1, \ldots, N \tag{5.8}$$

где $N$ -число нулей $a(\lambda)$.

Совокупность переменных (5.6), (5.8) является полной . Действительно, зная $P_\lambda$ и $P_m$ мы можем восстановить всю функцию $a(\lambda)$ по формуле

$$a(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{\ln|a(\lambda')|^2}{\lambda'-\lambda}\right\}\prod_{m=1}^{N}\frac{\lambda-\lambda_m}{\lambda-\lambda_m^*}, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0 \tag{5.9}$$

$$a(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} a(\lambda + i\varepsilon), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0.$$

Величина $b(\lambda)$ легко находится из соотношения $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$. По известным $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ однозначно восстанавливается $u(t,x)$.

Заметим, теперь, что $P_\lambda$ и $P_m$ строятся из независящей от времени величины $a(\lambda)$ и, следовательно, они являются интегралами движения. Оказывается, интегралы движения, рассмотренные в предыдущем разделе (см.(4.6)), суть их простые функции. Чтобы убедиться в этом, достаточно разложить правую часть формулы (5.9) в ряд по $1/\lambda$ . В результате имеем /23/

$$C_n = \frac{1}{8i}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \lambda^{n-1} P_\lambda - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{N}\left(P_m^n - P_m^{*n}\right) \tag{5.10}$$

в частности, гамильтониан $\mathcal{H}$ равен $(\mathcal{H} = 8i C_3)$

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, \lambda^2 P_\lambda + \frac{8}{3i}\sum_{m=1}^{N}\left(P_m^3 - P_m^{*3}\right) \tag{5.11}$$



Таким образом, гамильтониан зависит только от переменных $P_\lambda$ и $P_m$ , а уравнения движения, в чем легко убедиться, имеют вид

$$\frac{dP_\lambda}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_\lambda}{dt} = \lambda^2, \tag{5.12}$$

$$\frac{dP_m}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_m}{dt} = -8i P_m^2 \quad (m = 1, \ldots, N)$$

Следовательно, канонические переменные $P_\lambda, Q_\lambda$ и $P_m, Q_m$ являются переменными типа действие-угол для нелинейного уравнения Шредингера (5.2). Уравнения (5.12) тривиально интегрируются

$$P_\lambda(t) = P_\lambda(0), \quad Q_\lambda(t) = \lambda^2 t + Q_\lambda(0) \tag{5.13}$$

$$P_m(t) = P_m(0), \quad Q_m(t) = -8i P_m^2 t + Q_m(0)$$

Для того, чтобы выяснить как меняются со временем исходные канонические переменные $u(t,x), \pi(t,x)$ достаточно совершить обратное преобразование $\{P_\lambda, Q_\lambda; P_m, Q_m\} \to \{u(t,x), \pi(t,x)\}$. В явном виде это удается сделать только для дискретных переменных $P_m, Q_m$ .

Вместе с нелинейным уравнением Шредингера (5.2) вполне интегрируемыми являются все нелинейные уравнения вида

$$i u_t = \frac{\delta}{\delta u^*}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\, C_n\right) \tag{5.14}$$

где $C_n$ -интегралы (4.6), а $\varphi_n(t)$ -произвольные функции. Для уравнений типа (5.14) интегрирующий оператор $X$ один и тот же.

Аналогичным образом доказывается полная интегрируемость и для других уравнений, к которым применим МОЗР: переменные типа действие-угол просто выражаются через спектральные данные (данные рассеяния) оператора $X$ .

2. Переход к переменным типа действие-угол раскрывает глубокие свойства нелинейных дифференциальных уравнений.

Обратим внимание на то, что при этом континуальный набор исходных переменных $u(t,x), u^*(t,x)$ расщепляется: дополнительно к континуальному набору канонических переменных (5.6) появляется дискретный набор канонических переменных (5.8). Каждый тип переменных описывает свой класс решений: переменные типа (5.8) соответсвуют солитонным решениям, переменные типа (5.6) - решениям несолитонного сектора. Вся нелинейная система разделяется на две независимые подсистемы: систему солитонов с дискретным набором канонических переменных и систему с континуальным набором переменных (будем называть её системой основных возбуждений). Каждая из подсистем дает свой отдельный вклад в гамильтониан и в другие интегралы движения. Переходы между подсистемами отсутствуют.

Более того, взаимодействие отсутствует и внутри каждой подсистемы. Это очевидное следствие линейности уравнений (5.I2) и выражения (5.II). Таким образом, переменные типа действие-угол описывают взаимодействующие друг с другом "нормальные" моды. Все "квантовые числа" нормальных мод сохраняются по времени и, тем самым, являются интегралами движения. Величины $P_\lambda$ и $P_m$ и есть эти интегралы движения.

