

23
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин

ДИНАМИКА МОДУЛЯЦИОННОЙ
НЕУСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОГО
СПЕКТРА ЛЕНГМЮРОВСКИХ
ВОЛН

ПРЕПРИНТ 80-66

Работа поступила - 26 октября 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 29.П-1980г. МН 06654

Усл. 1,5 печ.л., 1,2 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 66

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР



Новосибирск

ДИНАМИКА МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
ШИРОКОГО СПЕКТРА ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена модуляционная неустойчивость спектра ленгмюровской турбулентности, в котором групповые скорости волн велики по сравнению со скоростью ионного звука. Получено дисперсионное уравнение, позволяющее определить порог и инкремент неустойчивости при произвольном соотношении между пространственным масштабом модуляции и характерной длиной волны ленгмюровских колебаний. Выведено и решено методом обратной задачи рассеяния уравнение, описывающее нелинейную стадию неустойчивости одномерных длинноволновых возмущений при малой надпороговости. Установлено, что переход неустойчивости в нелинейный режим качественно подобен жесткому возбуждению турбулентности в гидродинамике.

DYNAMICS OF THE MODULATIONAL INSTABILITY
OF BROAD SPECTRUM OF LANGMUIR WAVES

B.N.Breizman, V.M.Malkin

A B S T R A C T

The modulational instability of Langmuir turbulence is considered for the case in which the group velocities of Langmuir waves are much larger than the sound velocity. The linear theory developed earlier for large scale perturbations by Vedenov and Rudakov is extended to the case in which the perturbations are of arbitrary spatial scale.

A nonlinear equation is derived that describes the one-dimensional evolution of the instability when the energy density of Langmuir waves is close to the threshold value. This equation is solved using the inverse scattering transformation. It is shown that the instability can not be saturated at the low level of density perturbations. It develops until considerable part of Langmuir oscillations becomes trapped in soliton-like potential wells formed by growing density fluctuations.

1. Введение

Настоящая работа посвящена нелинейной стадии одномерной модуляционной неустойчивости спектра ленгмюровских волн со случайными фазами [1,2]. Специфика одномерной задачи состоит в том, что здесь исключена возможность ленгмюровского коллапса, т.е. нелинейные эффекты обязательно приводят к стабилизации роста модуляционных возмущений (см. [3]). В зависимости от того, как ведет себя амплитуда нелинейных колебаний при переходе через порог неустойчивости, можно различать два режима стабилизации: мягкий и жесткий. В первом случае амплитуда при небольшом превышении над порогом оказывается малой, а во втором она достигает конечной величины при сколь угодно малой надпороговости. Вопрос о том, какой из этих двух режимов реализуется в случае модуляционной неустойчивости, до недавнего времени оставался неясным. Ответ на него содержится в данной работе: если порог неустойчивости соответствует длинноволновым возмущениям, то режим является жестким. Этот вывод основан на результатах, изложенных в разделе 3, где получено и решено нелинейное уравнение, описывающее эволюцию длинноволновых модуляционных возмущений малой амплитуды (см. уравнение (19)). Из построенных решений следует, в частности, что неустойчивость развивается до тех пор, пока заметная часть ленгмюровских волн не оказывается захваченной в потенциальные ямы, образованные неоднородностями плотности плазмы.

Постановка интересующей нас нелинейной задачи требует, как будет видно из дальнейшего, предварительного усовершенствования линейной теории модуляционной неустой-

чивости. Мы сделаем это в разделе 2. Принципиальным элементом здесь будет обобщение результатов, полученных ранее в длинноволновом пределе Ведыным и Рудаковым [1], на случай модуляционных возмущений с произвольной длиной волны.

2. Линейное приближение

2.1. Вывод дисперсионного соотношения

В работе [1], положившей начало исследованию модуляционной неустойчивости ленгмюровских колебаний, Ведынов и Рудаков, основываясь на кинетическом уравнении для плазмонов

$$\frac{\partial N}{\partial t} + 3 \omega_p r_d^2 \vec{k} \frac{\partial N}{\partial \vec{r}} - (\omega_p / 2n_0) \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \frac{\partial N}{\partial \vec{k}} = 0 \quad (1)$$

и уравнении для звуковых волн с учетом высокочастотной силы [4]

$$n_{tt} - c_s^2 \Delta n = (\omega_p / 2M) \Delta f N d \vec{k}, \quad (2)$$

показали, что при достаточно высоком уровне ленгмюровской турбулентности в плазме начинают самопроизвольно расти возмущения плотности. Из результатов работы [1] следует, что инкремент этой неустойчивости увеличивается с уменьшением длины волны возмущения. Между тем уравнение (1), при выводе которого используется приближение геометрической оптики для плазмонов, не позволяет проанализировать возмущения с малыми пространственными масштабами. Поэтому для вычисления максимального инкремента (равно как и для определения порога неустойчивости) необходимо перейти к более точному описанию ленгмюровских волн. Здесь естественно воспользоваться усредненными по "быстрому" времени уравнениями для амплитуды высокочастотного электрического поля \vec{E} и возмущения плотности плазмы n (см. [5,6]):

$$i \vec{E}_t + \frac{3}{2} \omega_p r_d^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega_p} \left[\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \vec{E}] \right] =$$

