

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ 1

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ
ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 80-03



Новосибирск

1. ВВЕДЕНИЕ

Заряженная частица, влетающая в кристалл под малым углом к кристаллическим осям (плоскостям), может испытывать своеобразный режим движения, называемый осевым (плоскостным) каналированием. Это явление широко обсуждается в последние годы (см. обзоры ^(1,2)). Роль каналов играют потенциальные ямы, создаваемые соответственно цепочками атомов или кристаллическими плоскостями. Для наших целей достаточно ограничиться приближением так называемой непрерывной модели, когда потенциал дискретных центров (напр, цепочки атомов) заменяется на потенциал соответствующего непрерывного распределения заряда.

Мы будем рассматривать релятивистские электроны и позитроны с $\gamma \gg 1$ ($\gamma = \epsilon/mc^2$, ϵ — энергия частицы, m — её масса). Пусть ϵ_{\perp} — энергия поперечного движения частицы, U_0 — глубина потенциальной ямы, d — характерный размер (для плоскостного каналирования это расстояние между соседними плоскостями). Тогда для одномерного движения квазиклассическая оценка числа дискретных уровней в яме дает $N \sim d\sqrt{\epsilon U_0}/\hbar c$ (если $\epsilon_{\perp} \ll \epsilon$, то роль массы при описании поперечного движения играет ϵ/c^2). Для релятивистских частиц число N велико.

$$N \sim \frac{d}{\lambda_c} \sqrt{\frac{\epsilon U_0}{m^2 c^4}} \approx \sqrt{\gamma} \gg 1 \quad (11)$$

где $\lambda_c = \hbar/mc$ — комptonовская длина волны электрона; учтено, что $U_0 \sim (10-90)$ эВ, $d \sim (1-3)$ Å.

Для тонких кристаллов (в которых процессы деканалирования несущественны), число частиц, находящихся в заданном интервале значений ϵ_{\perp} , непосредственно определяется видом потенциала и начальными условиями при влете в кристалл. При классическом описании это распределение находится из соотношения ^{*}

^{*}) Вопрос о соответствии классического и квантового описания распределения по поперечной энергии при влете частиц в кристалл подробно обсуждается в Приложении А.

$$\epsilon_{\perp} = U(x_0) + \epsilon_0, \quad \epsilon_0 = \epsilon \vartheta^2 / 2 \quad (1.2)$$

где x_0 — точка влета, ϑ — угол влета (между импульсом частицы и плоскостями, которые образуют канал), $U(x)$ — межплоскостной потенциал. Пусть n_0 номер уровня такой, что $N \gg n_0 \gg 1$, тогда даже при $\epsilon_0 = 0$ доля частиц попавших на низшие уровни $\sim (n_0/N)^{\nu} \ll 1$, где ν зависит от формы потенциала (для осциллятора $\nu = 1/2$). Заметим еще, что для плавных потенциалов, которые вблизи дна ямы аппроксимируются параболой, интенсивность излучения на низших уровнях $\sim n$. Это обстоятельство еще в большей степени позволяет нам пренебречь вкладом низших уровней в излучение. Таким образом, при $\epsilon \approx 100$ МэВ для описания движения частиц в канале, а также движущихся над барьером в периодическом поле, образованном совокупностью потенциалов $U(x)$, можно пользоваться классической теорией. *) Ниже мы будем использовать термины "частицы в канале" и "надбарьерные частицы".

Движение при плоскостном каналировании является квазипериодическим (периодическим в системе, движущейся со средней скоростью частицы) и необходимо сопровождается электромагнитным излучением. Характеристики этого излучения существенно зависят от соотношения между углом отклонения частицы при колебаниях в канале и углом $1/\gamma$, в котором сосредоточено излучение релятивистской частицы. Если $\psi \gamma \ll 1$, то справедливо дипольное приближение и излучается одна или несколько низших гармоник. В противоположном случае $\psi \gamma \gg 1$ излучение носит магнитотормозной характер. В кристалле $\psi \approx \vartheta_c = \sqrt{2u_0/\epsilon}$, так что условие дипольного характера излучения имеет вид:

$$\rho_0 \ll 1, \quad \rho_0 = 2u_0 \epsilon / m^2 c^4 \quad (1.3)$$

*) Фактически эффективная ширина канала (и соответственно число уровней N) для электронов заметно меньше чем для позитронов. Это означает, что классическое описание излучения для позитронов применимо начиная с более низких энергий.

Дипольное излучение при квазипериодическом движении, включая его спектральные и поляризационные свойства, подробно изучено в работе авторов [3]. Таким образом, при выполнении условия (1.3), которое справедливо для значений $\gamma \lesssim 10^4$, можно пользоваться результатами работы [3] учитывая, однако, что для рассматриваемой задачи они носят промежуточный характер. Дело в том, что при заданном значении ϵ_{\perp} период поперечного движения T также оказывается фиксированным и мы имеем полную аналогию с ондулятором. Но сама величина ϵ_{\perp} согласно (1.2) зависит от x_0, ϑ . Если угол ϑ , по крайней мере в принципе, может быть задан с любой точностью, то значение x_0 принципиально не может быть фиксировано. Тем самым мы не можем приготовить состояние с заданным ϵ_{\perp} , т.е. пучок частиц при каналировании всегда излучает как набор ондуляторов с разными периодами T . Поэтому необходимо провести усреднение по этому набору, т.е. по траекториям с различными $\epsilon_{\perp}(x_0)$. Кроме того, если угловая ширина пучка электронов $\Delta \vartheta \gtrsim \vartheta_{\max}$, то необходимо также провести усреднение по углу ϑ с соответствующей функцией распределения.

В случае дипольного излучения $\rho_0 \ll 1$, характерная частота излученных фотонов есть

$$\hbar \omega_c \approx 2 \gamma^2 \hbar \omega_0 \approx 2 \pi \epsilon \chi_c \sqrt{\rho_0} / d \quad (1.4)$$

здесь ω_0 — характерная частота движения частицы в канале.

Поскольку $\chi_c \ll d$, то при выполнении условия (1.3) с большим запасом $\hbar \omega_c \ll \epsilon$, так что в этой области энергий можно использовать классическую теорию излучения.

В противоположном случае $\psi \gamma \gg 1$ излучение в основном формируется на небольшом участке траектории за времена $\tau \sim c/v \gamma \sim d m c / u_0$, так что $\tau/T \sim 1/\sqrt{\rho_0} \ll 1$ (T — период поперечного движения, $T \sim d \sqrt{\epsilon} / \sqrt{2u_0} c$). При этом условии излучение аналогично магнитотормозному (см. напр, [4]). Характерные частоты излучения есть

$$\hbar \omega_c \sim \gamma^2 \hbar / \tau \sim \epsilon \chi_c \rho_0 / d \quad (1.5)$$

Из оценки (1.5) следует, что квантовые эффекты при плоскостном каналировании становятся существенными начиная с энергий $\varepsilon \gtrsim 10 \text{ ТэВ}$.

Как уже отмечалось, характеристики излучения в большой степени зависят от функции распределения частиц по поперечной энергии $f(\varepsilon_{\perp})$. В тонких кристаллах эта функция полностью определяется условиями влета частиц в кристалл. В толстых кристаллах ряд процессов приводит к изменению распределения $f(\varepsilon_{\perp})$. Главными из них являются многократное рассеяние и радиационные потери энергии частиц. Если излучение в той или иной степени приводит к уменьшению поперечной энергии частицы, то многократное рассеяние в среднем увеличивает ее, что может привести к выходу частиц из канала (деканалированию). Введем критическую длину деканалирования l_d за счет многократного рассеяния, определяемую из условия, что среднеквадратичный угол рассеяния становится равным критическому углу каналирования ϑ_c (углу Линхарда).

$$l_d \approx \alpha \rho_0 L_{\text{rad}} / 2\pi \quad (1.6)$$

где $\alpha = 1/137$, L_{rad} — радиационная длина в аморфной среде. Следует иметь в виду, что для позитронов в канале многократное рассеяние оказывается подавленным, что приводит для них к увеличению длины деканалирования в несколько раз по сравнению с l_d (1.6). Радиационные потери энергии при прохождении частиц через кристалл определяется в основном двумя процессами. Первый из них — тормозное излучение при столкновении с отдельными ядрами и электронами. В условиях каналирования этот процесс модифицируется по сравнению с аморфной средой. Второй процесс — собственно излучение при каналировании.

При энергии, когда справедливо дипольное приближение $\rho_0 \ll 1$, критическая длина деканалирования l_d существенно меньше характерных радиационных длин, связанных с потерями поперечной энергии, так что в этом случае многократное рассеяние является главным фактором, влияющим на кинетику распределения частиц по поперечной энергии.

При высокой энергии, когда $\rho_0 \gg 1$, возможна ситуация, когда $l_d \sim L_{\text{rad}}$. Существенно, что при таких энергиях уменьшение поперечной энергии связано с потерей полной энергии, а уменьшение последней приводит к увеличению вклада многократного рассеяния в рассматриваемый процесс.

Даже при учете только многократного рассеяния, нахождение функции распределения $f(\varepsilon_{\perp})$ представляет достаточно сложную самостоятельную проблему, если учесть, что коэффициент диффузии в кинетическом уравнении зависит от ε_{\perp} (см., напр., [1]). Вычисление же характеристик излучения, которые можно было бы непосредственно сравнивать с экспериментом, требует знания функции $f(\varepsilon_{\perp})$.

Из сказанного вытекает, что теоретическое описание излучения при каналировании существенно проще для тонких кристаллов, когда длина пробега частиц $L \ll l_d$. Именно эксперимент с использованием тонких кристаллов удобен для количественного сравнения с теорией, не только в связи с относительной простотой теоретического рассмотрения, но и потому, что при этом процесс излучения выделяется в чистом виде, а не на фоне довольно сложной кинетической картины.*) С другой стороны, толщина кристалла L должна быть достаточно большой, чтобы частица могла совершить несколько колебаний в потенциальной яме**)

$$d \sqrt{\varepsilon/u_0} \ll L \ll l_d \quad (1.7)$$

Все результаты глав 3-4 этой работы получены в предположении, что условие (1.7) выполнено.

— Когда толщина кристалла $L \gg l_d$, т.е. когда $\vartheta_s^2 \gg \vartheta_c^2$, большинство частиц движется высоко над барьером, а вклад в полную интенсивность излучения частиц в канале, или движущихся вблизи барьера сравнительно мал.

*.) В области энергий, где применимо дипольное приближение ($\rho_0 \ll 1$), до настоящего времени нет ни одного эксперимента, удовлетворяющего этому условию.

**.) В дипольном случае условие (1.7) становится более жестким.

Тем не менее излучение этой группы частиц может быть выделено за счет коллимации фотонного пучка в достаточно узком интервале углов. Расчет характеристик излучения при этом усложняется не только необходимостью нахождения конкретного вида функции $f(\epsilon_{\perp}, z)$ (z — продольная координата, $0 \leq z \leq L$), но и тем, что нужно учитывать геометрию эксперимента.

2. ВЫБОР ПОТЕНЦИАЛА

Потенциал отдельной плоскости в приближении непрерывного распределения атомов в ней имеет вид

$$U(x) = 2\pi n \int_0^{\infty} V(\sqrt{x^2 + \rho^2}) \rho d\rho \quad (2.1)$$

где x — расстояние от плоскости, n — средняя плотность атомов в плоскости, $V(z)$ — потенциал отдельного атома.

При $z \gg 1$ удовлетворительное описание $V(z)$ дает модель Томаса-Ферми (ТФ). Однако область применимости этого потенциала ограничена боровским радиусом $a_0 = \hbar^2 / me^2$ кроме того, даже в области применимости потенциала

ТФ для него не существует явного аналитического выражения. Поэтому желательно найти такую функцию $V(z)$, которая бы достаточно хорошо аппроксимировала потенциал ТФ в области его применимости и имела правильное поведение на больших расстояниях. Такой функцией является, например, потенциал Мольера, который хорошо описывает многократное рассеяние и тормозное излучение частиц большой энергии в твердых телах. Однако, аналитическое вычисление характеристик излучения частицы, движущейся в потенциале (2.1), где в качестве $V(z)$ берется потенциал Мольера, наталкивается на непреодолимые технические трудности. В силу этого необходимо использовать более простую аппроксимацию $V(z)$.

Существует целый набор потенциалов, предложенных разными авторами (см. /6/ и цитированную там литературу), учитывающий экранирование потенциала ядра. При этом в большинстве случаев характерным размером, играющим роль радиуса экранирования, является расстояние $a_{TF} = 0,885 a_0 z^{-1/3}$, возникающее в модели ТФ.

При получении потенциала, фигурирующего в данной работе, была применена следующая процедура. В формуле (2.1) в качестве $V(z)$ при $z < a_0$ использовался потенциал ТФ (интегрирование проводилось численно), а при $z > a_0$ $V(z)$ выбирался в виде $V(z) = c \exp\{-cz\}$, причем константы

C_1 и C_2 были такими, что в точке "сшивки" $z = a_0$, сам потенциал и его производная были непрерывны. Затем потенциал плоскости, состоящий из таких атомов аппроксимировался экспоненциальной функцией, причем параметры выбирались таким образом, чтобы согласие было наилучшим в интервале расстояний $a_{TФ} < x < a_0$. Именно эта область расстояний играет основную роль в интересующем нас процессе.

Учитывая, что на больших расстояниях потенциал спадает экспоненциально, при определении межплоскостного потенциала достаточно ограничиться вкладом двух ближайших плоскостей. В результате получаем для $u(x)$

$$u(x) = V_0 [\operatorname{ch}(x/a_s) - 1], \quad -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \quad (2.2)$$

где d — расстояние между плоскостями.

Глубина потенциальной ямы определяется выражением

$$u_0 = V_0 (\operatorname{ch} \delta - 1), \quad V_0 = A 4\pi Z e^2 n a_{TФ} e^{-\delta} \quad (2.3)$$

Здесь $\delta = d/2a_s$, A — константа $\approx 1,5$, незначительно меняющаяся с изменением атомного номера Z . В таблице 1 приведены значения δ и u_0 для плоскости (110) в различных кристаллах, для других плоскостей δ и u_0 получают простым пересчетом. Отметим еще следующее обстоятельство. Если зафиксировать величину u_0 и устремить $\delta \rightarrow \infty$ то потенциал будет иметь форму прямоугольной ямы. В противном случае $u_0 = \text{const}$, $\delta \rightarrow 0$ получаем параболический потенциал.