Перемены типа действие образуют фундаментальный набор сохраняющихся величин нелинейного уравнения. Явные интегралы движения $C_n$ суть производные от них: они пропорциональны моментам величины $P_\lambda$ и степеням $P_m$ . Отметим, что вклад несолитонной части в интегралы движения $C_n$ для нелинейных уравнений имеет в " $\lambda$ -представлении" в такой же вид, что и выражения для интегралов движения линейных уравнений в импульсном представлении (см.(2.6)).

Поскольку $(P_\lambda, Q_\lambda), (P_m, Q_m)$ образуют полный набор переменных, то величины $P_\lambda$ и $P_m$ составляют полный набор "коммутирующих " интегралов движения $(\{P, P'\}=0)$ .
В силу (5.I0) совокупность явных интегралов $C_n$ также является полной и $\{C_n, C_{n'}\}=0$.

Полные наборы "коммутирующих" интегралов движения играют важную роль с точки зрения интегрируемости. Для гамильтониановых систем с конечным числом $(n)$ степеней свободы набор $n$ независимых "коммутирующих" интегралов движения является полным и его существования достаточно для полной интегрируемости (теорема Лиувилля) /I0,II/. В случае бесконечного числа степеней свободы ситуация значительно сложнее: не всякая бесконечная совокупность независимых "коммутирующих" интегралов движения приводит к полной интегрируемости. (см.пример в XII разделе). Общий критерий полноты бесконечного набора интегралов движения и бесконечномерный аналог теоремы Лиувилля в настоящее время отсутствуют.

Такой критерий можно, по-видимому, сформулировать для одного достаточно широкого класса интегралов движения - интегралов движения, являющихся деформациями свободных. Действительно, пусть для конкретного нелинейного дифференциального уравнения известен бесконечный набор интегралов движения $C_n (n=1,2,\dots)$ , имеющих вид

$$C_n = C_n^0 + (\cdots) \qquad (5.I5)$$

где $C_n^0$ -интегралы движения соответствующего линейного уравнения. Интуитивно ясно, что при достаточно гладкой деформации набор интегралов $\{C_n\}$ нелинейного уравнения будет полным, если полным является набор интегралов $\{C_n^0\}$ его линейной части. Для линейного уравнения полный набор $\{C_n^0\}$ построить сравнительно легко, его образует максимальный бесконечный набор "коммутирующих" интегралов движения $\{\tilde{C}_n^0\}$ . (см.следующий раздел). Сравнивая, тем самым, наборы $\{C_n^0\}$ и $\{\tilde{C}_n^0\}$ мы выясняем полноту системы интегралов $\{C_n\}$ : если система интегралов $\{C_n^0\}$ эквивалентна полной системе $\{\tilde{C}_n^0\}$ , то набор $\{C_n\}$ является полным, если же среди интегралов $\tilde{C}_n^0$ есть такие, которые не присутствуют в наборе $\{C_n^0\}$ , то сис-

мутирующих " интегралов движения $(\{P, P'\} = 0)$ .
В силу (5.10) совокупность явных интегралов $C_n$ также является полной и $\{C_n , C_{n'}\} = 0$.

Полные наборы "коммутирующих" интегралов движения играют важную роль с точки зрения интегрируемости. Для гамильтониановых систем с конечным числом $(n)$ степеней свободы набор $n$ независимых "коммутирующих" интегралов движения является полным и его существования достаточно для полной интегрируемости (теорема Лиувилля) /10,11/. В случае бесконечного числа степеней свободы ситуация значительно сложнее: не всякая бесконечная совокупность независимых "коммутирующих" интегралов движения приводит к полной интегрируемости. (см.пример в XII разделе). Общий критерий полноты бесконечного набора интегралов движения и бесконечномерный аналог теоремы Лиувилля в настоящее время отсутствуют.

