СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ 24

В.В.Вечеславов

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

ПРЕПРИНТ 80-72

Новосибирск

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

В.В.Вечеславов

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено взаимодействие точечного заряда с коротким встречным сгустком частиц. Распределение плотности заряда сгустка в поперечной к направлению движения плоскости $\{x, z\}$ принято бигауссовым со среднеквадратичными размерами σ_x и σ_z соответственно. Для пучков с умеренной эллиптичностью $1 \leq \sigma_x / \sigma_z \leq 5$ предложено достаточно простое приближенное представление потенциала взаимодействия, использование которого может облегчить численное и аналитическое изучение эффектов встречи. Проведено сравнение точных и приближенных соотношений по результатам, даваемым ими при решении конкретной динамической задачи.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВСТРЕЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

1. Экспериментальному и теоретическому изучению эффектов электромагнитного взаимодействия заряженных частиц в установках со встречными пучками уделяется в последнее время большое внимание [1]. В программе исследований, направленной на выяснение деталей нелинейной динамики этого взаимодействия и выработку практических рекомендаций в отношении существующих и особенно проектируемых накопителей весьма заметная роль принадлежит численному моделированию. Здесь уже проделана определенная работа, но основная доля добытой информации относится к одномерному движению и круглому пучку [3,4]. Можно сказать, что изучение более реалистичной, но и существенно более сложной двумерной эллиптической модели только начинается. Необходимость прослеживать фазовые траектории многих частиц на протяжении очень большого числа взаимодействий является принципиальной особенностью анализа обсуждаемых явлений и громоздкое, непрозрачное математическое оформление эллиптической модели [1,2] сильно затрудняет этот анализ.

В настоящей работе делается попытка получить достаточно простое и вместе с тем относительно правильное приближенное представление потенциала встречного взаимодействия, пригодное для пучков с бигауссовым распределением заряда и умеренной эллиптичностью. Сопоставление результатов решений и времен счета при использовании "точных" и приближенных соотношений проведено на конкретном примере.

2. Рассмотрим взаимодействие точечного заряда со встречным сгустком частиц длиной L (рис.1). Распределение полного заряда Q по объему сгустка описывается зависимостью $\rho(\bar{s},\bar{x},\bar{z})=(Q/L)\cdot\rho_0(\bar{s},\bar{x},\bar{z})$, скорости $\vec{v}_1$ всех частиц в сгустке постоянны, одинаковы

и направлены вдоль оси S. Считаем, что допустимо приближение тонкой линзы: взаимодействие изменяет поперечные импульсы точечного заряда и не затрагивает его координаты x, z.

С помощью соотношений Лиенара – Вихерта [5] найдем созданное сгустком Q поле $\vec{E}, \vec{B}$ и получим выражения для импульсов поперечных сил, переданных заряду q ($t=0$ соответствует моменту пролета q мимо центра Q):

$$F_x = q\int_{-\infty}^{\infty}(E_x+v_2\cdot B_z)\cdot dt = \frac{qQ\gamma_1}{4\pi\varepsilon_0 L}\cdot(1+\beta_1\beta_2)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})\times$$

$$\times\frac{\rho_0(\bar{s},\bar{x},\bar{z})\cdot d\bar{s}\cdot d\bar{x}\cdot d\bar{z}\cdot dt}{[(x-\bar{x})^2+(z-\bar{z})^2+\gamma_1^2\cdot(t\cdot(v_1+v_2)+\bar{s})^2]^{3/2}}=$$

$$=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{1+\beta_1\beta_2}{v_1+v_2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\bar{x})\cdot\rho_0(\bar{s},\bar{x},\bar{z})\cdot d\bar{s}\cdot d\bar{x}\cdot d\bar{z}}{(x-\bar{x})^2+(z-\bar{z})^2}, \quad (1)$$

$$F_z=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{1+\beta_1\beta_2}{v_1+v_2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-\bar{z})\cdot\rho_0(\bar{s},\bar{x},\bar{z})\cdot d\bar{s}\cdot d\bar{x}\cdot d\bar{z}}{(x-\bar{x})^2+(z-\bar{z})^2}. \quad (2)$$

Для дальнейшего необходимо конкретизировать зависимость ρ_0 и мы примем правдоподобное в ряде случаев предположение о бигауссовом поперечном распределении заряда [1,2]:

$$\rho_0(\bar{s},\bar{x},\bar{z})=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z}\cdot\exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2\sigma_x^2}-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (3)$$