Потенциал (2.2) был получен для статического кристалла, без учета нулевых и температурных колебаний атомов. При наличии колебаний функция распределения атомов в зависимости от расстояния до плоскости имеет вид (см. [6])

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \exp\left\{-\frac{x^2}{2u^2}\right\} \quad (2.4)$$

где величина u зависит от температуры. Значения её при $T = 293^\circ\text{K}$ в разных кристаллах приведены в обзоре [1]. В

В случае ^{*}), когда $u \ll a_s$, используя функцию распределения (2.4) имеем для межплоскостного потенциала следующее выражение:

$$\tilde{u}(x) \approx V_0 (1 + u^2/2a_s^2) \left\{ \operatorname{ch} y - 1 + \frac{e^\delta}{2} [(\delta+y) \cdot (1 - \Phi((\delta+y)a_s/\sqrt{2}u)) + (\delta-y) (1 - \Phi((\delta-y)a_s/\sqrt{2}u))] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{a_s} (\exp\{-\frac{(\delta+y)^2 a_s^2}{2u^2}\} + \exp\{-\frac{(\delta-y)^2 a_s^2}{2u^2}\}) \right\} \quad (2.5)$$

где $y = x/a_s$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, определенный как в [7]. В рассматриваемом случае поправки к статическому потенциалу сколь-нибудь заметны только при $\delta - |y| \leq u/a_s$ и максимальны при $\delta - |y| = 0$. При этом

$$\frac{\tilde{u}(\delta) - u_0}{u_0} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{a_s} (1 - e^{-\delta})^{-2} + \frac{u^2}{2a_s^2} \quad (2.6)$$

Формулу (2.6) можно рассматривать как оценку точности расчета в потенциале (2.2) (статический кристалл) по сравнению с потенциалом (2.5), учитывающим тепловые колебания.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ В ДИПОЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

3.1. Общие формулы. Определим характеристики излучения при заданном значении ϵ_1 (см. (1.2)), т.е. при заданных χ_0 и \vec{v} . На этом этапе расчета непосредственно применимы формулы статьи [3]. Дифференциальная интенсивность излучения ^{***)} (см. [3], фор. (7)) имеет вид

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{2\pi T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4} |(\vec{e}^* \vec{w}_{\tilde{\omega}}^T)(1 - \vec{n} \vec{v}) + (\vec{e}^* \vec{v})(\vec{n} \vec{w}_{\tilde{\omega}}^T)|^2 \delta(\tilde{\omega} T - 2\pi m) \quad (3.1)$$

^{*}) Например, для кремния при $T = 293^\circ\text{K}$, $u/a_s \approx 1/5$.

^{***)} В этом разделе и везде ниже принята система единиц $\hbar = c = 1$, скалярное произведение $\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}$

где $\tilde{\omega} = \omega(1 - \vec{n}\vec{v})$, \vec{n} - направление вылета фотона, ω - частота фотона, T - период движения, \vec{v} - средняя скорость частицы, $\vec{w}_{\tilde{\omega}}^T$ - фурье-компонента ускорения

$$\vec{w}_{\tilde{\omega}}^T = \int_0^T \vec{w}(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt \quad (3.2)$$

Формула (3.1) определяет все характеристики излучения при заданном значении ϵ_{\perp} . Пусть движение происходит в плоскости (x, z) , причем потенциал зависит только от координаты x . Углы вылета фотона определим в сферических координатах с осью, направленной по средней скорости частицы \vec{v} :

$$\vec{n} = \vec{v} \cos \vartheta + \vec{v}_1 \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{v} \times \vec{v}_1 \sin \vartheta \sin \varphi \quad (3.3)$$

где $\vec{v} = \vec{v}/v$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v} = 0$, \vec{v}_1 лежит в плоскости (x, z) . В дипольном приближении можно пренебречь продольной составляющей ускорения:

$$\vec{w}_{\tilde{\omega}}^T \approx \vec{v}_1 \int_0^T w_x(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt \equiv \vec{v}_1 W \quad (3.4)$$

Для описания поляризационных свойств излучения введем орты:

$$\vec{e}_1 = \vec{n} \times \vec{v} / \sin \vartheta, \quad \vec{e}_2 = \vec{n} \times \vec{e}_1 \quad (3.5)$$

Тогда (3.1) можно переписать в виде:

$$dI = dI_{ij} e_i^* e_j \quad (3.6)$$

где

$$dI_{ij} = e^2 \frac{d^3k}{2\pi T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4} \delta(\tilde{\omega}T - 2\pi m) A_i A_j^* \quad (3.7)$$

$$\vec{A} = \vec{w}_{\tilde{\omega}}^T (1 - \vec{n}\vec{v}) + \vec{v} (\vec{n}\vec{w}_{\tilde{\omega}}^T) = W [\vec{v} \sin \vartheta \cos \varphi + \vec{v}_1 (1 - \vec{n}\vec{v})]$$

Из (3.5)-(3.7) находим

$$A_1 \equiv (\vec{A}\vec{e}_1) = W y \sin \varphi / \gamma^2, \quad A_2 \equiv (\vec{A}\vec{e}_2) = W(1-y) \cos \varphi / \gamma^2 \quad (3.8)$$

*) В этом разделе рассматривается излучение частиц, движущихся в канале и не слишком высоко над барьером. В дипольном приближении можно пренебречь разбросом направлений \vec{v} . Излучение частиц, движущихся высоко над барьером и влияние угловых разбросов обсуждается в следующем разделе.

здесь $y = \gamma^2 (1 - \vec{n}\vec{v}) = \gamma^2 \tilde{\omega} / \omega$

Введем обозначение усреднения $\langle \dots \rangle$, включающее в себя $e^2 \frac{d^3k}{2\pi T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^4} \delta(\tilde{\omega}T - 2\pi m)$, интегрирование по χ_0 и возможно по иным параметрам, например углу влета частиц в кристалл. Тогда представим

$$\langle dI_{ij} \rangle = \langle dI \rangle \frac{1}{2} (\delta_{ij} + \xi_n \sigma_{ij}^n) \quad (3.9)$$

где σ^n - матрицы Паули, ξ_n - параметры Стокса. Величина $\langle dI \rangle = \text{Sp} \langle dI_{ij} \rangle$ определяет интенсивность, просуммированную по поляризациям фотона. Сопоставляя (3.9) и (3.7), (3.8) имеем явный вид $\langle dI \rangle$ и параметров Стокса

$$\langle dI \rangle = \langle |W|^2 (y^2 \sin^2 \varphi + (1-y)^2 \cos^2 \varphi) \rangle / \gamma^4$$

$$\xi_1 = \langle |W|^2 y(1-y) \sin 2\varphi \rangle / \gamma^4 \langle dI \rangle, \quad \xi_2 = 0 \quad (3.10)$$

$$\xi_3 = \langle |W|^2 (y^2 \sin^2 \varphi - (1-y)^2 \cos^2 \varphi) \rangle / \gamma^4 \langle dI \rangle$$

Таким образом, излучение, вылетающее под заданным углом, является полностью линейно поляризованным.

После интегрирования по азимутальному углу вылета фотона φ , не затрагивающего аргумент δ - функции, имеем

$$\langle dI \rangle = \langle |W|^2 (1 - 2y + 2y^2) \rangle / \gamma^4$$

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \langle |W|^2 (2y - 1) \rangle / \gamma^4 \langle dI \rangle \quad (3.11)$$

Если провести интегрирование по частоте и усреднить по координате влета частицы χ_0 , то получим

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = (2y - 1) / (1 - 2y + 2y^2) \quad (3.12)$$

Наконец, после интегрирования по углу вылета фотона имеем поляризационные свойства излучения в целом

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 1/2 \quad (3.13)$$

Результат (3.12), (3.13) совпадает с параметрами Стокса в ондуляторе (см. [3], форм. (19), (21)) для случая плоско-

го движения.

Явное выражение для $\langle dI \rangle$ (3.11) запишем так

$$\frac{\langle dI \rangle}{dy d\omega} = \frac{e^2}{2} \gamma^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-2\gamma+2\gamma^2)}{\gamma^4} \left\langle \frac{|W|^2}{T} \delta\left(\frac{\omega\gamma T}{\gamma^2} - 2\pi m\right) \right\rangle \quad (3.14)$$

теперь $\langle \rangle$ означает усреднение по X_0 и т.д. Угловое распределение излучения, получающееся из (3.14) интегрированием по частоте фотона, имеет универсальный вид, такой же, как в ондуляторе (см. [3], форм. (12))

$$\frac{\langle dI \rangle}{dy} = \frac{e^2}{4} \langle \vec{w}^2 \rangle \gamma^4 \frac{(1-2\gamma+2\gamma^2)}{\gamma^5} \quad (3.15)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{T^2} \sum_{m=1}^{\infty} |\vec{w}_{\tilde{\omega}}^T|^2_{\tilde{\omega} = \frac{2\pi m}{T}} = \frac{1}{T^2} \sum_{m=1}^{\infty} |W_m|^2 = \frac{1}{2} \overline{w^2}$$

где черта означает усреднение во времени.

Полная интенсивность излучения следует из (3.15) и дается выражением

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3} e^2 \gamma^4 \langle \vec{w}^2 \rangle \quad (3.16)$$

Спектральное распределение интенсивности получается из (3.14) интегрированием по y . Пределы интегрирования определяются угловыми размерами детектора фотонов, если регистрируются фотоны, вылетевшие в угол $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_m$, то $1 \leq 2\gamma \leq [1 + (\gamma\vartheta_m)^2]$. Тогда для спектрального распределения имеем:

$$\frac{\langle dI \rangle}{d\omega} = e^2 \frac{\omega}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|W_m|^2}{m^2} \left(\zeta_m^2 - \zeta_m + \frac{1}{2} \right) \mathcal{V}(1-\zeta_m) \mathcal{V}(2\zeta_m \gamma_{\max} - 1) \quad (3.17)$$

где $\zeta_m = \omega T / 4\pi\gamma^2 m$, $W_m \equiv W(\tilde{\omega} = 2\pi m/T)$. Если угол колликации достаточно велик $\gamma\vartheta_m \gg 1$, то последнюю \mathcal{V} -функцию в (3.17) можно опустить. Все численные расчеты ниже проведены для этого случая.

Ниже используется связь между фурье-компонентами скорости и ускорения, которую можно получить из (3.4) интегрированием по частям

$$W_m = -i \frac{2\pi m}{T} v_m, \quad v_m = \int_0^T v_x(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt \quad (3.18)$$

Заметим, что для частиц движущихся в канале ^{*} ($\epsilon_1 < u_0$) скорость $v_x^c(t)$ меняет знак в точке поворота. С учетом этого

$$v_m^c = (1 - e^{i\pi m}) \int_0^{T/2} dt v_x(t) e^{i\tilde{\omega}t} \quad (3.19)$$

т.е. для каналирующих частиц в сумме (3.17) остаются только члены с нечетными номерами $m = 2l-1$.

36. Излучение позитронов ^{***)}

Одномерное движение может быть описано в квадратурах в любом потенциале. Для потенциала (2.2) имеем

$$t = \sqrt{\frac{\epsilon}{2V_0}} a_s \int_{-y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{ch y_0 - ch y}} \quad (3.20)$$

где $y = x/a_s$, точка поворота y_0 определяется соотношением $ch y_0 = 1 + 2z sh^2(\delta/2)$, $z = \epsilon_1/u_0$, $\delta = d/2a_s$. Заменой переменных $\sin \psi = \sqrt{\frac{ch y_0 - ch y}{ch y_0 - 1}}$ интеграл (3.20) можно свести к виду:

$$t = \sqrt{\frac{\epsilon}{V_0}} a_s \frac{F(\varphi, k)}{ch(y_0/2)}, \quad F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (3.21)$$

Здесь

$$k^2 = \frac{z sh^2(\delta/2)}{1 + z sh^2(\delta/2)}, \quad \varphi = \begin{cases} \beta, & y \leq 0 \\ \pi - \beta, & y \geq 0 \end{cases}, \quad \beta = \arcsin \sqrt{\frac{ch y_0 - 1}{ch y_0 - ch y}} \quad (3.22)$$

$F(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл первого рода, определенный как в [7]. Для периода частиц, движущихся в канале, имеем

$$T_c = T_0 k' K(k) \quad (3.23)$$

^{x)} Здесь и ниже для величин, относящихся к частицам, движущимся в канале используется индекс c , а для величин, относящихся к надбарьерным частицам ($\epsilon_1 > u_0$) - индекс nc .
^{***)} Предварительное сообщение о полученных в этом разделе результатах было опубликовано в работе авторов [8].

где $T_0 = 4a_s \sqrt{\epsilon/V_0}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, $K(k) \equiv F(\frac{\pi}{2}, k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Отметим, что с ростом $\epsilon_{\perp}(z)$ период T_c монотонно убывает от величины $\pi T_0/2$ (при $\epsilon_{\perp} = 0$) до величины $T_0 K(\frac{1}{2})/ch \frac{\delta}{2}$ (при $\epsilon_{\perp} = u_0$), например, для $\delta = 2,5$ (плоскость (110) в кремнии) последняя величина равна $T_0 \cdot 1,115$.