Такой критерий можно, по-видимому, сформулировать для одного достаточно широкого класса интегралов движения - интегралов движения, являющихся деформациями свободных. Действительно, пусть для конкретного нелинейного дифференциального уравнения известен бесконечный набор интегралов движения $C_n (n=1,2,\ldots)$ , имеющих вид

$$C_n = C_n^0 + (\cdots) \qquad (5.15)$$

где $C_n^0$ -интегралы движения соответствующего линейного уравнения. Интуитивно ясно, что при достаточно гладкой деформации набор интегралов $\{C_n\}$ нелинейного уравнения будет полным, если полным является набор интегралов $\{C_n^0\}$ его линейной части. Для линейного уравнения полный набор $\{C_n^0\}$ построить сравнительно легко, его образует максимальный бесконечный набор "коммутирующих" интегралов движения $\{\tilde{C}_n^0\}$ . (см.следующий раздел). Сравнивая, тем самым, наборы $\{C_n^0\}$ и $\{\tilde{C}_n^0\}$ мы выясняем полноту системы интегралов $\{C_n\}$ : если система интегралов $\{C_n^0\}$ эквивалентна полной системе $\{\tilde{C}_n^0\}$ , то набор $\{C_n\}$ является полным, если же среди интегралов $\tilde{C}_n^0$ есть такие, которые не присутствуют в наборе $\{C_n^0\}$ , то сис-



тема интегралов движения $\{C_n\}$ неполна. Рассматривать при этом необходимо, конечно, только совокупности независимых интегралов.

Отметим, что уравнения, интегрируемые МОЗР, обладают полными наборами интегралов движения типа (5.15).

3. Полная интегрируемость нелинейной системы указывает на очень специальное устройство взаимодействия в ней. Для такой системы можно ввести переменные, в которых происходит расщепление её на независимые друг от друга нормальные моды, описываемые линейными уравнениями. В терминах этих переменных (переменных типа действие-угол) взаимодействие, конечно, отсутствует. Однако это не означает, что взаимодействие обязательно отсутствует и в терминах исходных переменных. Ответ, как мы увидим, зависит от структуры полного набора интегралов движения нелинейной системы.

Для анализа взаимодействия (рассмотрим для конкретности процессы рассеяния) необходимо как-то описывать $in\ (t \to -\infty)$ и $out\ (t \to \infty)$ -состояния. Общепринятый способ состоит в задании собственных значений полного набора обычных интегралов движения типа энергии, импульса, заряда и т.п. для каждой из частиц. Существуют различные полные наборы. Назовем стандартным полный набор, содержащий оператор импульса. Например, для скалярной частицы с массой в пространстве Минковского стандартный набор состоит из компонент импульса и заряда. Для частицы со спином он включает также проекцию спина. Пример нестандартного полного набора для скалярной частицы - энергия, квадрат полного момента, проекция полного момента и заряд. Изменение собственных значений интегралов движения из стандартного набора для отдельных частиц при переходе от $in$ к $out$ к состоянию означает нетривиальность взаимодействия.

В начальном и конечном состояниях поля являются свободными и, как мы знаем, обладают бесконечными наборами "коммутирующих" интегралов движения. Полные наборы обычных интегралов содержатся в этих бесконечных и собственные значения высших интегралов есть степени собственных значений обычных интегралов движения (см.второй раздел). Фиксируя значения всех интегралов движения из бесконечного полного набора мы тем самым фиксируем значения тема интегралов движения $\{C_n\}$ неполна. Рассматривать при этом необходимо, конечно, только совокупности независимых интегралов.

Отметим, что уравнения, интегрируемые МОЗР, обладают полными наборами интегралов движения типа (5.I5).

3. Полная интегрируемость нелинейной системы указывает на очень специальное устройство взаимодействия в ней. Для такой системы можно ввести переменные, в которых происходит расщепление её на независимые друг от друга нормальные моды, описываемые линейными уравнениями. В терминах этих переменных (переменных типа действие-угол) взаимодействие, конечно, отсутствует. Однако это не означает, что взаимодействие обязательно отсутствует и в терминах исходных переменных. Ответ, как мы увидим, зависит от структуры полного набора интегралов движения нелинейной системы.

Для анализа взаимодействия (рассмотрим для конкретности процессы рассеяния) необходимо как-то описывать $in\ (t \to -\infty)$ и $out\ (t \to \infty)$ -состояния. Общепринятый способ состоит в задании собственных значений полного набора обычных интегралов движения типа энергии, импульса, заряда и т.п. для каждой из частиц. Существуют различные полные наборы. Назовем стандартным полный набор, содержащий оператор импульса. Например, для скалярной частицы с массой в пространстве Минковского стандартный набор состоит из компонент импульса и заряда. Для частицы со спином он включает также проекцию спина. Пример нестандартного полного набора для скалярной частицы - энергия, квадрат полного момента, проекция полного момента и заряд. Изменение собственных значений интегралов движения из стандартного набора для отдельных частиц при переходе от $in$ к $out$ к состоянию означает нетривиальность взаимодействия.