$$= (\omega_p / 2n_0) n \vec{E} \quad (3)$$

$$n_{tt} - c_s^2 \Delta n = (16 \pi M)^{-1} \Delta |\vec{E}|^2 \quad (4)$$

Система (3), (4) и сходные с ней системы применялись ранее [5-7] для исследования устойчивости монохроматических волн. Каждая такая волна представляет собой стационарное состояние с $n = 0$, но суперпозиция волн этим свойством уже не обладает, т.к. высокочастотная сила содержит интерференционные члены. Поскольку исходное состояние в виде набора волн нестационарно, сама постановка задачи о его устойчивости нуждается в уточнении. Если, однако, спектр достаточно широк, то его перестройка за счет интерференционного вклада в высокочастотную силу происходит относительно медленно. Соответствующее характерное время равно времени распадного процесса с участием высокочастотных волн и ионного звука τ . При исследовании более быстрых неустойчивостей (а именно они будут нас интересовать) нестационарностью исходного спектра можно пренебречь. Таким образом, нижняя граница для инкремента неустойчивости γ , начиная с которой будут справедливы наши результаты, задается следующим неравенством:

$$\gamma \tau \gg 1 \quad (5)$$

Заметим, что для обсуждаемых ниже спектров турбулентности

$$\tau = (nT / \omega_p W) (M/m) k_0^2 r_d^2,$$

где W — плотность энергии, а k_0 — характерное значение волнового числа ленгмюровских колебаний (см.,

например, [8], стр. 104).

Ограничение на инкремент γ сверху связано с требованием случайности фаз высокочастотных волн. Мы будем считать, что случайны начальные фазы и, кроме того, что время фазового перемешивания, равное по порядку величины $(\delta\omega)^{-1}$, где $\delta\omega$ — ширина спектра, мало по сравнению со временем развития модуляционной неустойчивости, т.е.

$$\gamma \ll \delta\omega \quad (6)$$

Учитывая сделанные замечания, можно заменить высокочастотную силу в уравнении (4) ее усредненным по фазам волн значением. Тогда система (3), (4) будет иметь стационарные решения, в которых $\mathbf{n} = 0$, а электрическое поле представляет собой произвольный набор ленгмюровских и электромагнитных волн. Рассмотрим теперь возмущение плотности ионов

$$\mathbf{n} \sim \cos(\mathbf{q}\mathbf{r} - \Omega t)$$

и найдем из уравнения (3) связанную с этим возмущением поправку к электрическому полю. Подставляя поправку в линеаризованную правую часть уравнения (4) и проводя усреднение по фазам невозмущенного поля, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 + (q^2 \omega_p^2 / 4Mn_0) \sum_{\lambda, \lambda'} \int d\mathbf{k} |\vec{S}_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \vec{S}_{\lambda'}^*(\mathbf{k})|^2 \times [N_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - N_{\lambda'}(\mathbf{k})] / [\omega_\lambda(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}) - \Omega - i0] \quad (7)$$

Здесь $\omega_\lambda(\mathbf{k})$ — разность между частотой волны и плазменной частотой ω_p ; $N_\lambda(\mathbf{k})$ — спектральная плотность волн ветви λ , нормированная условием:

$$\int N_\lambda(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = W_\lambda / \omega_p,$$

где W_λ — плотность энергии волн; через $\vec{S}_\lambda(\mathbf{k})$ обозна-

чен вектор поляризации волны. Индекс λ в формуле (7) пробегает три значения, причем*

$$\omega_1 = \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_d^2 \quad \vec{S}_1 = \mathbf{k}/k$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{2} k^2 c^2 / \omega_p \quad \vec{S}_{2,3} \perp \mathbf{k}$$

Отметим, что уравнение (7) допускает простое обобщение на случай плазмы, находящейся в слабом внешнем магнитном поле ($\omega_{He} \ll \omega_p$). При наличии поля необходимо лишь соответствующим образом "подправить" законы дисперсии ω_λ и векторы поляризации \vec{S}_λ , а также учесть влияние поля на движение ионов, для чего надлежит домножить левую часть (7) на следующую дробь (см. [9]):

$$(\Omega^2 - \omega_{H1}^2) / [\Omega^2 - \omega_{H1}^2 (\vec{qH}/qH)^2]$$

Полученное уравнение обобщает дисперсионное соотношение Веденова и Рудакова [1,2] на случай коротковолновых возмущений и произвольных законов дисперсии высокочастотных волн. Одновременно оно правильно описывает модуляционную неустойчивость монохроматической волны, в чем легко убедиться, положив $N_\lambda(\mathbf{k}) \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ и сравнив результат с дисперсионными соотношениями, приведенными в работах [5,6].

2.2. Неустойчивость спектра ленгмюровской турбулентности

Подробное исследование уравнения (7) будет проделано

* Из-за вырожденности закона дисперсии электромагнитных волн эти волны, строго говоря, следовало бы характеризовать не векторами \vec{S}_2 и \vec{S}_3 , а поляризационным тензором. Вводя здесь векторы \vec{S}_2 и \vec{S}_3 , мы фактически подразумеваем, что имеется какое-либо малое возмущение, приводящее к снятию вырождения.

но отдельно. Здесь же мы ограничимся лишь теми сведениями, которые относятся к ленгмюровской турбулентности в плазме без магнитного поля. Мы проанализируем устойчивость спектра ленгмюровских волн, ширина которого Δk по порядку величины равна характерному значению волнового числа k_0 . Спектральную функцию $N(\vec{k})$ для простоты будем считать четной, а относительно k_0 предположим, что

$$k_0 r_d \gg (m/M)^{1/2} \quad (8)$$

(это неравенство означает, что групповая скорость плазмонов намного больше скорости звука).