Интеграл (3.19) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\int_0^{T/2} dt v_x(t) e^{i\tilde{\omega}t} = 2ia_s \int_0^{y_0} dy \sin \left\{ \frac{F(\beta, k)}{K(k)} \pi \left(l - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (3.24)$$

где учтено, что для частиц в канале $\tilde{\omega}T = 2\pi(l-1)$. Переходя к переменной $u = F(\beta, k)$ и воспользовавшись разложением (см. [7], стр.925)

$$\operatorname{sh} u = \frac{\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi u}{K} \right]}{\operatorname{sh} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi K'}{K} \right]}, \quad K' = K(k') \quad (3.25)$$

находим окончательно

$$v_m^c = (1 - e^{i\pi m}) 2\pi i a_s / \operatorname{sh} \left[\frac{\pi m}{2} \frac{K'}{K} \right] \quad (3.26)$$

Для частиц, движущихся над барьером ($z = \epsilon_{\perp}/u_0 > 1$), зависимость $t(y)$ дается интегралом (3.21), если в нем заменить нижний предел на $-\delta$. Таким образом, эта зависимость также определяется функцией $F(\beta, k)$, где $\beta(y), k$ введены в (3.22). Для периода в этом случае имеем

$$T_{nc} = \frac{T_0}{2} k' (K(k) - F(\alpha, k)) \quad (3.27)$$

где $\alpha = \beta(y = \delta) = \operatorname{arcsin} \sqrt{1-1/z}$. Заметим, что при $z \rightarrow 1$ отношение $T_c/T_{nc} \rightarrow 2$. Это связано с тем, что при $z \rightarrow 1$ как частица в канале, так и частицы движущиеся над барьером имеют примерно одинаковые скорости, но частицы в канале проходят расстояние d дважды за период. Такое резкое различие периодов приводит, как мы увидим ниже, к четкому разделению вкладов в спектр излучения этих групп частиц.

Для v_m^{nc} соответственно имеем

$$v_m^{nc} = 4a_s \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \cos(\lambda q_n)}{\operatorname{sh} \left(\frac{K'}{K} q_n \right) \left[q_n^2 - \left(\frac{\pi m}{1-\lambda} \right)^2 \right]} \quad (3.28)$$

где $q_n = \pi(n-1/2)$, $\lambda = F(\alpha, k)/K$

Отметим, что при $\pi m/(1-\lambda) \rightarrow q_n$, $\cos \lambda q_n \rightarrow 0$ и отношение $\cos(\lambda q_n)/(q_n - \pi m/(1-\lambda))$ остается конечным.

Подставляя (3.26) и (3.28) в (3.18) имеем явное выражение для W_m , а подставляя результат в (3.17) находим спектральное распределение интенсивности излучения позитронов при заданном значении ϵ_{\perp}

$$\frac{dI}{dz} = \frac{I_0 \pi^4 z}{f^2} \sum_{m=1}^{\infty} (z_m^2 - z_m + \frac{1}{2}) \eta(1-z_m) \eta(2z_m y_{\max} - 1) B^2(m) \quad (3.29)$$

где $I_0 = 8e^2 V_0^2 \gamma^2 / a_s^2 m^2$, $z = \omega/\omega_c$,

$\omega_c = 4\pi \gamma^2 / T_0$ - характерная частота излучения,

$$z_m^c = \frac{z f^c}{2m-1}, \quad f^c = \frac{T_c}{T_0}; \quad z_m^{nc} = \frac{z f^{nc}}{2m}, \quad f^{nc} = \frac{2T_{nc}}{T_0}$$

Величина $B(m)$ в (3.29) имеет вид (см. (3.26), (3.28))

$$B(m) = \begin{cases} z < 1 & 1 / 2 \operatorname{sh} \left(q_m \frac{K'}{K} \right) \\ z > 1 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \cos(\lambda q_n)}{\operatorname{sh} \left(q_n \frac{K'}{K} \right) \left[q_n^2 - \left(\frac{\pi m}{1-\lambda} \right)^2 \right]} \end{cases} \quad (3.30)$$

При конкретных вычислениях удобно использовать выражение для f , справедливое при любых z :

$$f = \frac{1}{\operatorname{sh} \delta/2} \int_{A(z)}^{\sqrt{z}} \frac{dy}{\psi(y)} \quad (3.31)$$

где

$$A(z) = \eta(z-1)\sqrt{z-1}, \quad \psi(y) = \sqrt{(z-y^2)(\tilde{z}-1+z-y^2)}, \\ \tilde{z} = \operatorname{ctanh}^2(\delta/2)$$

Для полной интенсивности имеем^{*}:

$$I = \frac{I_0}{3} \frac{\text{sh}^3(\delta/2)}{f} \int_{A(z)}^{\sqrt{z}} dy \psi(y) \quad (3.32)$$

Эта величина может быть выражена через эллиптические интегралы

$$I = \frac{I_0}{9(1-k^2)} \left\{ \frac{E(k) - E(\alpha, k)}{K(k) - F(\alpha, k)} \cdot \frac{1+k^2}{1-k^2} - 1 - \frac{k^2 \sin 2\alpha}{2(1-k^2)} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} / (K(k) - F(\alpha, k)) \right\} \quad (3.33)$$

$\sin \alpha = \sqrt{(z-1)\sqrt{1-1/z}}$, $E(\alpha, k)$ - эллиптический интеграл второго рода, $E(\pi/2, k) = E(k)$ (см. [7]).

Интенсивность (3.33) растет с ростом z в интервале (0,1), а при дальнейшем росте z начинает падать, причем

$$I_{z \rightarrow \infty} = \frac{I_0}{24} \left(\frac{\text{sh} 2\delta}{2\delta} - 1 \right) \quad (3.34)$$

Для частиц, движущихся в канале ($\sin \alpha = 0$), формула (3.33) существенно упрощается:

$$I^c = \frac{I_0}{9(1-k^2)} \left\{ \frac{E(k)}{K(k)} \frac{1+k^2}{1-k^2} - 1 \right\} \quad (3.35)$$

Теперь полученные величины необходимо усреднить по состояниям с разными значениями ϵ_{\perp} . При классическом рассмотрении плотность числа частиц на интервал $d\epsilon_{\perp}$ дается формулой (А.4). Используя явный вид потенциала (2.2) имеем для среднего значения некоторой характеристики излучения $\varphi(z)$:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{\delta} \int_0^{1+b} \frac{dz \varphi(z)}{\psi(y=\sqrt{z})}, \quad z = \frac{\epsilon_{\perp}}{u_0} \quad (3.36)$$

где $b = \epsilon_0/u_0 = (\bar{v}/\bar{v}_c)^2$. Величина $\langle \varphi \rangle$ зависит от угла влета \bar{v} , входящего в b . На рис. 1. приведен гра-

* В формуле (3.32) опущен фактор $1 - \frac{3}{2}(2y_{\max})^4 [1 + (2y_{\max})^2 - \frac{8}{3}y_{\max}]$ который следует учитывать при малых углах коллимации излучения.

фик^{*} функций $\langle I \rangle / I_0$. ($\langle I^c \rangle$ - кривая 1, $\langle I^{nc} \rangle$ - кривая 2 и $\langle I \rangle = \langle I^c \rangle + \langle I^{nc} \rangle$ - кривая 3) в зависимости от b , полученный с помощью (3.36), (3.32). С ростом угла влета (b) общее число частиц в канале постепенно уменьшается, однако величина $\langle I^c \rangle$ растет, достигая максимального значения при $b = 0,69$. Это связано с тем, что в канале в основном излучают частицы с $z \sim 1$. Для $b > 1$ вклад дают только надбарьерные частицы, с увеличением угла влета величина $\langle I \rangle$ уменьшается и стремится к значению, даваемому формулой (3.34). На рис. 2 изображено спектральное распределение интенсивности (см. (3.29), (3.36)) нормированное на единицу: $(d\langle I \rangle / dz) / \langle I \rangle$ при различных углах влета ($b = 0,2(1)$, $b = 0,9(2)$). Для частиц в канале доминирует вклад первой гармоники (сумма всех остальных меньше 1%), излом в точке $z = 1/f_{\min}^c \approx 0,9$ отвечает граничной частоте этой гармоники. Пики на рис. 2 находятся в точках $z = 1/f(\epsilon_{\perp} = \epsilon_0)$, т.е. их положение однозначно определяется углом влета. При $z > 0,9$ спектр практически полностью определяется вкладом частиц, движущихся над барьером (широкий максимум в области $z \sim 1,8$ соответствует их первой гармонике). В соответствии со сказанным выше видно четкое разделение вкладов в спектр частиц в канале и надбарьерных частиц.

Выше мы считали, что угол влета частицы в кристалл \bar{v} фиксирован. Если разброс по углам влета $\Delta \bar{v} \approx \bar{v}_c$, то необходимо усреднить функцию $\langle \varphi \rangle$ в (3.36) с функцией распределения $f(\bar{v} / \bar{v}_c)$:

$$\langle \varphi \rangle_{\bar{v}} = \int d\bar{v} f(\bar{v} / \bar{v}_c) \langle \varphi \rangle / \int d\bar{v} f(\bar{v} / \bar{v}_c) \quad (3.37)$$

Если $f(\bar{v} / \bar{v}_c)$ - четная функция, то с учетом (3.36), (3.37) можно переписать в виде

$$\langle \varphi \rangle_{\bar{v}} = \left(\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} dy + \int_1^{\infty} dz \int_{\sqrt{z-1}}^{\sqrt{z}} dy \right) \frac{\varphi(z) f(y)}{\psi(y)} / \int_0^{\infty} dy f(y) \quad (3.38)$$

* Эти и другие численные результаты, кроме представленного на рис. 7 получен при $\delta = 2,5$, что соответствует, в частности, плоскости (110) в кремнии и золоте.

где мы изменили порядок интегрирования по ν , z , функция $\psi(y)$ определена в формуле (3.31). В (3.38) явно разделены вклады частиц в канале и надбарьерных частиц, они даются соответственно первым и вторым членом в скобках. Численный расчет проведен для случая, когда $\chi(y) \approx \nu(1-y)$ (равномерное распределение в интервале $|\nu| \leq \nu_c$).

В этом случае (3.38) выглядит так

$$\langle \psi \rangle_{\nu} = \frac{\text{sh } \delta/2}{\delta} \left\{ \int_0^1 dz \psi(z) f + \int_1^2 dz \psi(z) [F(\frac{\pi}{2} - \alpha, k) - F(\alpha, k)] k' \right\} \quad (3.39)$$

На рис.3 представлен результат расчета величины $(dI_{\nu}/dz)/I_{\nu}$, согласно (3.39), (3.29), что может рассматриваться как интегральный спектр излучения в изучаемом случае. Как и следовало ожидать позитроны в канале и движущиеся над барьером дают практически неперекрывающиеся вклады (ср. с рис. 2). Для интегральной интенсивности имеем:

$$\langle I \rangle_{\nu} = 0,46 I_0, \quad \langle I^c \rangle_{\nu} = 0,32 I_0.$$

Заканчивая обсуждение характеристик излучения позитронов отметим, что в отличие от излучения в ондуляторе (движение с фиксированным периодом), коллимация излучения при каналировании улучшает монохроматичность только в известных пределах. Действительно, пусть $2y_{\max} = 1 + \mu$,

$\mu \ll 1$, тогда интервал изменения ξ_m в формуле (3.29) порядка μ . В ондуляторе ξ_m величина f — постоянная, так что спектральная плотность оказывается отличной от 0

вблизи точек $\xi_m = (2m-1)/f$ с шириной $\Delta \xi \sim \mu(2m-1)/f$. В кристалле величина f меняется в достаточно широких пределах. Например для $\delta = 2,5$ даже при $\mu \rightarrow 0$ ($m=1$) частоты излучения частиц в канале ξ^c лежат в интервале

$1/f_{\max} = 2/\pi \approx 0,64$, $1/f_{\min} = 1/1,15 \approx 0,9$, что означает что ширина линии определяется разбросом периодов при движении позитронов в канале и не может быть сделана сколь угодно малой

*) Для простоты мы не учитываем уширение линий вследствие конечных размеров ондулятора.

3.3. Излучение электронов. В качестве потенциала, описывающего движение электронов в канале принимаем (2.2) выбрав для удобства $U_e(0) = 0$:

$$U_e(x) = -V_0 [ch(|\frac{x}{a_s}| - \delta) - ch \delta], \quad -d \leq x \leq d \quad (3.40)$$

В этом потенциале для электронов, движущихся в канале

$$t = a_s \sqrt{\frac{\epsilon}{2V_0}} \int_{-y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{ch(\delta - |y|) - ch(\delta - y_0)}} \quad (3.41)$$

где теперь

$$ch(\delta - y_0) = 1 + 2(1-z) \text{sh}^2(\delta/2)$$

остальные обозначения такие же как в (3.20).

Аналогом выражения (3.24) будет теперь

$$\int_0^{T/2} \psi_x(t) e^{i\omega t} dt = 2ia_s \int_0^{y_0} \sin \left[\frac{F(\rho, k)}{F(\rho_0, k)} \pi \left(l - \frac{1}{2} \right) \right] dy \quad (3.42)$$

где

$$\rho = \arcsin \sqrt{1 - (1-z) \text{sh}^2 \frac{\delta}{2} / \text{sh}^2(\frac{\delta-y}{2})}, \quad \rho_0 = \rho|_{y=0} = \arcsin \sqrt{z}$$

В формуле (3.42) следует перейти к переменной $u = F(\rho, k)$, учитывая, что при этом $dy = -du \cdot 2\sqrt{1-k^2 \text{sn} u} / \text{cn} u$ и используя разложение величины $\text{sn} u / \text{cn} u$ ([7], стр 925)

$$\frac{\text{sn} u}{\text{cn} u} = \frac{\pi}{k'K} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \text{th} \left(\frac{\pi n K'}{K} \right) \sin \left(\frac{\pi n u}{K} \right) \quad (3.43)$$

можно вычислить интеграл (3.42) и тем самым найти V_m^c и W_m^c ((3.18), (3.19)). Спектральное распределение интенсивности излучения электронов при фиксированном значении $\epsilon_1(z)$ может быть записано в форме (3.29), где надо заменить

$f \rightarrow f_e$ и $B(m) \rightarrow B_e(m)$. Величина

$$f_e = \frac{1}{\text{sh} \delta/2} \int_{A(z)}^{\sqrt{z}} \frac{dy}{\psi_e(y)} \quad (3.44)$$

где $\psi_e(y) = \sqrt{(y^2 - z + 1)(y^2 - z + \tilde{z})}$ величина $A(z)$, \tilde{z} определены в (3.31). Как и в случае позитронов $f_e^c = T_e^c / T_0$ ($z < 1$) и $f_e^{nc} = 2T_e^{nc} / T_0$ ($z > 1$). Заметим еще, что во входящих

эллиптических интегралах модуль K по разному выражается через \tilde{z} для областей $z \leq 1$, $1 \leq z \leq \tilde{z}$, $z > \tilde{z}$. Мы приводим выражение для k^2 одновременно с $B_e(m)$ (в случае позитронов имеется единое выражение для k^2 (см. (3.22)). Итак:

$$B_e(m) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\left(g_m \frac{kK'}{f}\right)^2 + g_n^2} \cdot \frac{\text{ch}\left(\frac{g_n f}{kK'}\right)}{\text{sh}\left(g_n \frac{K}{K'}\right)}, & k^2 = \frac{\tilde{z}-1}{\tilde{z}-z}; z < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\left(\frac{\pi m K'}{f}\right)^2 + g_n^2} \cdot \frac{\text{sh}\left(g_n \frac{f}{K'}\right)}{\text{ch}\left(g_n \frac{K}{K'}\right)}, & k^2 = \frac{\tilde{z}-z}{\tilde{z}-1}; 1 \leq z \leq \tilde{z} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{\left(\frac{\pi m k' K'}{f}\right)^2 + (\pi n)^2} \cdot \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi n f}{k' K'}\right)}{\text{ch}\left(\pi n \frac{K}{K'}\right)}, & k^2 = \frac{z-\tilde{z}}{z-1}; z \geq \tilde{z} \end{cases} \quad (3.45)$$

где $g_m = \pi \left(m - \frac{1}{2}\right)$.