где

$$\sigma_x(\bar{s})=\sqrt{\langle\bar{x}^2(\bar{s})\rangle}, \quad \sigma_z(\bar{s})=\sqrt{\langle\bar{z}^2(\bar{s})\rangle}.$$

Используя (3) и полагая для упрощения дальнейших формул $v_1=v_2\simeq c$, находим:

$$F_{x,z}(x,z)=\frac{qQ}{4\pi^2\varepsilon_0 c\sigma_x\sigma_z}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}(x-\bar{x})\\(z-\bar{z})\end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2\sigma_x^2}-\frac{\bar{z}^2}{2\sigma_z^2}\right)\cdot\frac{d\bar{x}\cdot d\bar{z}}{(x-\bar{x})^2+(z-\bar{z})^2}. \quad (4)$$

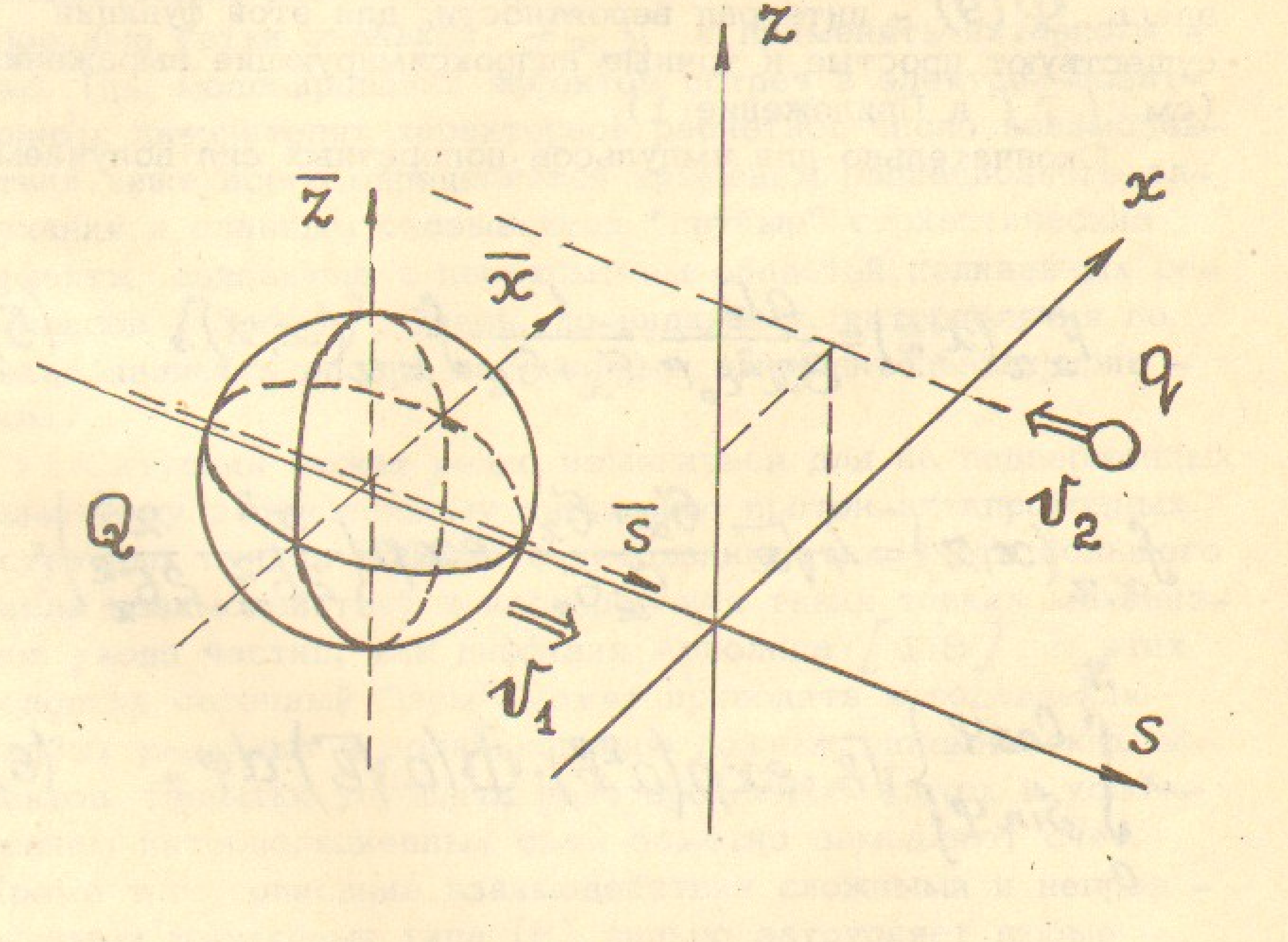

Рис.1.