Обратимся прежде всего к длинноволновым возмущениям с $q \ll k_0$. Порог неустойчивости для них, согласно работам [1,2], лежит при $W/nT \sim k_0^2 r_d^2$. Если превышение над порогом не слишком велико, так что

$$W/nT \ll (M/m) k_0^4 r_d^4, \quad (9)$$

то неустойчивость, как можно показать, развивается адиабатически медленно: за время, равное ее обратному инкременту, плазмоны, двигаясь с групповой скоростью, пройдут расстояние, существенно превышающее длину волны возмущения. Это обстоятельство позволяет пренебречь в правой части уравнения (7) величиной Ω . Воспользуемся, далее, малостью отношения q/k_0 и разложим правую часть (7) в ряд с точностью до членов порядка $(q/k_0)^4$. В результате получим:

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 \left[1 + (I_1 W / 12 n T k_0^2 r_d^2) + (q^2 / k_0^2) \cdot (I_2 W / 12 n T k_0^2 r_d^2) \right], \quad (10)$$

где

$$I_1 = (\omega_p k_0^2 / W) \int d\vec{k} (\vec{k} \vec{n})^{-1} \left[\vec{n} \frac{\partial N}{\partial \vec{k}} \right]$$

$$I_2 = (\omega_p k_0^4 / W) \int d\vec{k} (\vec{k} \vec{n})^{-1} \left\{ \frac{1}{24} n_\alpha n_\beta n_\gamma \frac{\partial^3 N}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma} + \left[(\vec{k} \vec{n} / k^2)^2 - k^{-2} \right] n_\alpha \frac{\partial N}{\partial k_\alpha} \right\}$$

$$n_\alpha = q_\alpha / q$$

Безразмерные функции I_1 и I_2 в формуле (10) введены таким образом, чтобы их характерные значения были по модулю порядка единицы. В зависимости от формы спектра ленгмюровских колебаний и направления вектора \vec{q} эти функции могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Рассмотрим подробнее пороговый режим неустойчивости, подразумевая, что наиболее низкий порог соответствует возмущениям с $q \rightarrow 0$ (именно такая ситуация будет обсуждаться в разделе 3 при решении нелинейной задачи). В этом случае минимальное по \vec{n} значение I_1 отрицательно, а величина I_2 для соответствующего \vec{n} положительна. Выполнение условий $I_1 < 0$, $I_2 > 0$, вообще говоря, не гарантирует того, что на пороге будут расти именно длинноволновые возмущения (эти условия являются лишь необходимыми). Нетрудно, однако, построить многочисленные примеры спектров, для которых выполнены и достаточные условия.

Обозначив через ϵ относительное превышение энергии ленгмюровских колебаний над порогом, можно переписать формулу (10) следующим образом:

$$\Omega^2 = q^2 c_s^2 \left\{ -\epsilon + [I_1 - I_1(\vec{n}_0)] / I_1(\vec{n}_0) + q^2 / (\alpha k_0)^2 \right\}, \quad (11)$$

где

$$I_1(\vec{n}_0) \equiv \min_{\vec{n}} I_1(\vec{n}); \quad \alpha = |I_1(\vec{n}_0) / I_2(\vec{n}_0)|^{1/2}$$

Отсюда видно, что максимум инкремента достигается при $q = \alpha k_0 (\epsilon / 2)^{1/2} \ll k_0$ и равен $k_0 c_s \epsilon \alpha / 2$,

а область неустойчивости по q простирается от $q=0$ до $q = \alpha k_0 \varepsilon^{1/2}$ (см. рис. 1)

Для ряда спектров турбулентности пороговое значение q оказывается отличным от нуля и равным по порядку величины k_0 (так обстоит дело, в частности, для тех спектров, у которых $I_1(\vec{n}) > 0$ или $I_2(\vec{n}) < 0$). В этом случае правую часть уравнения (7) удобно разложить в окрестности наиболее "неустойчивого" значения \vec{q} , которое мы обозначим через \vec{q}_0 . В результате получим:

$$\Omega^2 = q_0^2 c_s^2 [-\varepsilon + A_{\alpha\beta} (q_\alpha - q_{0\alpha})(q_\beta - q_{0\beta}) / k_0^2], \quad (12)$$

где $A_{\alpha\beta}$ — коэффициенты порядка единицы, зависящие от формы спектра турбулентности. По смыслу разложения (12) матрица $A_{\alpha\beta}$ является положительно определенной. Ширина неустойчивой зоны по $\vec{q} - \vec{q}_0$ в данном случае оценочно остается такой же, как и при длинноволновой неустойчивости, но максимальный инкремент теперь пропорционален не ε , а $\varepsilon^{1/2}$.

Формулы (11) и (12), соответствующие малой надпороговости, пригодны вплоть до $\varepsilon \sim 1$. На пределе их применимости ($W/nT \sim k_0^2 r_d^2$) максимум инкремента достигается при $q \sim k_0$ и дается оценкой

$$\gamma_{\max} \sim \omega_p (W/nT)^{1/2} (m/M)^{1/2} \quad (13)$$

По мере увеличения W область неустойчивости охватывает все большие значения q . Так, при $W/nT \gg k_0^2 r_d^2$ становятся неустойчивыми возмущения с $q \gg k_0$. Для этих возмущений дисперсионное соотношение (7) можно существенно упростить:

$$(\Omega^2 - q^2 c_s^2) [\Omega^2 - \omega_1^2(q)] = \mu q^2 c_s^2 \omega_p \omega_1(q) W / 2nT \quad (14)$$

$$\mu = (\omega_p / W) \int (\vec{k} \vec{q} / k q)^2 N(\vec{k}) d\vec{k}$$

Заметим, что эта формула, но с другим значением μ ($\mu = 1$), верна и в случае $q \ll k_0, |\Omega/q| \gg \omega_p k_0 r_d^2$. В этом случае она описывает неустойчивость холодного газа плазмонов, обнаруженную в работе [1].