В начальном и конечном состояниях поля являются свободными и, как мы знаем, обладают бесконечными наборами "коммутирующих" интегралов движения. Полные наборы обычных интегралов содержатся в этих бесконечных и собственные значения высших интегралов есть степени собственных значений обычных интегралов движения (см.вторрй раздел). Фиксируя значения всех интегралов движения из бесконечного полного набора мы тем самым фиксируем значения



обычных интегралов для каждой частицы. Будем называть бесконечный полный набор, содержащий стандартный полный набор интегралов, большим стандартным набором.

Предположим, что вполне интегрируемое нелинейное уравнение обладает бесконечным полным набором интегралов движения типа (5.I5).

Тогда, поскольку при $t \to \pm\infty$ $C_n \to C_n^0$ имеем

$$C_{n(in)} = C_n = C_{n(out)} \qquad (n=1,2,\dots) \tag{5.I6}$$

Из равенства (5.I6), с учетом того, что $\{C_{n\binom{in}{out}}\} = \{C_n^0\}$ вытекает сохранение для каждой частицы собственных значений обычных интегралов движения из полного набора.

Таким образом, если $\{C_n, n=1,2,\dots\}$ (вместе с $\{C_n^0\}$)- большой стандартный набор, то при рассеянии импульс, энергия, заряд и т.п. каждой частицы не меняются (возможны только перестановки частиц) - взаимодействие является тривиальным. В противоположном случае, хотя нелинейная система полностью интегрируема и сохраняется полный набор "квантовых чисел", тем не менее динамика её вполне нетривиальна.

Проиллюстрируем это на простых примерах систем с тремя степенями свободы. Первый пример: три частицы на прямой с парным взаимодействием $V(x_i - x_j) = (x_i - x_j)^{-2}$ Гамильтониан Н равен

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \frac{1}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{(x_1-x_3)^2} + \frac{1}{(x_2-x_3)^2} \tag{5.I7}$$

Второй, хорошо известный пример: частица в трехмерном сферически-симметричном потенциале (например, $r^{-2}$ )

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{5.I8}$$

Обе эти системы являются вполне интегрируемыми. Соответствующие полные наборы интегралов движения имеют вид: для системы (5.17) /70/

$$C_1 = C_1^{(0)} = \sum_{i=1}^{3} p_i = P$$

$$C_2 = C_2^{(0)}(P) - \sum_{1\le i\le j\le 3} V(x_i - x_j) = \frac{1}{2}P^2 - \mathcal{H} \qquad (5.19)$$

$$C_3 = C_3^{(0)}(P) - \sum_{\substack{1\le i\le n \\ j<k,\ j\ne i\ne k}} p_i V(x_j - x_k)$$

где

$$C_m^{(0)}(P) = \sum p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3}$$

-интегралы движения свободной системы. Заметим, что $C_3$ -высший интеграл движения.

В случае (5.18):

$$C_1 = \mathcal{H}, \quad C_2 = M_i M_i, \quad C_3 = M_3, \qquad (5.20)$$

где $M_i = \varepsilon_{ik\ell} x_k p_\ell$ -момент импульса. $(i,k,\ell = 1,2,3)$
Интегралы движения (5.19) образуют стандартный полный набор и в результате импульсы частиц не меняются, а $S$ -матрицы факторизуется (подробный анализ см. в /70/).
Набор интегралов (5.20) является нестандартным и хотя энергия, момент импульса и его проекция сохраняются, начальное и конечное значения импульса частицы не совпадают - взаимодействие явно не тривиально. Полная же интегрируемость задачи (результат сферической симметрии) отражается в существовании разложения по парциальным волнам: для каждой парциальной волны происходит только изменение фазы.



Итак, существование лишь стандартного полного набора интегралов движения приводит к фактическому отсутствию взаимодействия.

Для нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗР, характерны именно стандартные бесконечные наборы типа (3.2), (4.8). По этой причине динамика таких уравнений, как правило, тривиальна. Детальный анализ многосолитонных решений в случае интегрирующего оператора $\mathcal{X}$ размерности 2x2, в частности, для уравнений КдВ /34/, НУШ /16/, синус-Гордона /20/, массивной модели Тирринга /31/, подтверждает это. Солитоны между собой не взаимодействуют - происходит лишь сдвиг центров солитонов или сдвиг фазы.

## VI. Интегрируемые системы с нетривиальными процессами

1.Значительно более интересными свойствами обладают нелинейные системы, интегрируемые с помощью операторов $\mathcal{X}$ размерности 3x3 и выше. Для таких уравнений возникает новое явление для точек общего положения они являются полностью интегрируемыми, однако при специальных соотношениях между интегралами движения существуют специфические процессы рассеяния и распада.