Интенсивность излучения электронов при фиксированном $\varepsilon_{\perp}(z)$ дается формулой (3.32), если в ней $\psi(y) \rightarrow \psi_e(y)$ (см. (3.44)). Усреднение по x_0 проводится с помощью (3.36), где следует заменить $\psi(z) \rightarrow \psi_e(z)$, $\psi(y=\sqrt{\beta}) \rightarrow \psi_e(y=\sqrt{\beta})$, то же справедливо и для усреднения по углу ϑ (см. (3.37), (3.38)). С учетом явного вида функции $\psi_e(y)$ имеем, в случае равномерного в интервале $|\vartheta| \leq \vartheta_c$ распределения электронов по углу влета, аналог формулы (3.39)

$$\langle \psi_e \rangle_{\vartheta} = \frac{\text{sh} \delta/2}{\delta} \left[\int_0^1 dz \psi_e(z) f_e + \int_1^{\tilde{z}} dz \psi_e(z) Q(z) \right] \quad (3.46)$$

где $Q(z) = \int_0^{\arcsin \sqrt{z-\tilde{z}}} dt \left[1 - \frac{\tilde{z}-z}{\tilde{z}-1} \sin^2 t \right]^{-1/2}$.
 Функции f_e , I_e могут быть выражены через эллиптические интегралы. Например, период движения электронов

$$\frac{T_e}{T_0} = \begin{cases} k F(\rho_0, k), & z < 1 \\ \frac{1}{2} (K - F(\rho_1, k)), & 1 < z \leq \tilde{z} \\ \frac{1}{2} k' F\left(\frac{\pi}{2} - \rho_1, k\right), & z \geq \tilde{z} \end{cases} \quad (3.47)$$

где ρ_0 определена в (3.42), $\rho_1 = \arcsin(\text{ch}^{-1} \delta/2)$, выражение для k^2 в каждой из областей дано в (3.45). С ростом z от 0 до 1 период T_e возрастает, в окрестности точки $z=1$ он ведет себя как $\ln(1/|1-z|)$, а при дальнейшем увеличении z монотонно уменьшается (при $z \gg 1$, $T_e/T_0 \sim 1/\sqrt{z}$). Здесь следует отметить два обстоятельства: 1) величина f (период) для частиц в канале и надбарьерных частиц пробегают одни и те же значения; 2) интервал этих значений бесконечен. Первое обстоятельство приводит к значительному (практически полному) перекрытию вкладов в спектр этих двух групп частиц, второе обуславливает относительно большую ширину спектрального распределения (по сравнению со спектром излучения позитронов).

При заданном значении z интенсивность I_e^c монотонно спадает до 0 при изменении z от 0 до 1, а I_e^{nc} возрастает стремясь к асимптотическому значению (3.34) при $z \gg 1$. Вид усредненного распределения определяется как этими факторами, так и заселенностью уровней при разных z . На рис.4 представлена зависимость $\langle I_e \rangle$ усредненная по x_0 , от переменной $\beta = \varepsilon_0/u_0 = (\vartheta/\vartheta_c)^2$ ($\langle I_e^c \rangle$ - кривая 1, $\langle I_e^{nc} \rangle$ - кривая 2 и $\langle I_e \rangle = \langle I_e^c \rangle + \langle I_e^{nc} \rangle$ - кривая 3). Величина $\langle I_e \rangle / I_0$ сначала уменьшается, принимает минимальное значение при $\beta = 0,83$, а затем медленно возрастает, приближаясь к асимптотическому значению, определяемому формулой (3.34). На рис.5

изображена спектральная плотность интенсивности как функция ξ при разных значениях параметра β . Как и в случае позитронов изломы на кривых расположены в точках $\xi = (2n-1)/f |_{z=\beta}$ и $\xi = 2n/f |_{z=\beta+1}$ и отвечают граничной частоте n -гармоники соответственно для электронов в канале и движущихся над барьером. Хорошо видно перекрытие вкладов в спектр от этих двух групп частиц. Например на кривой с $\beta = 0,4$ изломы при $\xi \approx 2$ и $\xi \approx 4$ отвечают границе соответственно 1-ой и 2-ой гармоники надбарьерных частиц, а излом при $\xi \approx 2,3$ - границе 1-ой гармоники частиц в канале. Для случая $\beta = 0,7$ границы 1-ой и 2-ой гармоник для частиц в канале лежат при

$\xi \approx 1,2$ и $\xi \approx 3,7$, а для частиц, движущихся над барьером, эти границы лежат соответственно при $\xi \approx 2,5$ и $\xi \approx 4,9$. Отличие спектра излучения электронов и позитронов состоит еще и в том, что для электронов вклад

дает не одна, а несколько первых гармоник. Отмеченные особенности хорошо иллюстрируются поведением интегрального спектра, представленного на рис.6, где изображен $(\langle dI \rangle_{\nu} / d\xi) / \langle I \rangle_{\nu}$ - нормированный на единицу суммарный спектр (кривая 2) и спектр излучения частиц движущихся в канале, также нормированный на единицу (кривая 1). Видно, что положение максимума и ширина спектрального распределения очень близки для обоих случаев. Для интегральных интенсивностей расчет дает $\langle I_e^c \rangle_{\nu} = 0,45 I_0$, $\langle I_e \rangle_{\nu} = \langle I_e^c \rangle_{\nu} + \langle I_e^{nc} \rangle_{\nu} = 0,68 I_0$.

Полученные в этом разделе результаты находятся в полном качественном и неплохом количественном согласии с результатами работы авторов /9/, где излучение при каналировании электронов изучено при более простом выборе потенциала (типа "перевернутая парабола"), что хорошо

* Усреднение по ν проводилось для однородного распределения $|\nu| \leq \nu_c$ (ср. (3.39))

** При количественном сравнении результатов следует перейти к единым масштабам интенсивностей и частот, поскольку в /9/ использовались другие масштабы.

видно, в частности, из сравнения рис. 4-6 настоящей работы с рис. 1-3 в /9/.

Наконец, на рис.7 изображено отношение интенсивностей излучения электронов и позитронов, усредненных по χ_0 , как функция величины β для различных значений параметра δ . Характерной особенностью графика $\langle I_p \rangle / \langle I_e \rangle$ является провал при малых углах и максимум при $\nu \sim \nu_c$. Положение этого максимума слабо меняется в широком интервале δ . Измерение указанной зависимости позволило бы с хорошей точностью определить глубину потенциальной ямы U_0 .

Таким образом, имеется существенное различие в спектральном распределении интенсивности излучения позитронов и электронов. Если для позитронов, как отмечалось выше, пик в $dI/d\omega$ является сравнительно узким и спектры излучения частиц, движущихся в канале и над барьером фактически разделяется, то для электронов этот пик заметно шире и спектры излучения частиц в канале и движущихся над барьером существенно перекрываются.

Отношение спектрального распределения интенсивности излучения электронов и позитронов при каналировании и соответствующей характеристики тормозного излучения (взятого для аморфной среды) в области пика в спектре излучения каналирующих частиц может быть грубо оценено следующим образом

$$\frac{d\langle I \rangle / d\omega}{dI_{br} / d\omega} \Big|_{\omega \sim \omega_c} \sim \frac{\langle I \rangle L_{rad}}{\omega_c} \sim \alpha \left(\frac{U_0}{mc^2} \right)^{3/2} \frac{L_{rad}}{d} \sqrt{\gamma} \quad (3.48)$$

например для кремния (плоскость (110)) при энергии $\varepsilon \sim 1 \text{ ГэВ}$ это отношение $\sim 10^2$. Как уже отмечалось ранее авторами /8, 9/, именно измерение отношения (3.48) удобно для выделения эффекта излучения при каналировании на фоне

тормозного излучения. Более детально сравнение теории с имеющимися экспериментальными данными авторы предполагают провести в другом месте.

4. КОГЕРЕНТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Расчет характеристик излучения упрощается, если частица движется высоко над барьером, т.е. выполняется условие

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon \gamma^2}{2} \gg u_0 \quad (4.1)$$

В этом случае выражение для скорости, поперечной к средней скорости частицы можно записать в виде

$$v_{\perp}(t) \approx \frac{u(\gamma t) - u(\gamma t)}{\epsilon \gamma} \quad (4.2)$$

Если при этих условиях поперечное движение частицы является нерелятивистским, т.е. выполняется условие

$$\frac{u_0}{m \gamma} \ll 1 \quad (4.3)$$

то излучение при таком движении принято называть когерентным^{xx)}. При когерентном излучении энергия фотона может стать порядка энергии электрона (тогда $\omega_c \approx 2\omega_0 \gamma^2 \approx \approx 4\pi \gamma^2 / d \sim \epsilon$) это возможно при выполнении условия $1 \gg \gamma \approx d / 4\pi \lambda_c \gamma \approx 10^2 / \gamma$, в этом случае необходимо учитывать отдачу при излучении.

При когерентном излучении с точностью до членов $\sim \frac{u_0}{\epsilon_0}$ можно пренебречь зависимостью движения частицы от точки влета x_0 (это обстоятельство делает когерентное

*) При этом, однако, представление о потенциале плоскости применимо только если $\gamma \ll \psi$, где ψ — угол между направлением скорости частицы и одной из осей кристалла.

xx) См. /10/ и цитированную там литературу.

излучение, вообще говоря, более монохроматичным, чем излучение при каналировании), так что в этом случае непосредственно применимы все результаты работы /3/, в которой рассмотрено в дипольном приближении излучение при квазипериодическом движении с учетом отдачи, только теперь Фурье-компонента ускорения сводится к Фурье-образу потенциала. В нашем случае характеристики излучения определяются Фурье-образом одной компоненты ускорения w_x (ср. (3.4))

$$\begin{aligned} w_{xn} &\equiv w_{x\tilde{\omega}} = \int_0^T w_x(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt \approx \\ &\approx - \int_0^T \frac{1}{\epsilon} \frac{d u(x)}{dx} \Big|_{x=\gamma t} \exp\{i\tilde{\omega}t\} dt = (4.4) \\ &= i \frac{\tilde{\omega} d}{\epsilon \gamma^2} \frac{\tilde{u}_n}{2\pi}; \quad u_n = \int_0^{2\pi} u\left(\frac{\varphi d}{2\pi}\right) e^{in\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Просуммированная по поляризациям фотона и проинтегрированная по азимутальному углу его вылета интенсивность излучения имеет вид^{*)} (ср. формулу (33) работы /3/):

$$\begin{aligned} dI &= \frac{e^2 \gamma^2 \eta^2}{4m^2 d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 |u_n|^2 du dy}{y^6 u^2 (1+u)^3} \cdot \\ &\cdot \left[y^2 \left(1 + \frac{u^2}{2(1+u)} \right) + \frac{1}{2} - y \right] \delta\left(uy - \frac{\eta n}{2}\right) \quad (4.5) \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\eta = \frac{\omega_c}{\epsilon} = \frac{4\pi \gamma}{T}, \quad u = \frac{\omega}{\epsilon - \omega}, \quad y = \gamma^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}), \quad T = \frac{d}{\gamma}$$

*) Поскольку в выражение для спектрального распределения интенсивности входит квадрат Фурье-образа потенциала, спектр не зависит от знака заряда.

Проинтегрировав (4.5) по полярным углам вылета фотона (интегрируется δ -функция) находим спектральное распределение излучения

$$dI = \frac{4e^2 \gamma^2}{m^2 d^2 \gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \frac{u du}{(1+u)^3} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{u^2}{2(1+u)} + 2 \left(\frac{u}{zn} \right)^2 - 2 \left(\frac{u}{zn} \right) \right] \delta(zn - u) \quad (4.6)$$

В классическом пределе $\gamma \ll 1$

$$dI = \frac{4e^2 \gamma^2}{m^2 d^2} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \xi d\xi \cdot$$

$$\cdot \left[1 + 2 \frac{\xi^2}{n^2} - 2 \frac{\xi}{n} \right] \delta(n - \xi) \quad (4.7)$$

где $\xi = \omega / \omega_c$

Рассмотрим влияние углового разброса частиц в пучке на характеристики когерентного излучения. Если $\Delta \vec{v} \ll \vec{v}$, то можно пренебречь зависимостью γ от $\Delta \vec{v}$ с точностью до членов $\sim \Delta \vec{v} / \vec{v}$. При этом возможны два случая: 1) $\Delta \vec{v} \gamma \ll 1$, тогда можно непосредственно использовать формулы (4.5)-(4.7); 2) $\Delta \vec{v} \gamma \gtrsim 1$, тогда угловое распределение интенсивности излучения существенным образом зависит от функции распределения $f(\vec{v})$ (\vec{v} - единичный вектор в направлении скорости):

$$dI(\vec{n}) = \int dI(\vec{n}, \vec{v}) f(\vec{v}) d\vec{v} \quad (4.8)$$

Спектральные характеристики излучения по-прежнему определяются формулами ((4.6)-(4.7)).