Дисперсионное уравнение (14) позволяет определить верхнюю границу области неустойчивости q_* :

$$q_*^2 = (1/3) r_d^2 \max_{\vec{n}} (\omega_p / nT) \int (\vec{k} \vec{n} / k)^2 N d\vec{k}$$

Кроме того, из него следует, что вплоть до $W/nT \sim (M/m) k_0^4 r_d^4$ максимальное значение инкремента достигается при $q \sim k_0$ и по-прежнему дается оценкой (13).

В области $W/nT \gg (M/m) k_0^4 r_d^4$ нарушается условие перемешивания фаз (6) и постановка задачи об устойчивости спектра требует уточнения. Обсуждение этого предельного случая выходит за рамки данной работы.

3. Нелинейная стадия неустойчивости

3.1. Основное уравнение

В этом разделе мы обратимся к вопросу о возможности стабилизации модуляционной неустойчивости за счет малой нелинейности. Как уже было отмечено, речь пойдет о такой ситуации, когда превышение над порогом неустойчивости мало ($\varepsilon \ll 1$) и порог соответствует возмущениям с $q \rightarrow 0$ (см. рис. 1). Мы ограничимся здесь обсуждениями только одномерных возмущений. Однако нелинейное уравнение для плотности ионов, которое будет при этом получено (см. формулу (19)), нетрудно обобщить и на трехмерный случай. Чтобы вывести интересующее нас уравнение, вернемся к дисперсионному соотношению (11). Домножив обе его части на $n(q, \Omega)$ и выполнив обратное преобразование Фурье, получим:

$$n_{tt} + \varepsilon c_s^2 n_{xx} + (c_s^2 / \alpha^2 k_0^2) n_{xxxx} = 0, \quad (15)$$

где координата \mathbf{x} отсчитывается в направлении, соответствующем максимуму инкремента. Сравнение формулы (15) с исходным уравнением для n (см. (4)) показывает, что в линейной задаче роль высокочастотной силы сводится к перенормировке скорости звука и добавлению дисперсии. Дисперсия в данном случае обусловлена малыми поправками порядка $(\alpha/k_0)^2$. Поэтому при вычислении нелинейной добавки к высокочастотной силе ею можно пренебречь. Это позволяет определить искомую добавку с помощью уравнения (1). Поскольку неустойчивость развивается адиабатически медленно, распределение плазмонов успевает "подстраиваться" под возмущения плотности плазмы. При этом линейная по n добавка к спектральной функции плазмонов $N(\mathbf{k})$ дает в высокочастотную силу вклад, приводящий к уравнению (15) с нулевой дисперсией. Квадратичная же добавка к $N(\mathbf{k})$ имеет вид:

$$\delta N(\mathbf{k}) = \frac{1}{36n_0^2 r_d^2} (n^2 - \langle n \rangle^2) \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial k_x} \frac{1}{k_x} \frac{\partial N}{\partial k_x}, \quad (16)$$

где N — невозмущенная спектральная функция, а угловые скобки означают усреднение по пространству. Разложение здесь ведется по параметру $n/(n_0 k_0^2 r_d^2)$, малость которого означает малость числа "запертых" плазмонов по сравнению с числом пролетных. Для того, чтобы наличие запертых плазмонов не препятствовало использованию теории возмущений, исходный спектр $N(\mathbf{k})$ в области малых волновых чисел должен быть достаточно гладким.

Учет квадратичной по n поправки к спектральной функции плазмонов приводит к замене правой части уравнения (15) на величину

$$(\omega_p/2M) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \delta N(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

В результате имеем:

$$n_{tt} + \epsilon c_s^2 n_{xx} + (c_s^2/\alpha^2 k_0^2) n_{xxxx} = (I_3 c_s^2/n_0 k_0^2 r_d^2) (n^2)_{xx}, \quad (17)$$

где

$$I_3 = (\omega_p k_0^2 / 72 n T r_d^2) \int d\mathbf{k} \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial k_x} \frac{1}{k_x} \frac{\partial N}{\partial k_x} \quad (18)$$

Интеграл I_3 оценочно равен $W/nTk_0^2 r_d^2$; при пороговом значении W он представляет собой число порядка единицы. В зависимости от вида спектра это число может быть как положительным, так и отрицательным, но в одномерной задаче $I_3 > 0$, поскольку в этом случае

$$I_3 = I_2 W / 6 n T k_0^2 r_d^2$$

В уравнении (17) удобно перейти к безразмерным переменным, сделав замены:

$$x \rightarrow (2/\alpha k_0 \epsilon^{1/2}) x$$

$$t \rightarrow (2/\alpha k_0 c_s \epsilon) t$$

$$n \rightarrow (3\epsilon n_0 k_0^2 r_d^2 / 4 I_3) u$$

В новых переменных это уравнение принимает следующий вид:

$$u_{tt} + u_{xx} + \frac{1}{4} u_{xxxx} = \frac{3}{4} (u^2)_{xx} \quad (19)$$

Для справки приведем здесь же трехмерные аналоги уравнения (19). Если исходный спектр ленгмюровских волн изотропен, то вторые производные по \mathbf{x} следует заменить операторами Лапласа:

$$u_{tt} + \Delta u + \frac{1}{4} \Delta \Delta u = \frac{3}{4} \Delta (u^2)$$

В случае же анизотропного спектра с анизотропией порядка единицы имеем:

$$u_{tt} + u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} + \frac{1}{4} u_{xxxx} = \frac{3}{4} (u^2)_{xx},$$