Подробно исследовано несколько интегрируемых моделей с нетривиальной динамикой: модель трех волн /24/, неабелево обобщение уравнения синус-Гордона /33,42/, главные киральные поля /37/. Рассмотрим в качестве примера модель трех волн. Уравнения движения модели имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = iq u_2 u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = iq u_1 u_3^*, \qquad (6.1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = iq u_1 u_2^* .$$

Гамильтониан системы (6.1) равен

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ i \sum_{k=1}^{3} v_k u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x} + q\,(u_1^* u_2 u_3 + \text{э.с.}) \right] \qquad (6.2)$$

а скобка Пуассона есть

$$\{\alpha,\beta\} = i\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u_k}\frac{\delta\beta}{\delta u_k^*} - \frac{\delta\alpha}{\delta u_k^*}\frac{\delta\beta}{\delta u_k}\right) \qquad (6.3)$$

Уравнение (6.I) интегрируется с помощью операторов /24/

$$X = iA\frac{\partial}{\partial x} + [A, Q] - \lambda \qquad (6.4)$$

$$T = \frac{\partial}{\partial t} - B\frac{\partial}{\partial x} + i[B, Q] \qquad (6.5)$$

где $A$ и $B$ —постоянные диагональные матрицы 3х3 $A_{ik} = a_i\delta_{ik}$, $(a_1 > a_2 > a_3,\ a_i \neq 0)$, $B_{ik} = b_i\delta_{ik}$, а матрица $Q$ имеет вид

$$Q = \varkappa\begin{pmatrix} 0, & (a_1-a_2)^{-\frac{1}{2}}u_2, & (a_1-a_3)^{-\frac{1}{2}}u_1 \\ -(a_1-a_2)^{-\frac{1}{2}}u_2^*, & 0, & (a_2-a_3)^{-\frac{1}{2}}u_3 \\ -(a_1-a_3)^{-\frac{1}{2}}u_1^*, & -(a_2-a_3)^{-\frac{1}{2}}u_3^*, & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.6)$$

Величина $\varkappa$ в (6.6) и скорости $v_1, v_2, v_3$ выражаются через $a_i$, $b_i$.

Стандартным образом определяются полные наборы решений $\psi^\pm$

$$\psi^\pm \to e^{-i\lambda A^{-1}x}, \quad x \to \pm\infty$$

и матрица перехода $S$

$$\psi^+(t,x,\lambda) = \psi^-(t,x,\lambda)\, S(\lambda,t)$$



Матрица $S(\lambda,t)$ унимодулярна $\det S = 1$ и $A$-унитарна

$$S^{-1}(\lambda,t) = A^{-1}S^+(\lambda,t)A$$

Используя уравнение (6.5) можно показать, что

$$S_{ik}(\lambda,t) = S_{ik}(\lambda,0)\exp\left\{i\left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_i}{a_i}\right)\lambda t\right\} \qquad (6.7)$$

так что, диагональные элементы матрицы $S$ постоянны во времени

$$S_{ii}(\lambda,t) = S_{ii}(\lambda,0) \quad (i=1,2,3) \qquad (6.8)$$

Аналитические свойства элементов матрицы $S(\lambda,t)$ зависят от соотношения между $a_1$, $a_2$ и $a_3$. При $a_3 > 0$ диагональные элементы $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}^*(\lambda^*)$ аналитичны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Если $a_3 < 0$, $a_2 > 0$ в верхней полуплоскости аналитичны $S_{22}^*(\lambda^*)$, $S_{33}(\lambda)$. Рассмотрим первый случай. По обычной схеме МОЗР (с некоторыми усовершенствованиями) удается найти широкий класс решений солитонного типа /24/- решений, связанных с нулями $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}^*(\lambda^*)$. В зависимости от соотношения между нулями $S_{11}$ и $S_{33}$ возможны различные типы процессов. Для "точек" общего положения, т.е. когда нули $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}^*(\lambda^*)$ не совпадают, многосолитонные решения описывают расеяния солитонов 2 и 3 (соответствующих переменным $u_2$ и $u_3$) друг на друге. При этом импульс и энергия каждого солитона не меняется — взаимодействие между ними отсутствует. В этом секторе (содержащем "почти" все решения) ситуация полностью аналогична той, что наблюдается для уравнений с интегрирующим оператором $X$ размерности 2х2 - динамика тривиальна.