Если же $\Delta \vec{v} \gtrsim \vec{v} \gtrsim 1/\gamma$, то как спектр, так и

*) Этот результат согласуется с интенсивностью когерентного излучения приведенной например в [10], для случая движения под углом к кристаллической плоскости.

угловые характеристики излучения существенным образом зависят от функции распределения частиц в пучке.

В случае не очень больших энергий частиц возможен промежуточный случай *) $1 \gg \Delta \vec{v} \gamma \gtrsim \vec{v} \gamma$. В этом случае угловое распределение излучения, проинтегрированное по всем частотам, не зависит от функции распределения, в то время как для спектральной интенсивности такая зависимость остается существенной.

5 ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ В СЛУЧАЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ

Если $\beta_0 \gtrsim 1$, то поперечное движение электронов (позитронов) становится, вообще говоря, релятивистским и при описании излучения уже нельзя ограничиться дипольным приближением. Кроме того, при достаточно больших энергиях (см. (1.5), $\omega_c / (\epsilon - \omega_c) \sim \frac{\delta x_c \omega_0}{d m} \gtrsim 1$ при $\gamma \gtrsim 10^8$) энергия излученных фотонов становится порядка энергии электрона и, следовательно, при таких энергиях необходимо учитывать отдачу при излучении. Характеристики излучения при указанных выше условиях можно найти воспользовавшись формулами (2.8), (3.0) работы [3]. Интенсивность излучения в единицу времени определяется выражением:

$$dI = e^2 \frac{d^3 k}{2\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} |R_n|^2 \delta(\varphi_0 - 2\pi n) \quad (5.1)$$

где

$$k' = \frac{\epsilon}{\epsilon - \omega} k(\omega, \vec{k}), \quad \varphi_0 = \omega' T (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}), \quad \vec{v} = \vec{v}(t)$$

средняя скорость частицы, R_n дается выражением

$$R_n = \int_0^T R(t) \exp\{i k' x(t)\} dt$$

$$R(t) = \varphi_f^+ [A(t) + i \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(t)] \varphi_i$$

*) При таких энергиях применима классическая теория.

$$A(t) = \frac{\vec{e}^* \vec{p}(t)}{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon-\omega+m}{\varepsilon+m}} + \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon-\omega+m}} \right)$$

$$B(t) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon-\omega)}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon-\omega+m}{\varepsilon+m}} [\vec{e}^* \vec{p}(t)] + \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon-\omega+m}} [\vec{e}^* (\vec{p}-\vec{k})] \right) \quad (5.2)$$

Приведенные формулы определяют все характеристики излучения, в том числе поляризационные и спиновые. Интенсивность излучения, просуммированного по поляризациям конечных фотона и электрона и усредненная по поляризациям начального электрона имеет вид (ср. формулы (10.7), (10.8) в /4/):

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{4\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi n) \cdot \left\{ \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon-\omega)^2} \right] (|\vec{v}_n|^2 - |v_n^0|^2) + \frac{\omega^2}{\gamma^2(\varepsilon-\omega)^2} |v_n^0|^2 \right\} \quad (5.3)$$

где $v^M = (1, \vec{v})$

$$v_n^M = \int_0^T v^M(t) e^{ik'x(t)} dt \quad (5.4)$$

Учитывая, что

$$v_z \approx \frac{p_z}{\sqrt{p_z^2 + m^2}} = \frac{\vec{v}_\perp^2(t)}{2} \quad (5.5)$$

и вводя обозначение

$$\Delta(t) = \omega_0 \int_0^t (\vec{v}_\perp^2(t') - \overline{\vec{v}_\perp^2}) dt' \quad (5.6)$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ получаем окончательно для распределе-

ния интенсивности излучения

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon-\omega)\omega_0\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi n) \cdot \left[-|I_0|^2 + \gamma^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)} \right) (|\vec{I}_\perp|^2 - \text{Re} I_0^* I_\parallel) \right] \quad (5.7)$$

где

$$I_0 = \int_0^{2\pi} e^{if(\psi)} d\psi, \quad \vec{I}_\perp = \int_0^{2\pi} \vec{v}_\perp(\psi) e^{if(\psi)} d\psi,$$

$$I_\parallel = \int_0^{2\pi} v_\parallel(\psi) e^{if(\psi)} d\psi, \quad \psi = \omega_0 t \quad (5.8)$$

$$f(\psi) = n\psi + \omega' \Delta(\psi) / (2\omega_0 - \omega' \vec{n} \vec{v}_\perp(\psi))$$

здесь мы воспользовались тем, что $\varphi_0 = \omega' (1 - \vec{n} \vec{v})$ причем частота излученных фотонов определяется соотношением

$$\omega' = \frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon-\omega} = \frac{2\gamma^2\omega_0 n}{1 + \gamma^2 \vec{v}^2 + \gamma^2 \vec{v}_\perp^2} \quad (5.9)$$

где \vec{v} - угол вылета фотона относительно \vec{v} .

Входящие в (5.8) интегралы имеют относительно простой вид только для кругового поперечного движения, когда $|\vec{v}_\perp| = \text{const}$. В этом случае $\Delta(\psi) = 0$,

$$f(\psi) = n\psi - \omega' \frac{v_\perp}{\omega_0} \vec{v} \sin(\psi - \varphi), \quad I_\parallel = v_\perp^2 I_0$$

$$|I_0|^2 = (2\pi)^2 J_n^2(x), \quad |\vec{I}_\perp|^2 = (2\pi)^2 v_\perp^2 (J_{n+1}^2(x) + J_{n-1}^2(x)), \quad x = \omega' \frac{v_\perp \vec{v}}{\omega_0} \quad (5.10)$$

где $J_n(x)$ - функция Бесселя.

Интегрируя по углам вылета фотона (интегрирование по φ - тривиально, интегрирование по ϑ сводится к интегрированию δ -функции в (5.7), получаем следующее выражение для спектральной плотности излучения в случае кругового движения частицы:

$$dI_{c2} = e^2 \frac{\omega d\omega}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n\omega_{c2} - \omega') \cdot \left\{ -J_n^2(x) + \frac{1}{2} \gamma^2 v_{\perp}^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon(\varepsilon - \omega)} \right) [J_{n+1}^2(x) + J_{n-1}^2(x) - 2J_n^2(x)] \right\} \quad (5.11)$$

здесь $\omega_{c2} = 2\omega_0 \gamma^2 / (1 + \gamma^2 v_{\perp}^2)$.

В случае плоскостного каналирования (не нарушая общности можно положить $v_y = 0$) выражение (5.7), проинтегрированное по углу ϑ имеет вид

$$dI = e^2 \frac{\omega d\omega d\varphi}{(2\pi)^3 \gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n\omega_c - \omega') \cdot [|I_0|^2 + \gamma^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon(\varepsilon - \omega)} \right) (|I_x|^2 - \text{Re} I_0^* I_{11})] \quad (5.12)$$

где $\omega_c = 2\omega_0 \gamma^2 / (1 + \gamma^2 v_x^2)$.

Используя квазиклассическое условие квантования энергии в одномерной яме можно представить величину $\overline{v_x^2}$ в виде:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{T\varepsilon} \oint p_x dx \approx \frac{\omega_0 n_x}{\varepsilon} = -2 \frac{\partial \varepsilon_{\perp}(\varepsilon, n_x)}{\partial \varepsilon} \quad (5.13)$$

где n_x - номер уровня.

В частном случае движение в осцилляторном потенциале спектральную плотность излучения можно записать в форме:

$$dI = e^2 \frac{\omega d\omega d\varphi}{(2\pi)^3 \gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(2\omega_0^2 \gamma^2 n / (1 + \gamma \varepsilon_{\perp} / m) - \omega') \cdot \left\{ -A_0^2 + \frac{\varepsilon_{\perp} \gamma}{m} \left(2 + \frac{\omega^2}{\varepsilon(\varepsilon - \omega)} \right) (A_1^2 - A_0 A_2) \right\} \quad (5.14)$$

где
$$A_n = \int_0^{2\pi} \cos^n \psi e^{if(\psi)} d\psi, \quad f(\psi) = n\psi - \alpha \sin \psi + \beta \sin 2\psi, \quad \alpha = \frac{\omega'}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}} \gamma \cos \varphi, \quad \beta = \frac{\omega' \varepsilon_{\perp}}{4\omega_0 \varepsilon} \quad (5.15)$$

Формулы (5.11), (5.14) совпадают с выражениями для спектральной плотности излучения в поле монохроматической плоской волны с соответственно циркулярной и линейной поляризациями. Это совпадение не является случайным и связано с тем, что в сопутствующей системе отсчета электрона, поле, в котором движется электрон с релятивистской точностью совпадает с полем волны. Спектральное распределение излучения в поле плоской волны подробно исследовалось в работах [12] (см. также цитированную там литературу).

Вычисление характеристики излучения упрощается в случае, когда поперечное движение становится ультрарелятивистским: $\rho_0 \gg 1$. В этом случае основной вклад в излучение дают частоты $\omega' \sim \gamma \varepsilon \sim u_0 \gamma^2 / md$ (см., напр., [4]) и углы излучения $\vartheta \sim v_{\perp} \sim \sqrt{\rho_0} / \gamma$. Из этих оценок следует, что основной вклад в излучение дают гармоники

$$n \sim \frac{\omega' v_{\perp}^2}{\omega_0} \sim \left(\frac{u_0 \gamma^2}{md} \right) d \sqrt{\frac{\varepsilon'}{u_0}} \frac{u_0}{\varepsilon} \sim (\rho_0)^{3/2} \quad (5.16)$$

Учитывая зависимость частот от поперечной энергии ε_{\perp} (см. (5.12), (5.13)) находим

$$\frac{n \Delta \omega_c}{\omega_c} \sim \frac{n \Delta \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}} \sim \frac{\Delta \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\perp}} \rho_0^{3/2} \gg 1 \quad (5.17)$$

Это условие означает, что в области основного вклада частоты излучения соседних гармоник существенно перекрываются даже при фиксированном угле вылета фотона. По этой причине спектр фотонов можно считать непрерывным, а в формуле (5.1) суммирование по n заменить на интегрирование, тогда

$$2\pi \sum_n \delta(\varphi_0 - 2\pi n) \rightarrow 2\pi \int dn \delta(\varphi_0 - 2\pi n) = 1$$

При этом время формирования излучения $\tau \sim 1/v\gamma \sim \sim T/\sqrt{\rho_0} \ll T$ и интенсивность излучения в данном направлении может быть получена в результате сложения интенсивностей с отдельных участков траектории. В этом случае применимы формулы описывающие магнито-тормозное излучение (см., напр., /4/), только теперь мгновенные характеристики излучения, существенно зависящие от параметра $\chi = |d^2u/dx^2| \delta/m^2$ необходимо усреднить по периоду движения частицы. Следует отметить, что результаты этого раздела носят промежуточный характер, т.к. необходимо еще провести усреднения по χ_0 и, возможно, по ν .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим характерные черты излучения при плоскостном каналировании. Это излучение носит разный характер в зависимости от энергии частиц.

При малых энергиях (нерелятивизм и слабый релятивизм) $\gamma \sim 1$, излучение необходимо изучать в рамках зонной теории, поскольку движение в отдельной потенциальной яме канала теряет смысл (проницаемость стенок канала порядка единицы). Частоты излучения порядка характерных частот движения, а интенсивность излучения относительно мала.

По мере роста энергии мы приходим к случаю, когда число уровней в одномерной потенциальной яме $N \sim \sqrt{\gamma} \gg 1$. При этом движение частиц в канале и их излучение можно рассматривать классически, а интенсивность излучения растет как γ^2 . Если $\rho_0 \ll 1$, то поперечное движение является не релятивистским, а излучение частиц можно рассматривать в дипольном приближении.

При дальнейшем росте энергии имеем $\rho_0 \gg 1$ (фактически это достигается при энергии несколько ГэВ), при этом поперечное движение частиц в канале будет релятивистским, а в излучении становятся существенными высшие гармоники. При ультрарелятивистском поперечном движении доминируют высшие гармоники, $n \sim \rho_0^{3/2}$, что,

как известно, специфично для магнито-тормозного излучения.

Наконец при $\gamma \approx 10^2$ становится существенной отдача при излучении, которое можно рассматривать тогда с использованием квазиклассической теории.

Следует иметь в виду, что при заданной поперечной энергии ϵ_{\perp} , когда траектория фиксирована, задача излучения рассматривалась в многочисленных работах, посвященных магнитотормозному излучению и излучению в ондуляторах задолго до рассмотрения излучения при каналировании (см., напр., /3, 4/ и цитированную там литературу)..

В силу того, что частицы, захваченные в канал (и движущиеся невысоко над барьером) имеют различные значения ϵ_{\perp} и частицы определенным образом распределены по ϵ_{\perp} при движении в кристалле, то задача об излучении сводится к задаче об излучении набора ондуляторов (если излучение формируется на многих периодах движения), т.е. специфической особенностью излучения при каналировании является не отличие этого излучения от ондуляторного, а необходимость суммирования излучения различных ондуляторов. Однако как раз эта специфика излучения при каналировании большинством авторов не учитывалась.