где координата x (так же, как и в уравнении (19)) соответствует "неустойчивому" направлению. В последнем уравнении единицы измерения длины в направлениях x , y и z различны. Подчеркнем, что уравнение (19) не содержит малого параметра ϵ . Поэтому ограниченность во времени всех его решений, отвечающих малым начальным возмущениям, означала бы, что имеет место мягкий режим насыщения неустойчивости. Напротив, при наличии неограниченно растущих решений должен осуществляться жесткий режим.

3.2. Эволюция неустойчивых возмущений

Уравнение (19) относится к числу нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. Его интегрируемость была установлена в работе [10], однако сами решения при этом получены не были. Чтобы построить их, мы, следуя схеме Шабата [10,11], введем вспомогательное интегральное уравнение

$$K(x, y, t) = F(x, y, t) + \int_x^\infty K(k, s, t) F(s, y, t) ds, \quad (20)$$

которое в сокращенной записи имеет вид

$$K = F + K * F$$

и рассмотрим пару дифференциальных операторов

$$D_1 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial}{\partial t}$$

Каждому из операторов D_i ($i = 1, 2$) соответствует "одетый" оператор \tilde{D}_i , определенный таким образом, что

$$\tilde{D}_i K = D_i F + \tilde{D}_i K * F + K * D_i F \quad (21)$$

Операторы \tilde{D}_i задаются следующими формулами [10]:

$$\tilde{D}_1 = D_1 - \frac{3}{4} \left[u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} u \right] + \frac{3}{2} w$$

$$\tilde{D}_2 = D_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} u,$$

$$\text{где } u = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t)$$

$$w = \frac{d}{dx} \left\{ K^2(x, x, t) + \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial y} K(x, y, t) \right]_{y=x} \right\} \quad (22)$$

Соотношение (21) показывает, что при соответствующих ограничениях на функции K и F уравнения

$$D_1 F = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{D}_2 K = 0$$

эквивалентны друг другу. Следовательно, если F удовлетворяет двум уравнениям:

$$D_1 F = 0; \quad D_2 F = 0, \quad (23)$$

которые заведомо совместны, то K будет решением системы

$$\tilde{D}_1 K = 0; \quad \tilde{D}_2 K = 0 \quad (24)$$

Условие совместности этой системы сводится к уравнению (19). Таким образом, каждое решение интегрального уравнения (20) с ядром F , удовлетворяющим условиям (23), порождает некоторое решение уравнения (19).

В рассматриваемой задаче физически наиболее интересны те решения уравнения (19), которые в начальный

момент представляют собой совокупность неустойчивых синусоидальных волн малой амплитуды. Построению таких решений препятствуют как обычные трудности исследования задачи с начальными условиями, так и то обстоятельство, что схема Шабата в стандартной ее форме позволяет отыскивать лишь убывающие при $x \rightarrow +\infty$ (либо при $x \rightarrow -\infty$) решения. В данном случае, однако, эти трудности удается обойти: искомые решения, как мы покажем, получаются путем предельного перехода из решений, соответствующих вырожденному ядру F , убывающему при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим вырожденное ядро

$$F(x, y, t) = \sum_n f_n(x, t) \varphi_n(y, t) \quad (25)$$

Подставив его в уравнения (23), найдем функции f_n и φ_n

$$f_n = a_n \exp(ik_{nx}x + \frac{\sqrt{3}}{2} k_{nx}^2 t + i\theta_n) \quad (26)$$

$$\varphi_n = \exp(ik_{ny}y - \frac{\sqrt{3}}{2} k_{ny}^2 t)$$

Здесь a_n и θ_n — произвольные вещественные постоянные; k_{nx} и k_{ny} — комплексные числа, связанные соотношением:

$$k_{nx}^2 - k_{nx} k_{ny} + k_{ny}^2 = 1 \quad (27)$$

Относительно k_{nx} и k_{ny} дополнительно предполагается, что

$$\text{Im } k_{nx} > 0 ; \quad \text{Im } k_{ny} > 0 \quad (28)$$

Ядро F в дальнейшем считается составленным из пар комплексно сопряженных слагаемых $f \cdot \varphi + f^* \varphi^*$, так что оно автоматически оказывается вещественным.

Для ядра (25) решение интегрального уравнения (20) записывается в следующем виде:

$$K(x, y, t) = \sum_n \psi_n(x, t) \varphi_n(y, t),$$

где функции ψ_n определяются из системы линейных алге-

браических уравнений:

$$\sum_m A_{nm} \psi_m = f_n \quad (29)$$

$$A_{nm} \equiv \delta_{nm} - \int_x^\infty f_n(s, t) \varphi_m(s, t) ds$$

Решив эту систему и воспользовавшись затем соотношением (22), можно получить следующее выражение для $u(x, t)$ (см., например, [12])

$$u = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Lambda, \quad (30)$$

где $\Lambda = \det A_{nm} \quad (31)$

В области своей регулярности функция $u(x, t)$, определенная формулами (30) и (31), с необходимостью удовлетворяет уравнению (19).