Существенное отличие возникает, если нули $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}^*(\lambda^*)$ совпадают. В этом случае в зависимости от значений $S_{ik}$ при $i \neq k$ возможны различные решения /24/. При $S_{12} = \tilde{S}_{32} = 0$, $S_{12} \neq 0$ имеем солитон I - решение вида $f(x - v_1 t)$. Если же $\tilde{S}_{32} \neq 0, S_{12} = 0$ то получающееся решение описывает распад солитона I на солитоны 2 и 3. При $S_{12} \neq 0$, $\tilde{S}_{32} = 0$ имеем процесс слияния солитонов 2 и 3 в солитон 1. Если совпадает несколько нулей возможны комбинированные процессы. Таким образом, в этом секторе рассматриваемой модели имеются нетривиальные процессы взаимодействия.

2. В силу (6.8) уравнения (6.1) обладают бесконечным набором интегралов движения. Явные интегралы

$$I_j^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \chi_j^{(n)}(x) \quad \begin{pmatrix} j=1,2,3 \\ n=1,2,\ldots \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

возникают в разложениях $\ln S_{ii}^{-1}$ в ряд по $\lambda^{-1}$. Плотности $\chi_j^{(n)}(x)$, как обычно, вычисляются из рекуррентных соотношений, которые в нашем случае имеют вид /24/:

$$\chi_j^{(n)} = -i \sum_k \left(1 - \frac{a_k}{a_j}\right) Q_{jk} A_{kj}^{(n)}, \tag{6.10}$$

где

$$(a_j - a_i) A_{ij}^{(n+1)} = i a_i a_j \frac{\partial A_{ij}^{(n)}}{\partial x} - a_i \sum_k \sum_{n_1+n_2=n} Q_{jk} A_{ij}^{(n_1)} A_{kj}^{(n_2)}$$

$$+ \sum_{k\neq j} a_j (a_i - a_k)\, Q_{jk} A_{kj}^{(n)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$A_{ij}^{(1)} = -a_j Q_{ij}(x).$$

Таким образом, $\chi_j^{(n)}$ представляют собой полиномы по $Q_{ij}$ и их производным. Не все интегралы движения $I_j^{(n)}$ независимы, т.к. из унимодулярности $S$ следует

$$\sum_{j=1}^{3} I_j^{(n)} = 0, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Величины $I_j^{(1)}$ и $I_j^{(2)}$ – это обычные интегралы движения. Через эти интегралы выражаются гамильтониан H и импульс P системы уравнений (6.1), а также два сохраняющихся заряда



$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(2|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2\right),$$

$$\tilde{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(|u_2|^2 - |u_3|^2\right),$$

связанных с инвариантностью уравнений (6.1) относительно преобразований ( $\alpha, \beta$ –параметры)

$$u_1 \to u_1' = e^{2i\alpha} u_1,\; u_2 \to u_2' = e^{i\alpha} u_2,\; u_3 \to u_3' = e^{i\alpha} u_3$$

и

$$u_1 \to u_1' = u_1,\quad u_2 \to u_2' = e^{i\beta} u_2,\quad u_3 \to u_3' = e^{-i\beta} u_3.$$

Нетрудно убедиться, что

$$Q = \frac{1}{i\varkappa^2}\left(I_1^{(1)} - I_3^{(1)}\right),\; \tilde{Q} = \frac{1}{i\varkappa^2}\left(I_1^{(1)} + I_3^{(1)}\right),$$

$$H = \frac{v_2}{i\varkappa^2}\, \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}\, I_1^{(2)} + \frac{v_3}{i\varkappa^2}\, \frac{a_3 - a_2}{a_3 a_2}\, I_3^{(2)}.$$

Интегралы движения $I_j^{(3)}$ и $I_j^{(n)}$ ( $n > 3$) являются высшими и непосредственно физического смысла не имеют. Собственные значения этих интегралов выражаются через собственные значения $H, P, Q, \tilde{Q}$.

Полную интегрируемость рассматриваемой модели естественно ожидать в секторе общего положения. В работе /28/ были построены переменные типа действие-угол и найдена связь этих переменных с интегралами движения (6.9).

Таким образом, модель трех волн обладает разными типами решений. В одном секторе она вполне интегрируема, в другом имеются нетривиальные процессы взаимодействия.

Аналогичное поведение наблюдается и для других нелинейных уравнений, интегрируемых оператором $X$ размерности 3x3 /33, 37, 42 /.

Разделы седьмой – двенадцатый обзора (вторая часть) будут опубликованы в виде отдельного препринта.