Впервые оценки характерной частоты и интенсивности излучения частиц, движущихся в канале, были сделаны Кумаровым /13/. В этой и последующих работах /14, 15/ вычисления проведены для излучения частицы с определенного уровня (с фиксированным значением ϵ_{\perp}) в дипольном приближении. Кроме того, конкретные результаты были получены для осцилляторного потенциала как для позитронов, так и для электронов. Следует иметь в виду, что в области применимости использованного в этих работах приближения изолированной потенциальной ямы, когда движение частиц, дающих основной вклад в излучение, является квазиклассическим, основные результаты этих работ можно получить, если воспользоваться результатами работы /3/, для чего в соответствующие формулы этой работы нужно подставить конкретное выражение для ускорения^{*}. В то же время в работах /13-15/ не учитывалась основная специфика излучения при каналировании, ко-

^{*} В частности, период колебаний в этом случае $\sim \sqrt{\epsilon}$

торая отличает его от ондуляторного, — зависимость его от заселенности уровней поперечной энергии и не было проведено осреднение характеристик излучения с соответствующей функцией распределения $f(\varepsilon_{\perp})$. Существенным обстоятельством является также тот факт, что в реалистических потенциалах период движения (а соответственно и спектр излученных фотонов) зависит от амплитуды колебаний, в то время как в осцилляторном потенциале, использованном в /13-15/, такая зависимость отсутствует. Отметим также, что в работе /14/ сделано ошибочное утверждение о существовании эллиптической поляризации в дипольном приближении при плоскостном каналировании.

В ряде работ (см. /16/, /17/ и цитированную там литературу) использовался потенциал прямоугольной ямы. Расчет проведенный с использованием такого потенциала, даже качественно не описывает многих характеристик излучения. Например, в случае релятивистского поперечного движения, спектр излучения, при движении частиц в такой яме простирается вплоть до $\omega \sim \varepsilon$, независимо от параметров задачи, а обрезание спектра эффективно обусловлено отдачей при излучении.

В работе /17/ была сделана попытка выйти за рамки дипольного приближения. Однако эта работа содержит значительное число неточностей и неправильных утверждений. Основная формула работы /14/ справедлива только в случае, если $C_{\beta\beta'} \approx \delta_{\beta\beta'}$, тогда как для реалистических потенциалов (и даже для осцилляторного) в области энергий, где неприменимо дипольное приближение, существенно как раз то, что $C_{\beta\beta'}$ не сводится к $\delta_{\beta\beta'}$.

Утверждается, что в области $\beta_0 \gg 1$ максимальная частота фотона растет как $\sqrt{\varepsilon}$, хотя на самом деле она растет как ε^2 . Оценка полной излучаемой энергии противоречит известной формуле $I = \frac{2}{3} e^2 \dot{w}^2 \gamma^4$ в области, где применима классическая теория. Наконец, для осцилляторного по-

*) Из формул (3.10), (3.12), (3.13) выше (см. также /3/), однозначно следует, что при плоскостном каналировании в дипольном приближении поляризация излучения может быть только линейной.

тенциала ошибочно утверждение относительно заселенности уровней (также противоречащее классической теории в области ее применимости).

В работах /11/, /18/ задача об излучении при каналировании поставлена адекватно, однако авторы ограничились выписыванием общих (вполне очевидных) соотношений, а конкретные результаты приведены только для интенсивности при $\varepsilon_0 = 0$ (а также при $\varepsilon_0 / u_0 \gg 1$) и фактически в предположении что $\delta \gg 1$ (как видно из таблицы 1 величина δ лежит между 1,5 и 4).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Предполагая малость толщины переходного слоя в кристалле* по сравнению с характерными длинами колебаний частиц в канале, описываемом потенциалом $u(x)$, несложно получить распределение частиц по поперечной энергии при прохождении ими границы кристалла в рамках классической механики. Пусть потенциал

$$u(z, x) = \mathcal{V}(z) u(x) \quad (\text{A.1})$$

Из классических уравнений движения с учетом ультрарелятивизма и малости поперечного импульса по сравнению с продольным имеем

$$\varepsilon_{\perp, \parallel}(z = -0, x_0) - \varepsilon_{\perp, \parallel}(z = +0, x_0) = \pm u(x_0) \quad (\text{A.2})$$

так что непосредственно после влета в кристалл поперечная энергия частиц есть

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 + u(x_0), \quad \varepsilon_0 = \frac{p_0^2 c^2}{2\varepsilon} = \frac{\varepsilon \mathcal{V}^2}{2} \quad (\text{A.3})$$

где $x_0(\mathcal{V})$ — точка (угол) влета.

*) Эта толщина обычно не превышает несколько атомных слоев

Считая, что до влета в кристалл частицы были равномерно распределены по поперечной координате x , находим

$$\frac{dN(\varepsilon_{\perp})}{d\varepsilon_{\perp}} = \frac{1}{d} \left| \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx_0} \right|^{-1} = \sum_i \frac{1}{d} \left| \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx_{0i}} \right|^{-1} \quad (\text{A.4})$$

где d — расстояние между плоскостями, зависимость $\varepsilon_{\perp}(x_0)$ определяется (A.3), x_{0i} есть корень уравнения (A.3). Ниже мы ограничимся потенциалами с двумя точками поворота

$$\tilde{x}_i = \pm \tilde{x} \text{ при любом значении } \varepsilon_{\perp}.$$

Рассмотрим теперь ту же задачу в квазиклассическом приближении квантовой механики. Волновая функция поперечного движения тогда есть

$$\Psi_{\varepsilon_{\perp}}(x) = \sqrt{\frac{2\omega_0}{\pi v(x)}} \sin \left\{ \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\hbar c} \int_{-\tilde{x}}^x \sqrt{\varepsilon_{\perp} - u(x)} dx + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (\text{A.5})$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$ — частота классического периодического движения $v(x) = p(x)/\varepsilon$. Волновая функция падающих частиц, нормированная на полное число частиц

$$\Psi_{p_0}(x) = \sqrt{\frac{1}{d}} e^{i p_0 x / \hbar} \quad (\text{A.6})$$

Тогда число частиц в интервале энергии $\Delta\varepsilon_{\perp}$ после прохождения границы кристалла (считая этот процесс быстрым) определяется выражением

$$\Delta N(\varepsilon_{\perp}) = |a_{p_0}(\varepsilon_{\perp})|^2 \Delta n = |a_{p_0}(\varepsilon_{\perp})|^2 \frac{\Delta\varepsilon_{\perp}}{\hbar\omega_0} \quad (\text{A.7})$$

где

$$a_{p_0}(\varepsilon_{\perp}) = \int \Psi_{\varepsilon_{\perp}}^*(x) \Psi_{p_0}(x) dx \quad (\text{A.8})$$

Поскольку в рассматриваемом приближении фаза волновой функции (A.5) велика, интеграл (A.8) можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. В случае когда $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_0 = p_0^2 c^2 / 2\varepsilon$ точка стационарной фазы x_0 определяется выражением:

$$\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon_{\perp} - u(x_0))} - p_0 c = 0 \quad (\text{A.9})$$

что совпадает с уравнением (A.3). Следует учитывать также, что уравнению (A.9) может удовлетворять только одна из экспонент, входящих в (A.5), что соответствует определенному направлению скорости частицы, а также, что существуют две стационарные точки $\pm x_0$, являющиеся решением (A.9). Учитывая вклад этих точек, имеем

$$\begin{aligned} |a_{p_0}(\varepsilon_{\perp})|^2 &= \frac{\omega_0}{2\pi v(x_0)d} \left| \sum_{\pm x_0} \int \exp \left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \cdot \right. \right. \\ &\cdot \left[\frac{1}{2v(x_0)} \left| \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx_0} \right| \xi^2 - \int_0^{x_0} \frac{1}{c} \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon_{\perp} - u(x))} dx + \right. \\ &\left. \left. + p_0 x \right] \right\} d\xi \Big|^2 = 4 \frac{\hbar\omega_0}{d} \left| \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx_0} \right|^{-1} \cdot \\ &\cdot \cos^2 \left\{ \frac{1}{\hbar c} \int_0^{x_0} \sqrt{2\varepsilon(\varepsilon_{\perp} - u(x))} dx - \frac{p_0 x_0}{\hbar} - \frac{\pi}{4} \right\} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Подставляя (A.10) в (A.7) с учетом (A.9) имеем для распределения частиц по поперечной энергии

$$\frac{dN(\varepsilon_{\perp})}{d\varepsilon_{\perp}} = \frac{4}{d} \left| \frac{d\varepsilon_{\perp}}{dx_0} \right|^{-1} \cos^2 \{ \dots \} \quad (\text{A.11})$$

Классическое распределение (A.4) получается из (A.11), если в последней формуле провести усреднение по быстро осциллирующей фазе.

В классическом пределе число частиц, имеющих энергию $\varepsilon_{\perp} < \varepsilon_0$, равно нулю. Представляет интерес за-

*¹) Выражение (A.11) было получено в /2/.

**²) Не нарушая общности можно положить $u_{\min} = u(0) = 0$.

селенность этой области поперечных энергий в квантовой механике. В случае $\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pm} \ll \varepsilon_0$ в интеграл (А.8) основной вклад дает область x , такая, что $u(x) \approx \frac{1}{2} u''(0)x^2 \ll \varepsilon_0$. Проводя соответствующие разложения имеем

$$|a_{p_0}(\varepsilon_{\pm})| \approx \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi v_0 d}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos\left(\frac{\Delta p x}{\hbar} + \frac{u'' x^3}{6v_0 \hbar}\right) \\ = \sqrt{\frac{\omega_0}{2\pi v_0 d}} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{6v_0 \Delta p}{u''}} K_{1/3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\hbar} (\Delta p)^{3/2} \sqrt{\frac{v_0}{u''}}\right) \quad (\text{A.12})$$

где $v_0 = p_0 c / \varepsilon$, $u'' = u''(0)$, $\Delta p = p_0 - \sqrt{2\varepsilon\varepsilon_{\pm}}/c$. Учитывая, что $\Delta p \approx \hbar\omega_0 \Delta n / v_0$ получаем следующее выражение для вероятности захвата электрона на уровень $n - \Delta n$, где n - номер уровня соответствующий энергии $c^2 p_0^2 / 2\varepsilon$,

$$W(\Delta n) = \frac{4}{3\pi} \frac{\hbar\omega_0^2 \Delta n}{d u'' v_0} K_{1/3}^2\left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\omega_0^2 \varepsilon}{u'' c^2}} (\Delta n)^{3/2}\right) \quad (\text{A.13})$$

Т.к. $\omega_0^2 \varepsilon / u'' c^2 \sim 1$, $\hbar\omega_0 / \varepsilon_0 \sim 1/n$, то вероятность (А.13) экспоненциально падает, если $\Delta n \gg n^{1/3}$. Для осциллятора приведенные выражения являются точными.

Тогда используя, что $K_{1/3}(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (z \gg 1)$ имеем в этом случае:

$$W(\Delta n) \approx \frac{c}{d} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon\omega_0 \Delta n}} \exp\left\{-\frac{2}{3} \frac{(\Delta n)^{3/2}}{\sqrt{n}}\right\} \quad (\text{A.14})$$

Отсюда следует, что заселенность уровней экспоненциально падает в классически недостижимой области.

*) Т.е. для осциллятора $\frac{\omega_0^2 \varepsilon}{u'' c^2} = 1$, $\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon_0} \approx \frac{1}{n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.S.Gemmell Rev.Mod.Phys. 46, 129, 1974.
2. J.U.Andersen, S.Kyer Andersen, W.Augustyniak. Mat.Fys.Medd. Dan.Vid. Selsk 39, No 10, 1977.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко ЖЭТФ 63, 2121, 1972
4. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. Москва 1973
5. И.Линхард УФН, 99, 1969 г.
6. B.R.Appleton, G.Erginsoy, W.Gibson. Phys. Rev. 161, 330, 1967.
7. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, Москва. 1962
8. V.N.Baier, V.M.Katkov, V.M.Strakhovenko Phys. Lett 73A, 414, 1979.
9. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР, 246, 1347, 1979
10. М.Л.Тер-Микаэлян. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Из-во АН Арм. ССР. Ереван, 1969
11. А.И.Ахиезер, И.А.Ахиезер, Н.Ф.Шульга. Препринт ХФТИ, 78-17, 1978
12. В.И.Ритус, А.И.Никишов. Труды ФИАН СССР, т.111, 1979

В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко
ЖЭТФ, 69, 783, 1975.

13. М.А.Кумахов Phys. Lett. 57, 17, 1976.

14. М.А.Кумахов. ЖЭТФ 72, 1489, 1977

15. В.В.Белошицкий, М.А.Кумахов ЖЭТФ, 74, 1244, 1978

16. В.Г.Барышевский, И.Я.Дубовская Письма в ЖТФ 3, 500, 1977

17. Н.К.Жеваго. ЖЭТФ, 75, 1389, 1978

18. А.И.Ахиезер, В.Ф.Болдышев, Н.Ф.Шульга ЭЧАЯ, т.10, 51, 1979

Таблица 1.

Кристаллы	δ	N_0	$\frac{k_{\omega p}}{\gamma_{3/2}}$	$\frac{k_{\omega e}}{\gamma_{3/2}}$	$\frac{\Gamma_p}{\gamma^2}$	$\frac{\Gamma_e}{\gamma^2}$	$\varepsilon = 1 \Gamma_{эВ}$			
							$k_{\omega p}$	$k_{\omega e}$	Γ_p	Γ_e
C(d)	1,4	26	65	122	142	19,2	5,6	10,5	55	73
Si(d)	2,5	30	49	101	10,5	15,3	4,3	8,7	40	59
Ni	1,8	47	91	174	51,4	71,1	7,9	15,1	197	272
Ge(d)	3	54	65	142	35,3	55,1	5,6	12,3	135	211
As	2,5	89	113	231	163	239	9,7	20,0	624	915
W	3,8	160	104	255	306	530	9,0	22,1	1172	2029

Параметры статических кристаллов (плоскость (100)) и некоторые характеристики излучения для позитронов (P) при $\varepsilon_1 = N_0$ и электронов (e) при $\varepsilon_1 = N_0/2$. Значения N_0 и $k_{\omega} / \gamma_{3/2}$ приведены в эВ; Γ / γ^2 - в эВ/см. При $\varepsilon = 1 \Gamma_{эВ}$ значения k_{ω} даются в МэВ, а Γ в МэВ/см. Индекс (d) означает решетку типа алмаза.