Устремим теперь мнимые части чисел k_{nx} и k_{ny} к нулю, считая дополнительно, что ни одна из величин $k_{nx} + k_{ny}$ в нуль не обращается. Функция Λ , которая получается в результате такого предельного перехода, оказывается регулярной на всей оси x и не убывающей при $x \rightarrow \pm \infty$. В простейшем случае, когда сумма (25) состоит из двух комплексно сопряженных слагаемых, Λ задается следующей формулой:

$$\Lambda = [p(t) - \cos(kx + \theta)] \frac{2a}{k} \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2} k\chi t\right] \quad (32)$$

где

$$p \equiv \frac{k}{2a} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} k\chi t\right] + \frac{a}{2k} \left[1 - \left(\frac{k}{\chi}\right)^2\right] \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2} k\chi t\right]$$

Входящие сюда константы a , θ , k и χ вещественны, причем a и θ произвольны, а k и χ связаны друг с другом соотношением:

$$k^2 + 3\chi^2 = 4$$

Подставив $\Lambda(x, t)$ в формулу (30), получим:

$$\frac{u}{2k^2} = \frac{1 - p \cos(kx + \theta)}{[p - \cos(kx + \theta)]^2} \quad (33)$$

Проследим за эволюцией решения (33), предполагая, что в начальный момент имеется неустойчивое возмущение малой амплитуды (см. рис. 2а). Тогда $p(0) \gg 1$, а знаки k и χ одинаковы. При не слишком больших временах ($t \ll \ln[p(0)/k\chi]$) формула (33) описывает линейную стадию неустойчивости:

$$u = -4ak \left[\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k\chi t\right) \right] \cos(kx + \theta)$$

С ростом возмущения его форма начинает отклоняться от синусоидальной: максимумы становятся более пологими, а минимумы — резкими (см. рис. 2б). При $p = 2$ обращаются в нуль первые три производные функции $u(x, t)$ в ее максимумах. Затем на месте каждого прежнего максимума возникает минимум, а в его окрестности появляются два симметрично расположенных максимума, которые растут и удаляются друг от друга (см. рис. 2в). При $p \rightarrow 1$ новые максимумы приближаются к точкам $x = x_s = \frac{2\pi n - \theta}{k}$, где функция $u(x)$ имеет абсолютные минимумы, и решение становится сингулярным. Особенность возникает в момент времени $t = t_s$, когда обращается в нуль минимальное значение Λ . В окрестности особенности $u(x, t)$ изменяется по автомодельному закону:

$$u(x, t) = -\frac{4}{\sqrt{3}(t_s - t)} (1-R)(1+R)^{-2}, \quad (34)$$

$$\text{где } R \equiv (x - x_s)^2 / \sqrt{3}(t_s - t)$$

Эта функция, как мы видим, универсальна: ее форма не зависит от параметров исходной волны. Начальные условия определяют лишь место x_s и время t_s появления особенности. Примечательно, что особенность (если она вообще появляется в решении (30), (31)) имеет форму (34) не только для начального условия в виде одной волны, но и при любых других начальных условиях. Действительно, разложение функции $\Lambda(x, t)$ в ряд по степеням $x - x_s$ и $t - t_s$ в окрестности нуля должно иметь вид:

$$\Lambda = g[(x - x_s)^2 + \beta^2(t_s - t)]$$

Коэффициент g не влияет на $u(x, t)$, а β^2 однозначно определяется из уравнения (19):

$$\beta^2 = \sqrt{3}$$

Отсюда сразу следует, что $u(x, t)$ задается формулой (34). Отметим еще, что функция (34) является точным решением уравнения

$$u_{tt} + \frac{1}{4} u_{xxxx} - \frac{3}{4} (u^2)_{xx} = 0$$

Зная профиль плотности плазмы $u(x, t)$, нетрудно найти распределение энергии ленгмюровских волн. Напомним для этого, что в случае малой надпороговости, к которому относится уравнение (19), возмущение газокINETического давления почти полностью компенсируется давлением плазмонов. Поэтому с точностью до малых поправок возмущение плотности энергии волн пропорционально функции $u(x, t)$ и противоположно ей по знаку.

Ядра F вида (25) порождают не только решение (33), соответствующее одной волне, но и решения, представляющие собой в начальный момент времени произвольную суперпозицию неустойчивых синусоидальных волн малой амплитуды. Число таких волн равно числу комплексно сопряженных пар, входящих в сумму (25). Можно показать, что при весьма мягких ограничениях на начальные условия решения такого вида в некоторый момент времени становятся сингулярными. Вывод о возникновении сингулярности относится, в частности, к тому случаю, когда начальный спектр возмущений плотности плазмы является шумовым.

Описанные выше решения представляют собой пример жесткого перехода модуляционной неустойчивости в нелинейный режим. Они показывают, что в области применимости уравнения (19) неустойчивость не стабилизируется. Независимо от величины надпороговости возмущения плотности плазмы достигают уровня

$$\frac{n}{n_0} \sim (k_0 r_d)^2,$$

соответствующего границе применимости нашего подхода.

Пространственный масштаб возмущений при этом сравнивается с характерной длиной волны ленгмюровских колебаний

k_0^{-1} . Заметим, что рассмотренная картина развития модуляционной неустойчивости качественно напоминает результаты, получающиеся при численном моделировании одномерной ленгмюровской турбулентности (см. [13]). Расчеты, как известно, демонстрируют появление локализованных возмущений плотности с уменьшающимся во времени размером. Форма этих возмущений (солитонов) сходна с автомодельным решением (34). Количественное же их сопоставление здесь, к сожалению, провести невозможно, т.к. в расчеты [13] были включены накачка и диссипация ленгмюровских волн.

3.3. Подпороговая неустойчивость возмущений конечной амплитуды

В связи с тем, что малая нелинейность, как мы видели, не приводит к стабилизации неустойчивости, естественно предположить, что в данном случае (так же, как и при жестком возбуждении гидродинамической турбулентности

[14]) должна иметь место неустойчивость возмущений конечной амплитуды в подпороговом режиме. В справедливости этого предположения можно убедиться следующим образом. Введем функцию $\xi(x, t)$, представляющую собой смещение ионов относительно положения равновесия. При этом

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \xi(x, t).$$

Функция $\xi(x, t)$ удовлетворяет следующему уравнению (см. формулу (19)):

$$\xi_{tt} \pm \xi_{xx} + \frac{1}{4} \xi_{xxxx} + \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial x} \xi^2 = 0$$

Здесь верхний знак у ξ_{xx} соответствует надпороговому режиму, а нижний — подпороговому.

Уравнение (35) можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \zeta} ; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \xi} , \quad (36)$$

где

$$H = \frac{1}{2} \int dx (\zeta^2 \mp \xi_x^2 - \frac{1}{2} \xi_x^3 + \frac{1}{4} \xi_{xx}^2) \quad (37)$$

Канонически сопряженными переменными здесь являются смещение ξ и скорость ионов $\zeta = \xi_t$. Поскольку гамильтониан H не зависит явным образом от времени, уравнение (35) обладает интегралом энергии:

$$H = E = \text{const}$$

С помощью уравнений (36) нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$\frac{d}{dt} \int dx \xi^2 = -6E + \int dx (5\xi_t^2 \mp \xi_x^2 + \frac{1}{4} \xi_{xx}^2) \quad (38)$$

Отсюда видно, что в подпороговом режиме, когда второе слагаемое в правой части (38) положительно, любое возмущение с отрицательной энергией неограниченно растет со временем. Отрицательный вклад в энергию связан с кубическим слагаемым в гамильтониане (37). Поэтому соответствующее возмущение обязательно должно иметь амплитуду

и порядка единицы. В размерных переменных эта критическая амплитуда тем меньше, чем ближе находится система к границе устойчивости.

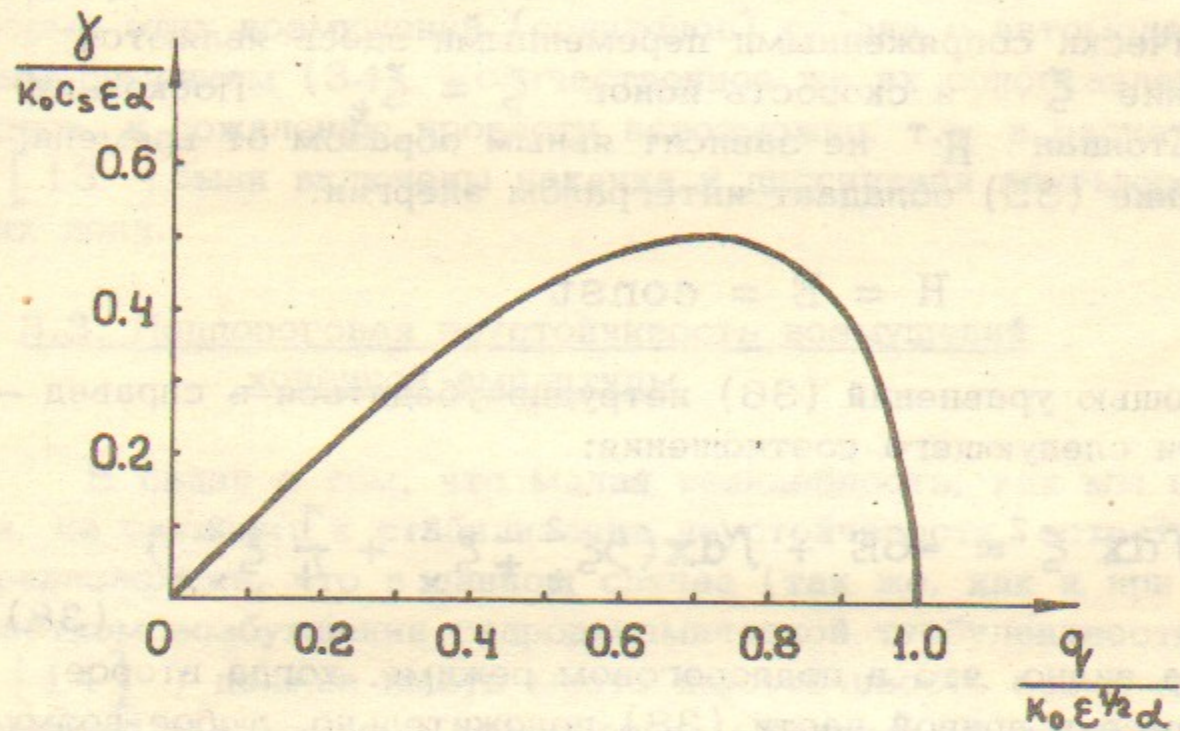


Рис.1. Зависимость максимизированного по направлениям инкремента длинноволновой модуляционной неустойчивости γ вблизи порога ($\epsilon \ll 1$) от волнового числа возмущения q . Через α обозначена величина $|I_1/I_2|^{1/2}$; k_0 - характерное значение волнового вектора ленгмюровских колебаний.