Литература

1. Perring J.K., Skyrme T.H.R., Nucl. Phys., (1962), v. 31, p. 550.

2. Zabusky N.J., Kruskal M.D., Phys. Rev. Lett., (1965), v. 15, p. 240.

Работы обзорного и общего характера

3. Scott A.C., Chu F.Y.E., McLaughlin D.W., Proc. I.E.E.E., (1973), v. 61, p. 1449.

4. Захаров В.Е. "Метод обратной задачи рассеяния", гл. в книге И.А.Кунина "Теория упругих сред с микроструктурой", 1975 г., Наука.

5. Flaschka H., Newell A., Lecture Notes in Physics, (1975), v. 38, p. 355.

6. Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and their Applications, Ed. R.M.Miura, Lecture Notes in Mathematics (1976), v. 515.

7. Фаддеев Л.Д., Метод обратной задачи рассеяния для решения эволюционных уравнений математической физики, материалы УШ Дальневосточной математической школы, препринт ХабКНИИ, № 01-77, (1977).

8. Zakharov V.E., The Method of Inverse Scattering problem, in "Solitons" Ed. R. Bullough, Springer-Verlag (1978).

9. Faddeev, L.D., in "Solitons" Ed. R.Bullough, Springer-Verlag (1978).

10. Арнольд В.И.; Математические методы классической механики, 1974, Наука.

11. Голдстейн Г., Классическая механика, 1975, Наука.

12. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, 1973, Наука.

## Метод обратной задачи рассеяния


I3. Gardner C.S., Green G.M., Kruskal M., Miura R.M., Phys. Rev. Lett. (1967), v. 19, p. 1095.

I4. Lax P.D., Comm. Pure Appl. Math. (1968), v. 21, p. 467.

I5. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д., Функциональный анализ (I97I), т.5, вып.4, стр.I8.

I6. Захаров В.Е., Шабат А.Б., ЖЭТФ (I97I), т.6I, стр.II8, (I973), т.64, стр.I627.

I7. Манаков С.В., ЖЭТФ (I973), т.65, стр.505.

I8. Ablowitz M.S., Kaup D.S., Newell A.C., Segur H., Phys. Rev. Lett., (1973), v. 30, p. 1262.

I9. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д., ДАН СССР (I974) т.2I9, р.I334.

20. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д., ТМФ (I974), т.2I, стр.I60.

2I. Ablowitz M.S., Kaup D.S., Newell A.C., Segur H., Stud. Appl. Math. (1974), v. 53, p. 249.

22. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Функциональный анализ (I974), т.8, вып.3, стр.43.

23. Захаров В.Е., Манаков С.В., ТМФ (I974), т.I9, стр.332.

24. Захаров В.Е., Манаков С.В., ЖЭТФ (I975) т.69, стр.I654.

25. McLaughlin D.W., J. Math. Phys. (1975), v. 16, p. 96.

26. Ablowitz M.S., Haberman K., Phys. Rev. Lett. (1975) v. 35 p. 1185; J. Math. Phys. (1975), v. 11, p. 2301.

27. Pohlmeyer K., Comm. Math. Phys. (1976) v. 46, p. 207.

28. Манаков С.В., ТМФ (I976), т.28, стр.I72.

29. Calogero F., Degasperis A., Nuovo Cimento (1976), v. 32B, p. 201; (1977), v. 39B, p. 1.

30. Михайлов А.В., Письма в ЖЭТФ (I976), т.23, стр.356.

3I. Кузнецов Е.В., Михайлов А.В., ТМФ (I977) т.30, стр.303.





32. Lund F., Phys. Rev. Lett. (1977), v. 38, p. 1175.

33. Будагов А.С., Тахтаджян Л.А., ДАН СССР (I977), т.235, стр.805.

34. Белавин А.А., Захаров В.Е., Письма в ЖЭТФ (I977), т.23, 603.

35. Newell A.C., Redekopp L.G., Phys. Rev Lett. (1977), v. 38, p. 377.

36. Кулиш П.П., ТМФ (I977), т.33, стр.272.

37. Захаров В.Е., Михайлов А.В., Письма в ЖЭТФ (I978), т.27, стр.47, ЖЭТФ (I978), т.74, стр.I953.

38. Girardello L., Sciuto S., Phys. Lett. (1978), v. 77B, p.267.

39. Михайлов А.В., Письма в ЖЭТФ (I978), т.28, стр.554.

40. Izergin A.G., Kulish P.P., Lett. Math. Phys. (1978), v. 2, p. 297.

4I. Chaichian M., Kulish P.P., Phys. Lett. (1978), v. 78B, p. 413.

42. Будагов А.С., Записки научных семинаров ЛОМИ (I978), т.77, стр.24.

43. Белинский В.А., Захаров В.Е., ЖЭТФ (I978), т.75, стр.I953.

44. Lund F., Ann. Phys., (N.Y.) (1978), v. 115, p. 251.


## Высшие законы сохранения для свободных полей


45. Lipkin D.M., J.Math. Phys. (1964), v. 5, p. 696.

46. Morgan T.A., J. Math. Phys. (1964), v. 5, p. 1659.

47. Kibble T.W.D., J. Math. Phys. (1965), v. 6, p. 1022.

48. Pairlie D.B., Nuovo Cim., (1965), v. 37, p. 897.

49. Candlin D.J., Nuovo Cim., (1965), v. 37, p. 1390.

50. Morgan T.A., Joseph D.W., Nuovo Cim., (1965), v. 39, p.494.

5I. O'Connell R.F., Tompkins D.R., J. Math. Phys. (1965), v. 6, (1952); Nuovo Cim. (1965), v. 38, p. 1088; Nuovo Cim., (1965), v. 39, p. 391.

52. Steudel H., Nuovo Cim., (1965), v. 39, p. 395, Z. Naturforsch. (1965), v. 21a, p. 1826.

53. Fradkin D.M., J. Math. Phys., (1965), v. 6, p. 879.

54. Dass T., Phys. Rev. (1966), v. 1011; (1966), v. 150, p. 1251.

55. Lurie D., Takahashi Y., J. Math. Phys. (1966), v. 7, p. 1478.

56. Конопельченко Б.Г., Препринт ИЯФ СО АН СССР, 76-I2 (I976).

Высшие законы сохранения нелинейных уравнений

57. Kruskal M.D., Zabusky N.J., - Zabusky N.J., in Proc. of the Symp. on Nonlinear Partial Differential Equations, Ed. W.Ames, Academic Press, 1967, p. 223.

58. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D., J. Math. Phys., (1968), v. 9, p. 1204.

59. Kruskal M.D., Miura R.M., Gardner C.S., J. Math. Phys., (1970), v. II, p. 952.

60. Lamb.G.L., Jr. Phys. Lett. (1970), v. 32A, p. 251.

6I. Kruskal M.D., Wiley D., in American Mathematical Society Summer Seminar on Nonlinear Wave Motion, Ed. Newell A.C., New York, 1972.

62. Benney D.J., Stud. Appl. Math., (1973), v. 52, p. 45.

63. Miura R.M., Stud. Appl. Math. (1974), v. 53, p. 45.

64. Miura R.M., in Nonlinear Waves, Eds. S.Leibovich and A.R.Seebass, Cornell University Press (1974). Русский перевод в сборнике Нелинейные волны, "Мир", (I977), стр.22I.



65. Lax P.D., in Nonlinear Waves, Eds. S. Leibovich and A.R. Seebass, Cornell University Press (1974); Русский перевод в сб. Нелинейные волны, "Мир" (I977), стр.297.

66. Watanabe Y., J. Math. Phys., (1974), v. 15, p. 453.

67. Sanuki H., Konno K., Phys. Lett. (1974), v. 48A, p. 221.

68. Watanabe Y., Prog. Theor. Phys. (1974), v. 51, p. 1973.

69. Кулиш П.П., препринт ИФВЭ, стр.74-I55 (I974).

70. Кулиш П.П., ТМФ (I976), т.26, стр.I98.

7I. Yoon B., Phys. Rev. (1976), v. D13, p. 3440.

72. Dodd R.K. Bullough R.K., Proc. Roy. Soc. (London) (1977), v. 352A, p. 481.

73. Купершмидт Б.А., Манин Ю.И., Функциональный анализ (I977), т.II, вып.3, стр.3I.

74. Haberman R., J. Math. Phys. (1977), v. 18, p. 1137.

75. Ferrara S., Girardello L., Sciuto S., Phys. Lett. (1978) v. 76B, p. 303.

76. Червяков А.М., Сообщение ОИЯИ, Р2-II657 (I978).

77. McGuinness M.J., J. Math. Phys. (1978), v. 19, p. 2285.

78. Lüscher M., Pohlmeyer K., Nucl. Phys., (1978), v. B137, p. 46.

79. Calogero F., Degasperis A., Comm. Math. Phys. (1978), v. 63, p. 155.

80. Чередник И.В., ТМФ (I979), т.38, стр.I79; т.41, стр.236