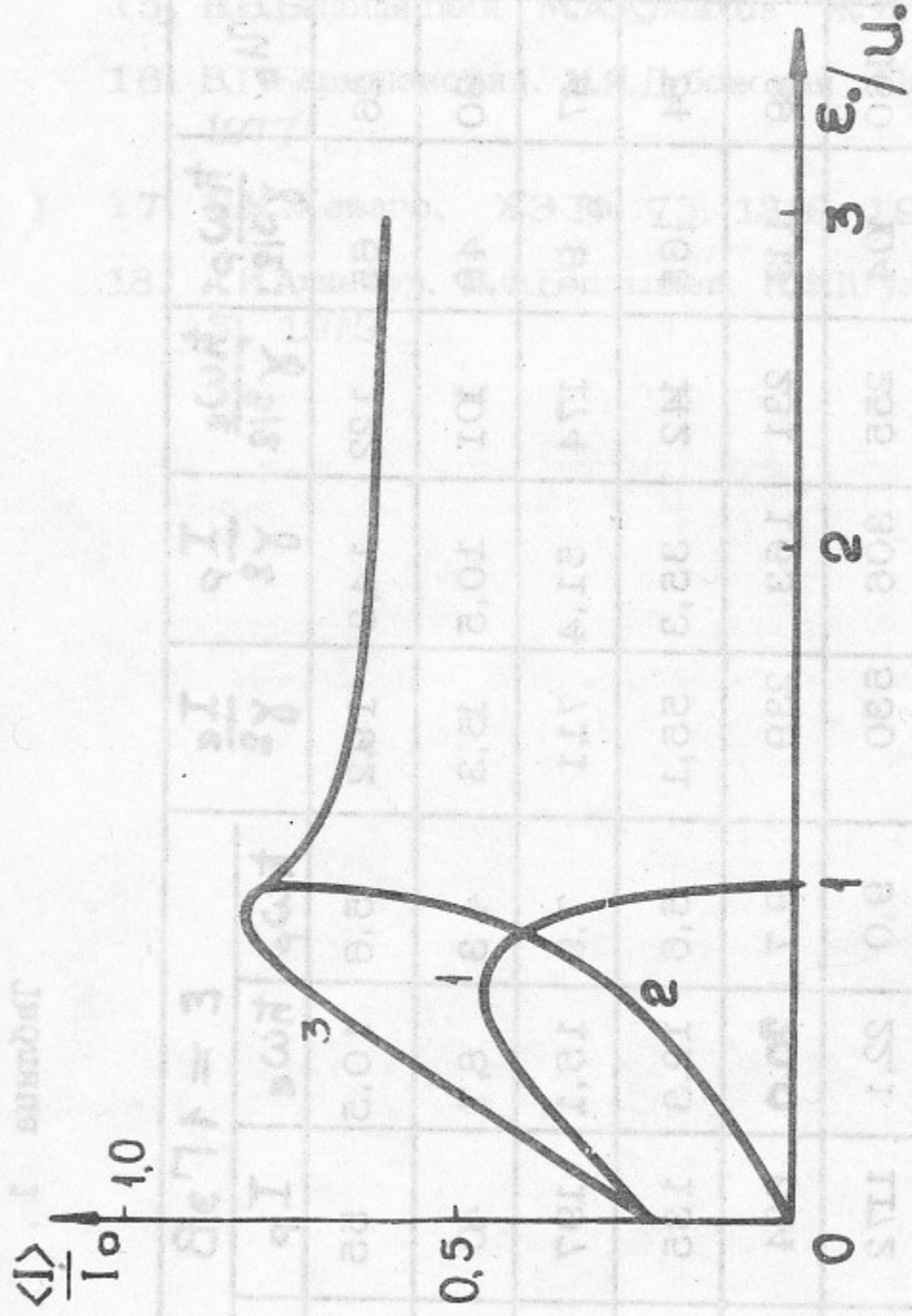


Рис.1. Усредненная по χ_0 интенсивность излучения позитронов $\langle I_c \rangle$ (1), $\langle I_{nc} \rangle$ (2) и суммарный вклад $\langle I \rangle = \langle I_c \rangle + \langle I_{nc} \rangle$ (3) как функция ϵ_0 / u_0 при $\delta = 2,5$.

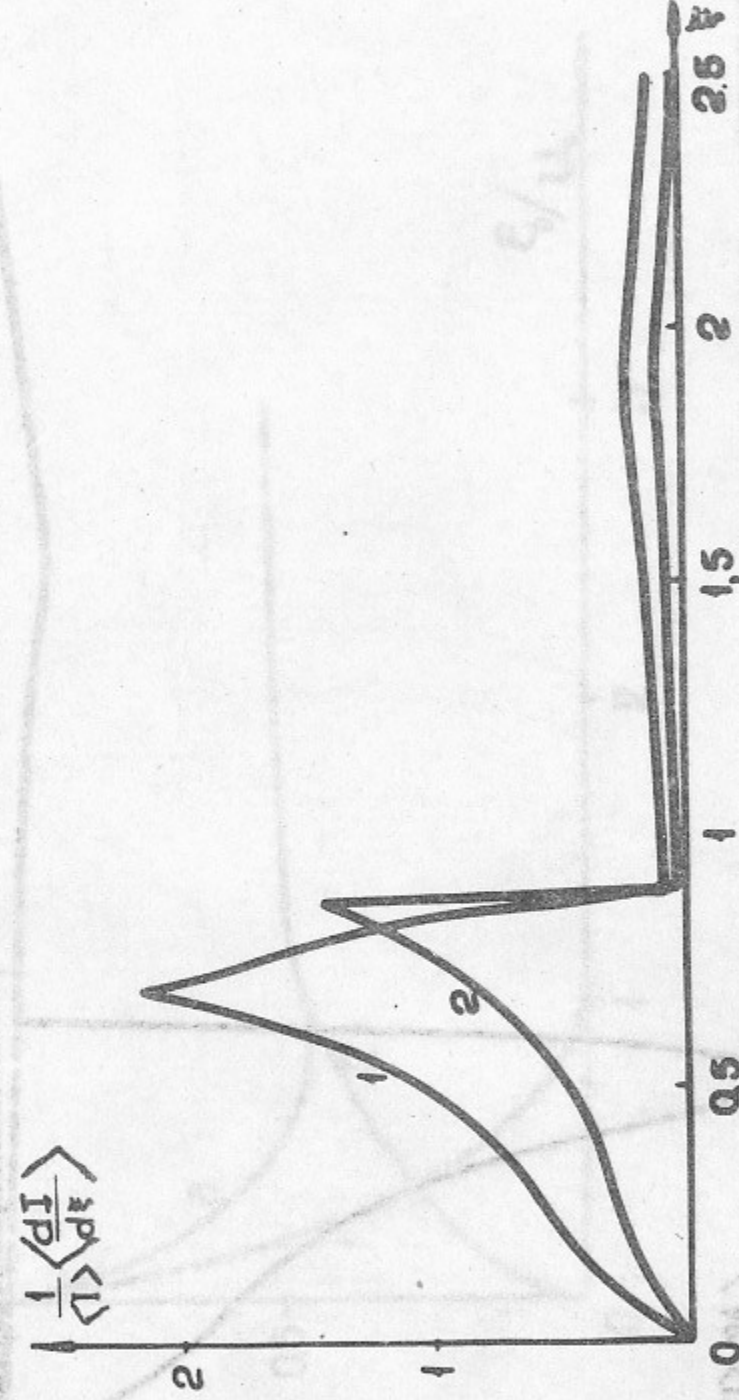


Рис.2. Усредненное по χ_0 спектральное распределение интенсивности излучения позитронов (суммарный вклад) при разных углах влета $\epsilon_0 / u_0 = 0,2(1); \epsilon_0 / u_0 = 0,9(2)$ при $\delta = 2,5$.

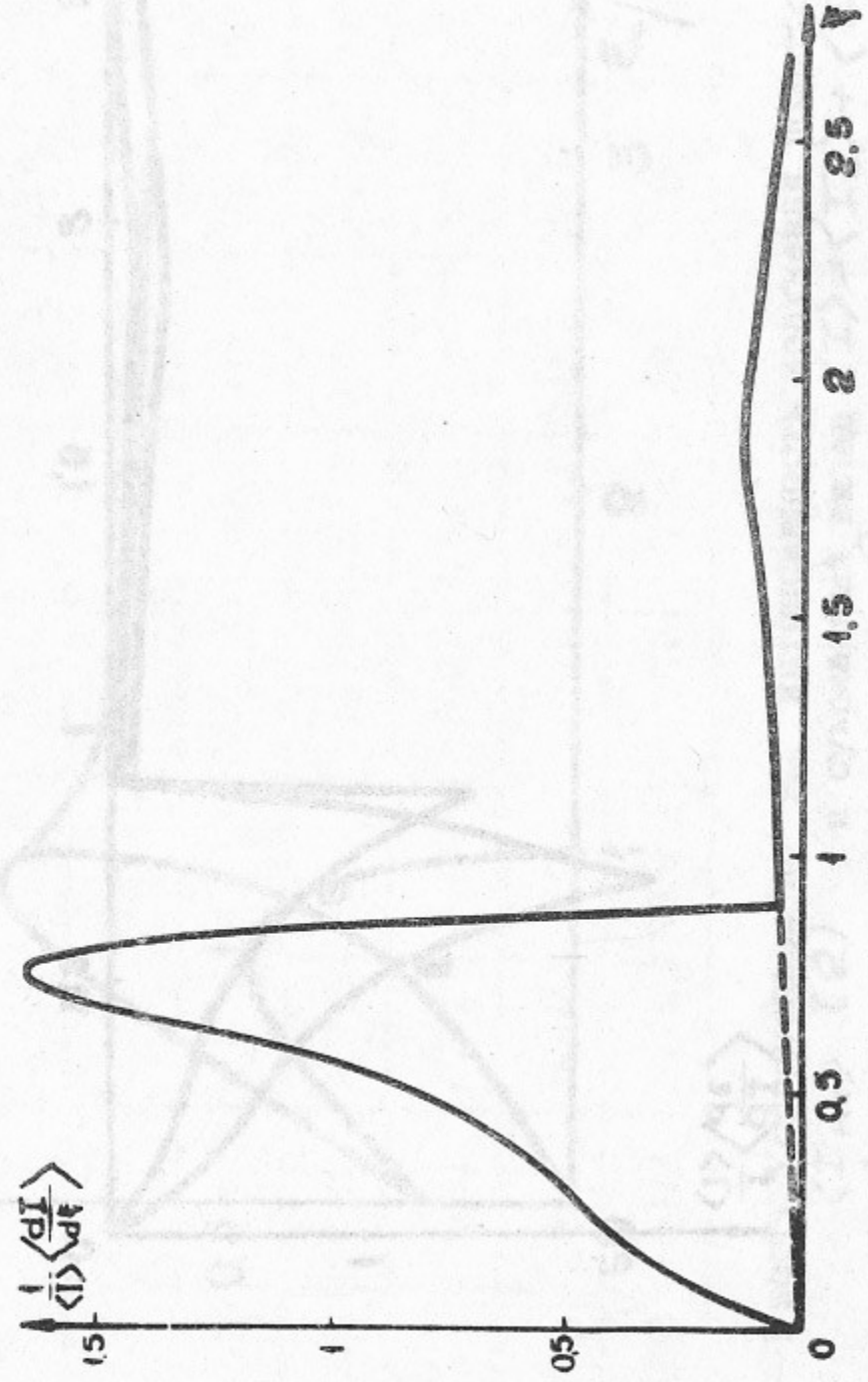


Рис.3. Усредненное по χ_0 и \mathcal{D} спектральное распределение интенсивности излучения позитронов при $\delta = 2,5$.

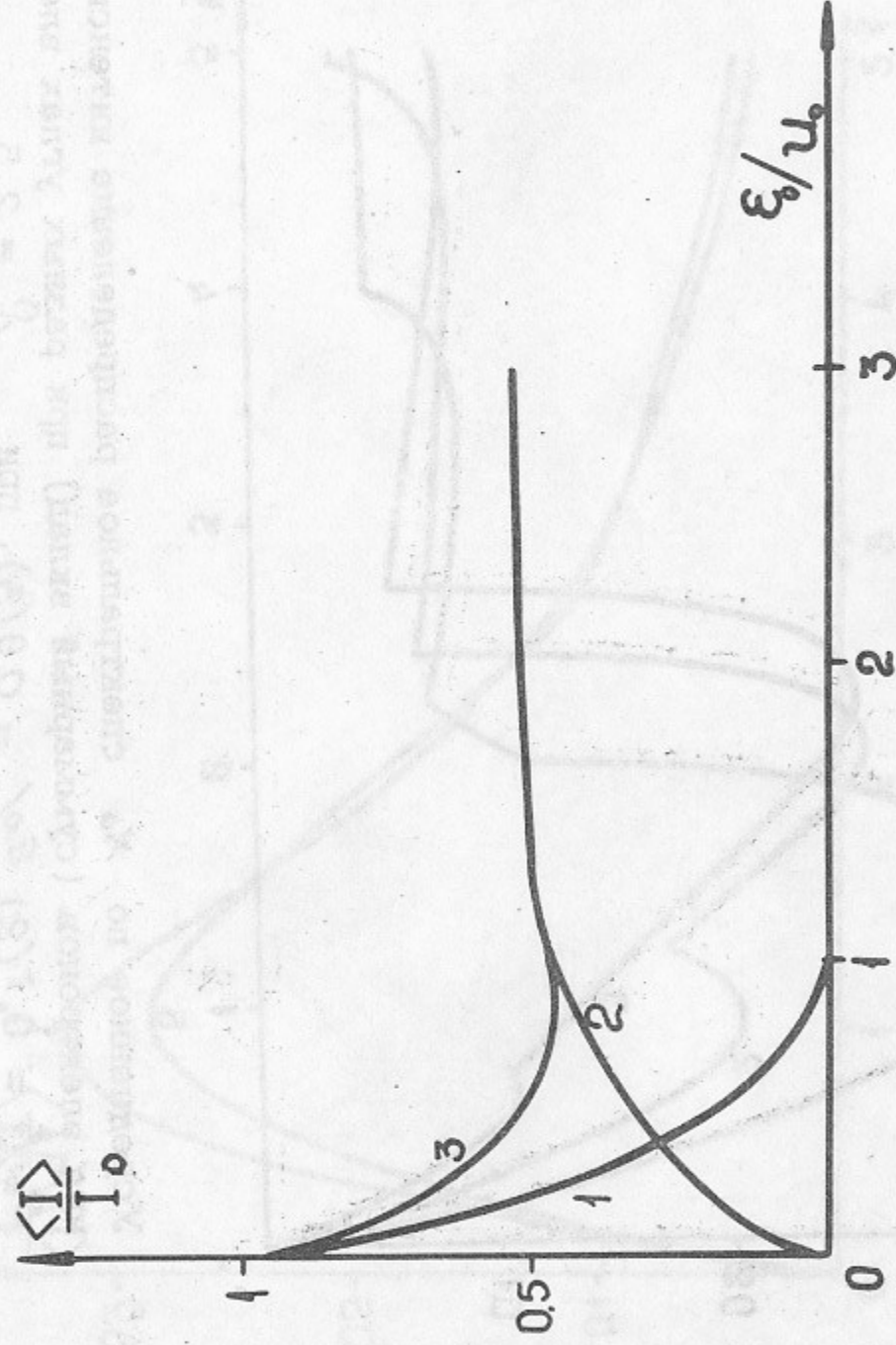


Рис.4. Усредненная по χ_0 интенсивность излучения электронов $\langle I_c \rangle$ (1), $\langle I_{nc} \rangle$ (2) и суммарный вклад $\langle I \rangle = \langle I_c \rangle + \langle I_{nc} \rangle$ (3) как функция E_0 / u_0 , при $\delta = 2,5$.