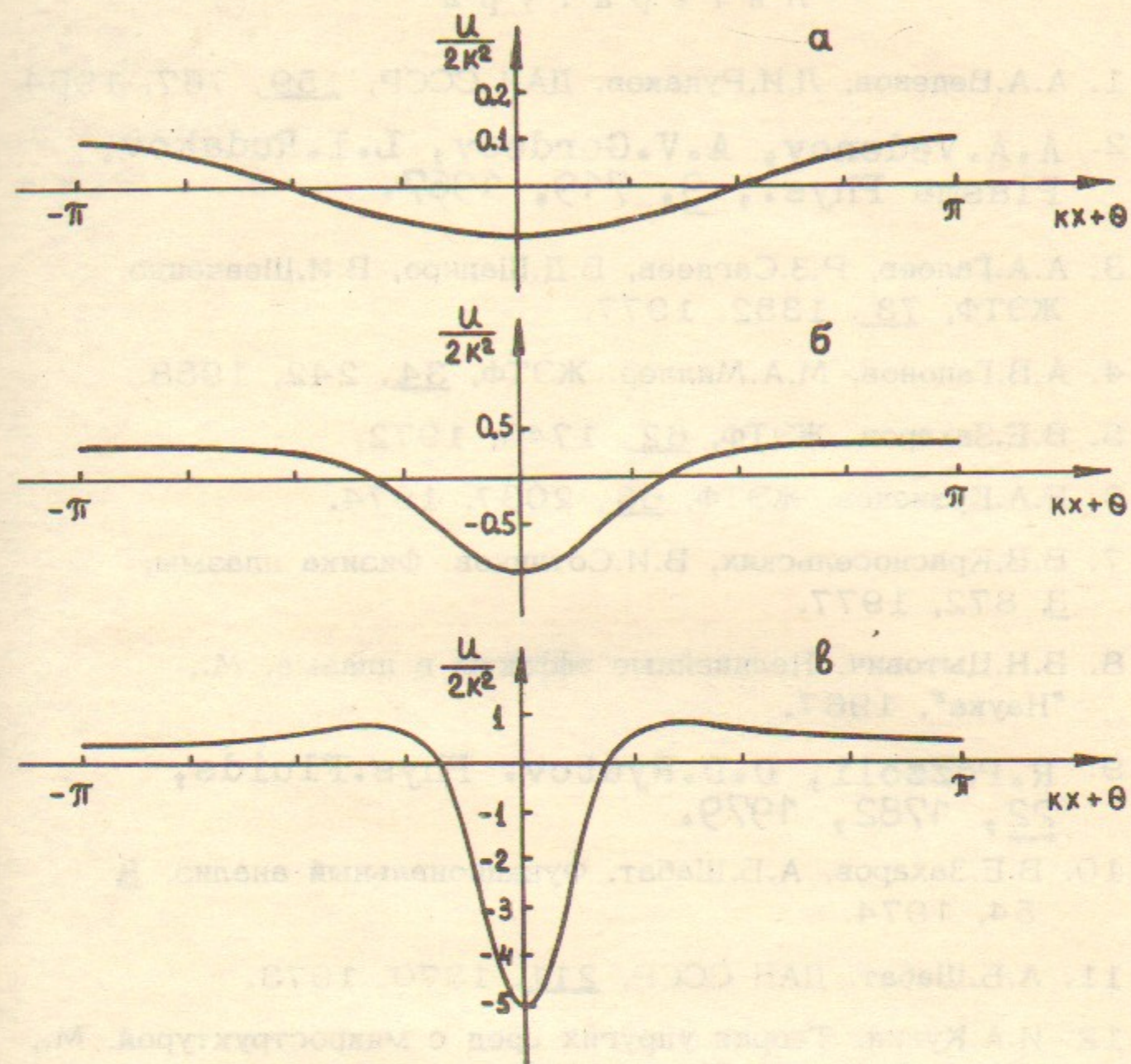


Рис.2. Эволюция неустойчивого возмущения плотности плазмы с малой начальной амплитудой (см. формулу (33)). Рисункам а, б, в соответствуют следующие значения параметра ρ :
 а - $\rho = 10$, б - $\rho = 2$, в - $\rho = 1,2$.

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. ДАН СССР, 159, 767, 1964
2. A.A.Vedenov, A.V.Gordeev, L.I.Rudakov. Plasma Phys., 9, 719, 1967.
3. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 73, 1352, 1977.
4. А.В.Гапонов, М.А.Миллер. ЖЭТФ, 34, 242, 1958.
5. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
6. Е.А.Кузнецов. ЖЭТФ, 66, 2037, 1974.
7. В.В.Красносельских, В.И.Сотников. Физика плазмы, 3, 872, 1977.
8. В.Н.Цытович. Нелинейные эффекты в плазме. М., "Наука", 1967.
9. R.Pozzoli, D.D.Ryutov. Phys.Fluids, 22, 1782, 1979.
10. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Функциональный анализ, 8, 54, 1974.
11. А.Б.Шабат. ДАН СССР, 211, 1370, 1973.
12. И.А.Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. М., "Наука", 1975. Глава У.
13. Т.А.Горбушина, Л.М.Дегтярев, Р.З.Сагдеев, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко, Препринт № 17 ИПМ АН СССР, Москва, 1978.
14. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.