Заметим, что длина сгустка L не вошла в выражение (4) вследствие предположения о постоянстве координат x, z заряда q в процессе взаимодействия, "эффективное время" которого допускает следующую оценку:

$$\Delta t_{eff} \simeq \sqrt{x^2+z^2+(\gamma L/2)^2} / \gamma c$$

Это соотношение полезно при проверке правомерности приближения тонкой линзы.

Двумерные интегралы (4) можно свести к одномерным, если ввести в поперечном пространстве $\{\bar{x}, \bar{z}\}$ полярные координаты r, φ с центром в точке $\bar{x}=x$, $\bar{z}=z$ и использовать равенство [6]:

$$\int_0^\infty exp\left(-\frac{y^2}{4d}-cy\right)\cdot dy = \sqrt{\pi d}\cdot exp(c^2 d)\cdot\left[1-\Phi(c\sqrt{d})\right]$$

здесь $\Phi(y)$ – интеграл вероятности; для этой функции существуют простые и точные аппроксимирующие выражения (см. [7] и Приложение 1).

Окончательно для импульсов поперечных сил получаем:

$$F_{x,z}(x,z) = \frac{qQ}{8\pi^2\varepsilon_0 c}\cdot\frac{1}{\sigma_x+\sigma_z}\cdot f_{x,z}(x,z), \qquad (5)$$

$$f_{x,z}(x,z) = 4\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sigma_x+\sigma_z}{\sigma_x\cdot\sigma_z}\cdot exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)\times$$

$$\times\int_0^\pi \left.\begin{matrix}Cos\varphi\\ Sin\varphi\end{matrix}\right\}\sqrt{b}\cdot exp(a^2 b)\cdot\Phi(a\sqrt{b})\cdot d\varphi, \qquad (6)$$

$$a(\varphi) = \frac{x}{\sigma_x^2}\cdot Cos\varphi + \frac{z}{\sigma_z^2}\cdot Sin\varphi,$$

$$b(\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_x^2}{Cos^2\varphi+(\sigma_x/\sigma_z)^2\cdot Sin^2\varphi}.$$

Появление в (5), (6) содержащих $(\sigma_x+\sigma_z)$ множителей обусловлено желанием придать ряду используемых ниже соотношений общепринятый вид.

3. В Приложении 1 рассмотрены круглый $\sigma_x=\sigma_z$ и ленточный $\sigma_x\to\infty$ пучки, для которых формулы (6) существенно упрощаются. В остальных случаях при решении динамических задач приходится использовать заранее построенные сетки значений $f_{x,z}$ и применять интерполяцию. При моделировании эффектов встреч в электрон–позитронных накопителях характерное расчетное число взаимодействий чаще всего определяется временем радиационного затухания и главным оказываются "грубые" стохастические эффекты, связанные с перекрытием областей нелинейных резонансов [3,4,8]. Здесь, по-видимому, интерполяция по сетке является вполне допустимым вычислительным приемом.

Ситуация может резко измениться для не подверженных заметному радиационному затуханию протон–антипротонных встречных пучков в связи с необходимостью учета большого числа взаимодействий и исследования таких тонких механизмов ухода частиц, как диффузия Арнольда [1,8]. В этих условиях сеточный "шум" может приводить к подавлению слабых реальных и возникновению ложных динамических эффектов. Попытки улучшить дело дроблением сеток и усложнением интерполяционных схем заметно замедляют счет. Кроме того, описание взаимодействия сложными и непрозрачными формулами типа (6) сильно затрудняет любые аналитические подходы.

По этим соображениям желательно попытаться пост – роить аппроксимирующие интегралы (6) выражения, к кото– рым необходимо предъявить следующие требования: 1) приб– лиженные силы должны иметь точный потенциал – это каче– ство, связанное с гамильтоновостью динамики, терять нель– зя; 2) должны быть правильно описаны ближняя $x, z \ll 1$ и дальняя $x, z \gg 1$ асимптотики взаимодействий; 3) непосредственно участвующие в вычислениях выражения должны быть максимально просты. С другой стороны, нали– чие многих неучтенных или грубо учитываемых факторов при численном моделировании встречных взаимодействий в реаль– ных накопителях позволяет не стремиться к очень хорошему совпадению "точных" (найденных по формулам (6)) и приб– лиженных значений $f_{x,z}$. Этим требованиям для интер– вала $1 \leq \varkappa = \sigma_x / \sigma_z \leq 5$ в достаточной мере, как нам ка – жется, удовлетворяют следующие выражения:

$$f_x = \frac{4\pi x}{\sigma_x}\left\{\frac{1}{1+\left[\frac{x^2+\varkappa z^2}{2A\sigma_x^2}\right]^2} + \frac{1}{1+\frac{x^2+z^2}{2G\sigma_x^2}} - \frac{1}{1+\left[\frac{x^2+z^2}{2D\sigma_x^2}\right]^2}\right\}, \quad (7)$$

$$f_z = \frac{4\pi z}{\sigma_x}\left\{\frac{\varkappa}{1+\left[\frac{x^2+\varkappa z^2}{2A\sigma_x^2}\right]^2} + \frac{1}{1+\frac{x^2+z^2}{2G\sigma_x^2}} - \frac{1}{1+\left[\frac{x^2+z^2}{2D\sigma_x^2}\right]^2}\right\}, \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} A(\varkappa) &= 0.02438\,\varkappa^2 - 0.2723\,\varkappa + 1.398 \\ G(\varkappa) &= (\varkappa+1)/2\varkappa \\ D(\varkappa) &= 0.03763\,\varkappa^2 - 0.3701\,\varkappa + 1.159 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Потенциал встречного взаимодействия имеет вид:

$$U = -4\pi\sigma_x \cdot \left\{ A \cdot \operatorname{arctg}\frac{x^2+\varkappa z^2}{2A\sigma_x^2} + G \cdot \ln\left(1+\frac{x^2+z^2}{2G\sigma_x^2}\right) - D \cdot \operatorname{arctg}\frac{x^2+z^2}{2D\sigma_x^2}\right\}. \quad (10)$$

В правильности ближней асимптотики можно убедиться, сравнивая формулы (7), (8) при $x, z \ll 1$ с фор– мулами (П1–3) Приложения 1. При $x, z \to \infty$ форма поперечного сечения пучка становится несущественной и все зависимости в этой области должны вырождаться в таковые для круглого пучка (П1–4), (П1–5) Приложения 1. Легко проверить, что в отношении введенных нами выражений (7) –(10) с учетом формулы (5) дело обстоит именно так.

Сопоставление "точных" и приближенных величин $f_{x,z}$ для ряда значений $\varkappa$ проведено в Приложении II.

4. В этом разделе рассматривается конкретная дина– мическая задача с единственной целью – сравнить между собой результаты решений и времена счета, полученные при использовании "точных" и приближенных выражений для им– пульсов поперечных сил $f_{x,z}$.

Условимся все встречающиеся ниже функции продоль– ной координаты S считать относящимися к месту встре– чи $S = S_0$ и штрихом обозначать производные по S. Положим $Q = -N \cdot e$, $q = e$ и введем фазовые перемен– ные [3,4]:

$$X = x/\sigma_x, \quad P_x = x'_x\beta/\sigma_x, \quad Z = z/\sigma_z, \quad P_z = z'_z\beta/\sigma_z, \quad (11)$$

где $\beta_{x,z}$ – амплитудные функции накопителя. Для упро– щения дальнейших формул примем часто выполняющееся на практике условие $\beta'_x = \beta'_z = 0$ и тогда получим [9]:

$$\begin{aligned} X &= A_x \cdot \cos\varphi_x, & P_x &= -A_x \cdot \sin\varphi_x, \\ Z &= A_z \cdot \cos\varphi_z, & P_z &= -A_z \cdot \sin\varphi_z. \end{aligned} \quad (12)$$

Соответствующая бигауссовскому закону (3) фазовая плотность запишется в форме:

$$\rho_4(X, P_x, Z, P_z) = \frac{1}{4\pi^2} \exp\left(-\frac{X^2 + P_x^2 + Z^2 + P_z^2}{2}\right). \quad (13)$$

Невозмущенное движение имеет интеграл (Куранта–Снайдера) [9]:

$$W = \frac{1}{2}\left(X^2 + P_x^2 + Z^2 + P_z^2\right) = \frac{1}{2}\left(A_x^2 + A_z^2\right). \quad (14)$$

Используя (12), (13), (14), нетрудно найти распределение плотностей в пространстве $\{A_x, A_z\}$ амплитуд бетатронных колебаний и как функцию интеграла W соответственно:

$$\rho_A(A_x, A_z) = A_x \cdot A_z \cdot \exp\left(-\frac{A_x^2 + A_z^2}{2}\right), \quad (15)$$

$$\rho_W(W) = W \cdot \exp(-W). \quad (16)$$

Из последнего выражения видно, что максимальная плотность заряда обеспечивается частицами, представляющие точки которых заполняют в фазовом пространстве сферу $W = 1$.

Преобразование координат частиц между встречами осуществляется транспортной матрицей накопителя, а для одной встречи имеем:

$$X_2 = X_1, \quad P_{x2} = P_{x1} - \xi_x \cdot f_x(X_1, Z_1),$$
$$Z_2 = Z_1, \quad P_{z2} = P_{z1} - \xi_z \cdot f_z(X_1, Z_1), \quad (17)$$

здесь $\xi_{x,z} = \dfrac{N \cdot r_e}{2\pi\gamma(\sigma_x + \sigma_z)} \cdot \dfrac{\beta_{x,z}}{\sigma_{x,z}}$ – параметры возмущения, $r_e = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m c^2)$ – классический радиус электрона.

Будем считать, что до взаимодействия оба пучка "сильный" Q и "слабый" (представителем которого является точечный заряд q) имели распределение (13). Чаще всего интересуются пороговыми значениями $\xi^{CR}_{x,z}$ при которых возникает стохастическая неустойчивость поперечного движения и заметная доля частиц слабого пучка покидает область эффективного взаимодействия [2,3,4] . Можно предположить, однако, что при любом, в том числе и заметно меньшем критического возмущении $\xi < \xi^{CR}$ начальное распределение частиц слабого пучка не сохраняется. Взаимодействие разрушает, в частности, область максимальной плотности $W = 1$ и мы попытаемся на числовом примере составить представление о судьбе первоначально связанных с ней частиц.

В [3] рассматривалось двумерное движение на модели круглого $\sigma_x = \sigma_z$ пучка и определялся стохастический предел ξ^{CR} для электрон–позитронного накопителя, работающего около резонанса связи бетатронных колебаний $\nu_x \simeq \nu_z$. Мы рассмотрим близкую ситуацию, но для эллиптического пучка: $\nu_x = 3{,}0785$; $\nu_z = 3{,}0815$; $\sigma_x / \sigma_z = 2{,}5$; $\xi_x = \xi_z = 0{,}09$; число мест встречи равно двум. Если к этому случаю применить описанную в [3] методику, то оказывается $\xi^{CR} \simeq 0{,}018$ и выбранные нами значения ξ_x, ξ_z составляют половину этой величины.

Численно изучалось поведение нескольких групп по 50 частиц в каждой, причем начальные значения координат частиц всегда выбирались на фазовой сфере (14) $W = 1$. Число встреч T изменялось от $2 \cdot 10^4$ до $2 \cdot 10^5$. В процессе счета для каждой частицы вычислялась по формуле (14) усредненная на отрезке $\Delta T = 5 \cdot 10^3$ или 10^4 величина $\overline{W}$, что позволяло найти интервал $\overline{W_L} \le \Delta\overline{W} \le \overline{W_R}$ для всей группы. По распределению частиц внутри интервала $\Delta\overline{W}$ отыскивался его центр тяжести $\overline{W_C}$. Результаты для некоторых групп частиц представлены в таблице, где римские цифры показывают, каким из трех способов расчета (см.ниже) эти результаты получены.

В итоге взаимодействия вся начальная сфера

$W=1$ оказалась в среднем по времени "размыта" на интервал $0,6 \le \Delta W \le 3,8$ причем в верхнюю его часть попали частицы с нулевыми начальными импульсами, а в нижнюю – с нулевыми начальными координатами (первая и четвертая группы частиц в таблице соответственно). Это обстоятельство (связанное с тем, что возмущение зависит лишь от координат, но не от импульсов) четко наблюдается также и в одномерных моделях [4]. В пределах рассмотренных нами чисел взаимодействий центры тяжести $\overline{W_c}$ всех обследованных интервалов оказались достаточно стабильными, хотя в распределениях частиц и положении границ интервалов $\overline{W_R}, \overline{W_L}$ наблюдались изменения. Так, для первой группы частиц при полном числе взаимодействий $\mathcal{T} = 2,1\cdot 10^5$ с усреднением на отрезке $\Delta\mathcal{T} = 10^4$ колебания величины $\overline{W_c}$ составили менее 0,5%.

Группа номер	Начальное условие	$f_{x,z}$	$\overline{W_L}$	$\overline{W_R}$	W_c
1	$x_o \neq 0, z_o \neq 0;$ $P_{xo} = P_{zo} = 0.$	1	2,03	3,83	3,18
		П	2,75	3,49	3,16
		Ш	2,76	3,46	3,19
П	$x_o \neq 0, P_{xo} \neq 0,$ $z_o = P_{zo} = 0.$	1	0,63	2,76	1,95
		П	0,62	2,67	1,90
		Ш	0,62	2,67	1,90
Ш	$z_o \neq 0, P_{zo} \neq 0,$ $x_o = P_{xo} = 0.$	1	0,59	2,76	1,67
		П	0,58	2,76	1,64
		Ш	0,58	2,76	1,65
1У	$P_{xo} \neq 0, P_{zo} \neq 0,$ $x_o = z_o = 0.$	1	0,59	0,63	0,61
		П	0,57	0,63	0,60
		Ш	0,57	0,63	0,60

При всех расчетах величины импульсов сил $f_{x,z}$ определялись следующими тремя способами: 1) по приближенным формулам (7), (8); П) интерполяцией на построенных по "точным" формулам (6) сетках с числом узлов 10х10 на единичный квадрат плоскости $\{X, Z\}$; Ш) то же, что и в П, но с числом узлов 14х14. В последних двух способах применялась линейная интерполяция по четырем ближайшим узлам сетки. Сравнение величин центров тяжестей интервалов $\overline{W_c}$ (последний столбец таблицы) обнаруживает практическую эквивалентность этих методик.

Вычисления проводились на ЭВМ БЭСМ-6, программы были написаны на языке ФОРТРАН. Расчет одного встречного взаимодействия по формуле (17) с использованием приближенных выражений (7), (8) занимал ~ 170 мксек; применение интерполяции по сеткам увеличивало это время до ~ 690 мксек.

Автор благодарен Ф.М.Израйлеву и Б.В.Чирикову за обсуждения и советы.

Приложение 1.

Частные случаи формулы (6)

При работе с формулой (6) полезны следующие два представления интеграла вероятности, взятые из [6] и [7] соответственно:

$$\Phi(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot exp(-y^2)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}\cdot y^{2k+1}, \qquad (П1\text{-}1)$$

$$\Phi(y)\simeq 1-\left[1+\sum_{k=1}^{5}a_k\cdot y^k\right]^{-8}, \qquad (П1\text{-}2)$$

где $a_1=0{,}14112821$, $a_4=-0{,}00039446$

$a_2=0{,}08864027$, $a_5=-0{,}00328975$

$a_3=0{,}02743349$,

Выражение (П1-2) аппроксимирует функцию $\Phi(y)$ во всей области ее определения с точностью лучшей чем $2\times10^{-[illegible]}$.

а) Линейное приближение, определяющее сдвиги частот малых колебаний $(x,z\ll 1,\ \varkappa=\sigma_x/\sigma_z)$:

$$f_{x,z}\simeq 8\cdot\frac{\sigma_x+\sigma_z}{\sigma_x\cdot\sigma_z}\int_0^{\pi}\left.\begin{matrix}Cos\varphi\\ Sin\varphi\end{matrix}\right\}\cdot\frac{x\cdot Cos\varphi+\varkappa^2\cdot z\cdot Sin\varphi}{Cos^2\varphi+\varkappa^2\cdot Sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$f_x\simeq 4\pi x/\sigma_x, \qquad f_z\simeq 4\pi z/\sigma_z. \qquad (П1\text{-}3)$$

б) Круглый пучок $\sigma_x=\sigma_z=\sigma$. Вдоль оси $x\ (z=0)$ имеем:

$$f_x(x)=8\sqrt{2\pi}\cdot exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right)^{2k+1}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}(Cos\varphi)^{2k+2}\cdot d\varphi=8\pi\cdot\frac{\sigma}{x}\cdot\left[1-exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\right].$$

Для произвольной точки:

$$f_{x,z}(x,z)=\frac{8\pi\sigma}{x^2+z^2}\cdot\left.\begin{matrix}x\\ z\end{matrix}\right\}\cdot\left[1-exp\left(-\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}\right)\right]. \qquad (П1\text{-}4)$$

В силу (П1-4) потенциал круглого пучка равен:

$$U=-4\pi\sigma\cdot\left[\mathbb{C}+ln\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}-Ei\left(-\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}\right)\right], \qquad (П1\text{-}5)$$

здесь $\mathbb{C}$ = 0,577215665 – постоянная Эйлера,

$Ei(y)$ – интегральная показательная функция.

в) Ленточный пучок $\sigma_z=\sigma,\ \sigma_x\to\infty$:

$$f_z(z)=(2\pi)^{3/2}\cdot\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\right). \qquad (П1\text{-}6)$$

г) Максимальное значение подинтеграла в формуле (6) имеет место при $\varphi=arctg(z/x)$. Окрестность этой точки (для $\varkappa\gg1$ чрезвычайно узкая) дает основной вклад в величины $f_{x,z}$. Это обстоятельство необходимо учитывать при численном интегрировании (6).

Приложение П.

Оценка точности приближенных значений $f_{x,z}$.

Для определения относительных погрешностей формул (7),(8) вычисленные по ним значения $f_{x,z}$ сравнивались с "точными", т.е. найденными с помощью интегралов (6) в пределах области $(x/\sigma_x\leq10;\ z/\sigma_z\leq10)$. Результаты сведены в таблицы, где обозначено:

$\langle\delta\rangle$ – среднее по всей области отклонение в процентах;

δ_{max} – максимальное относительное отклонение в процентах, для которого указаны координаты, точное $f_{т}$ и приближенное $f_{пр}$ значения.

Таблица 1

$\varkappa$	$\langle \delta_x \rangle$	$\delta_{x,max}$	x/σ_x	z/σ_z	$f_{x,T}$	$f_{x,\Pi P}$
1.0	2.1	5.2	0.6	0.3	6.75	6.40
2.0	2.4	12.5	0.1	2.4	0.63	0.55
2.5	2.6	16.5	1.2	0.0	10.1	11.8
3.0	3.1	21.3	1.0	0.0	9.49	11.5
4.0	4.4	30.6	0.9	0.0	8.93	11.7
5.0	4.8	32.3	0.9	0.0	8.89	11.8

Таблица П.

$\varkappa$	$\langle \delta_z \rangle$	$\delta_{z,max}$	x/σ_x	z/σ_z	$f_{z,T}$	$f_{z,\Pi P}$
1.0	2.1	5.2	0.3	0.6	6.75	6.40
2.0	3.5	11.8	2.5	0.4	0.93	0.82
2.5	4.2	16.7	0.0	1.5	12.3	14.3
3.0	4.7	21.3	0.0	1.5	12.4	15.1
4.0	5.8	28.5	2.0	0.4	1.14	0.81
5.0	7.0	34.3	2.0	0.5	1.29	0.85

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M.Month, J.C.Herrera (Editors), "Nonlinear Dinamics and Beam-Beam Interaction", Brokhaven Nat. Lab., 1979.
2. E.Keil, "Nonlinear Space Charge Effects", CERN/ISR-TH/72-7.
3. И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев, Г.М.Тумайкин. "Критерий стохастичности при взаимодействии встречных пучков на основном резонансе связи". Препринт ИЯФ СО АН СССР № 79-74, Новосибирск.
4. И.Б.Вассерман и др. "Изучение стохастических эффектов при взаимодействии встречных пучков", Труды X междунар. конфер. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий", Серпухов, 1977.
5. В.Пановский, М.Филипс. "Классическая электродинамика", Москва, 1963.
6. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. "Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", Москва, 1962.
7. Я.С.Дымарский и др. "Справочник программиста, т.1", Ленинград, 1963.
8. B.V.Chirikov, "A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems", Phys.Rep. 52, N5, 1979.
9. Г.Брук. "Циклические ускорители заряженных частиц", Атомиздат, Москва, 1970.