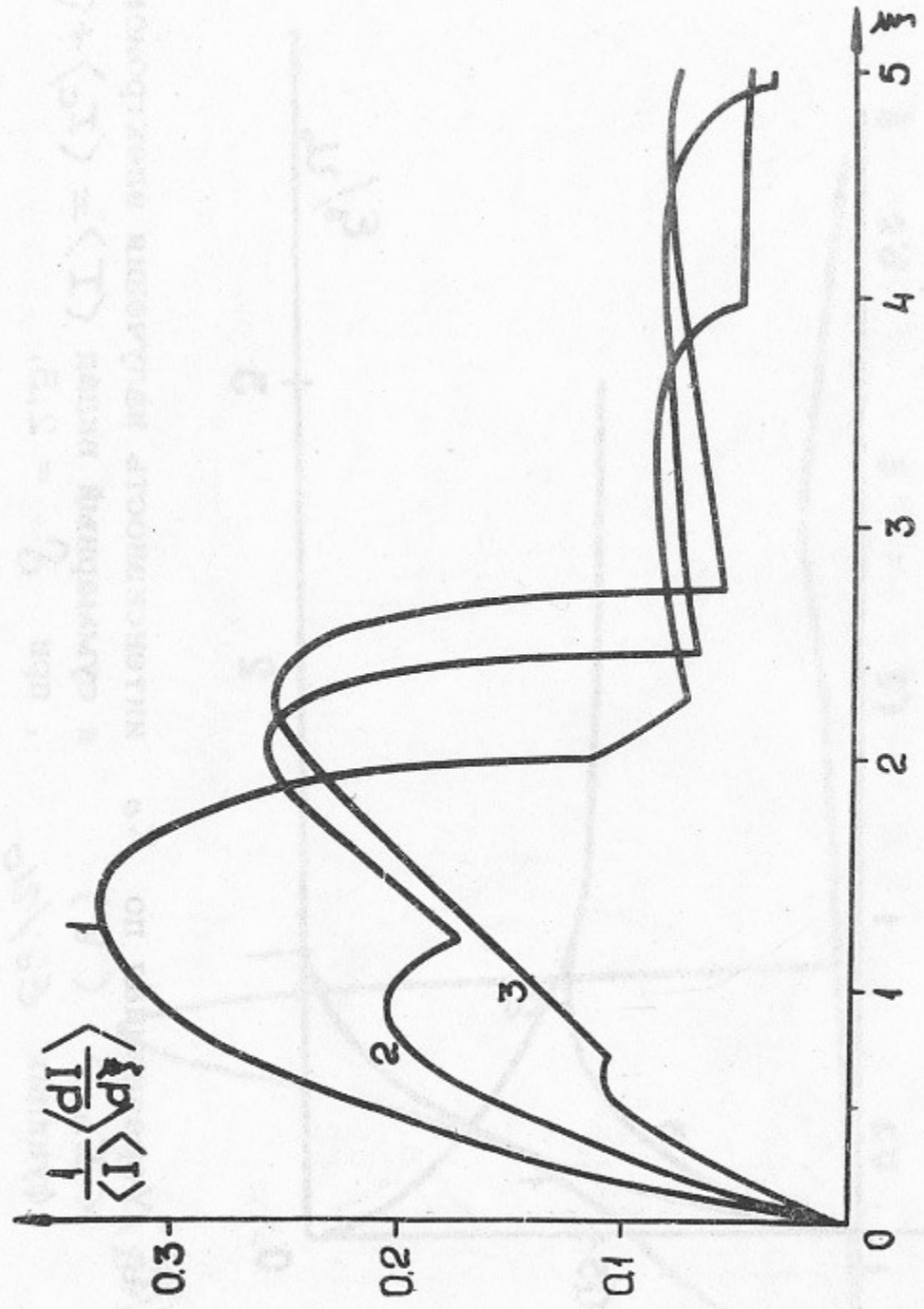


Рис.5. Усредненное по χ_0 спектральное распределение интенсивности излучения электронов (суммарный вклад) при разных углах влета $\epsilon_0/\mu_0 = 0,4(1)$ $\epsilon_0/\mu_0 = 0,7(2)$, $\epsilon_0/\mu_0 = 0,9(3)$, при $\delta = 2,5$.

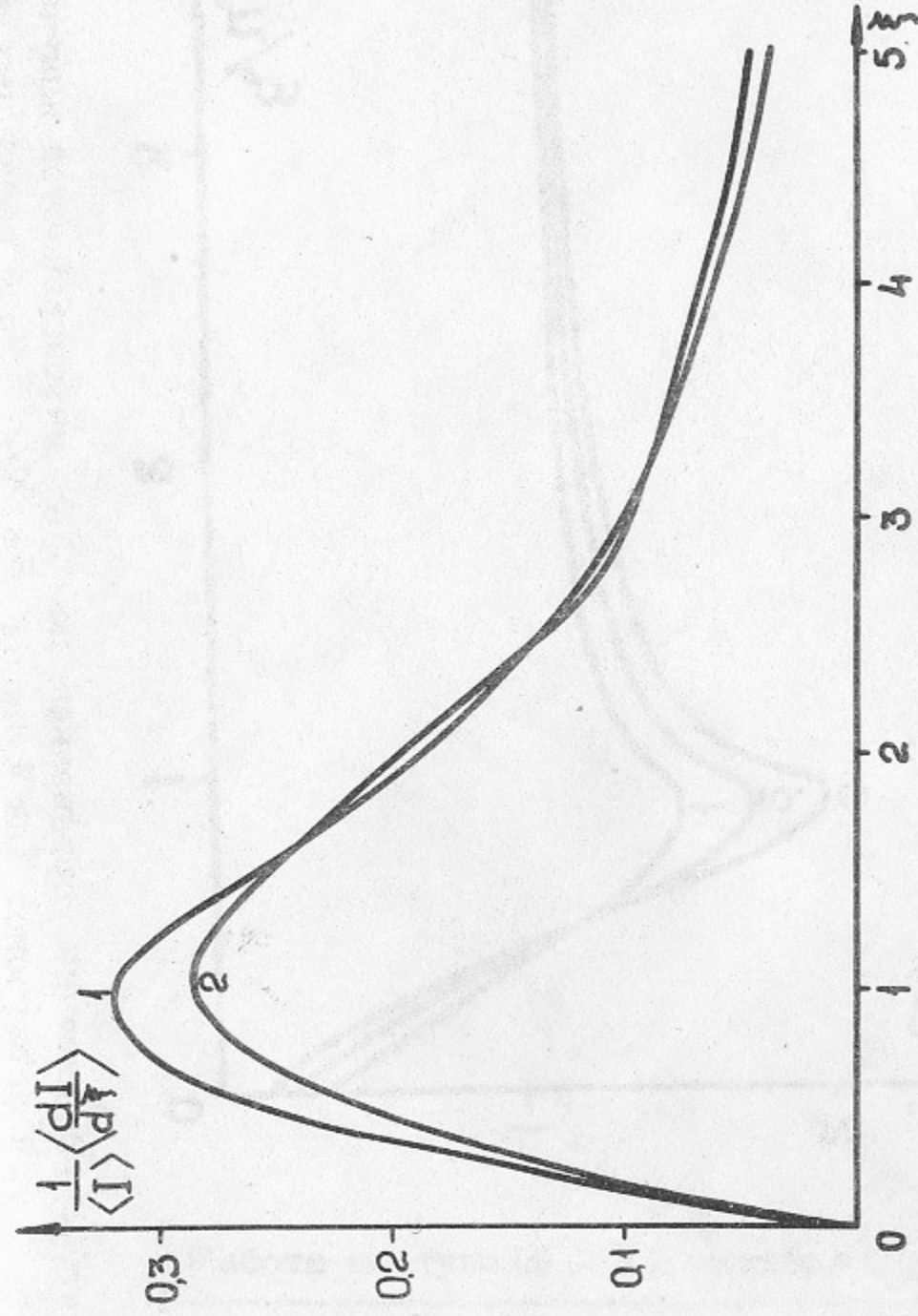


Рис.6. Усредненное по χ_0 и β спектральное распределение интенсивности излучения электронов в канале (1) и суммарный вклад (2), при $\delta = 2,5$.

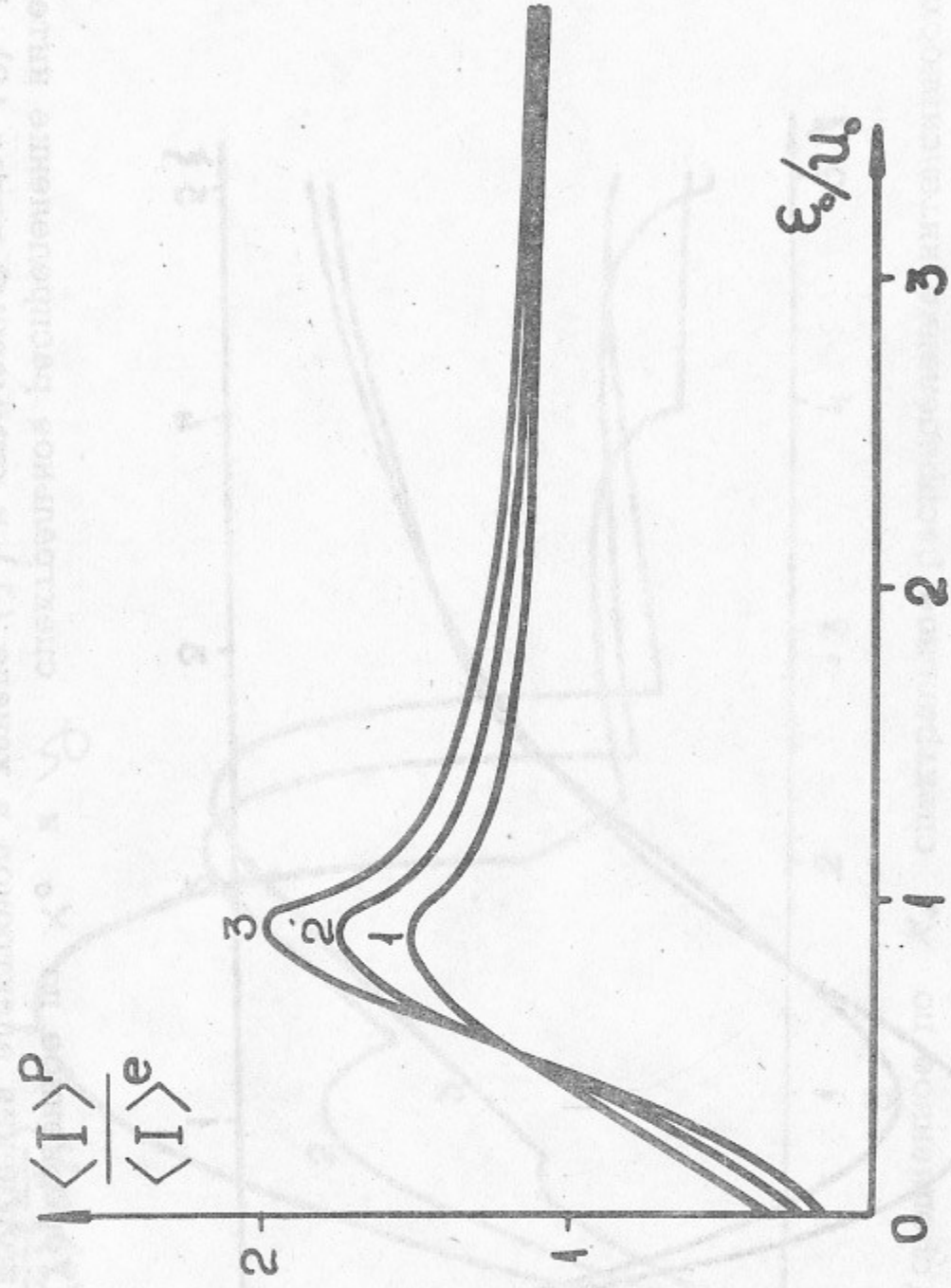


Рис. 7. Отношение усредненных по X_0 интенсивностей излучения позитронов и электронов как функция ξ_0/ω_0 для различных значений параметра δ : $\delta = 0,5$ (1); $\delta = 2,5$ (2); $\delta = 4$ (3).

Работа поступила - 11 декабря 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 7.01.1980 г. МН 06508

Усл. 3,0 печ.л., 2,5 учетно-изд.л.

Тираж 250 экз. Бесплатно

Заказ № 03

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР