

Ядерная физ.

17.20

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

26

А.З.Паташневский, Б.И.Шумило

**РЕЛАКСАЦИЯ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ
СОСТОЯНИЙ ВБЛИЗИ
ТРИКРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ**

ПРЕПРИНТ 80-74

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИНВ. № _____



Новосибирск

РЕЛАКСАЦИЯ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ
ВБЛИЗИ ТРИКРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

А.З.Паташинский, Б.И.Шумило

АННОТАЦИЯ

Статистический процесс роста зародыша новой фазы вблизи трикритической точки описан в терминах флуктуаций амплитуд гармоник поля параметра перехода. Показано, что в исследуемом многобарьерном случае для образования закритического зародыша необходимо преодолеть один барьер в двумерном пространстве параметров. Найдено время образования критического зародыша.

А.З.Паташинский, Б.И.Шумило

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы описали, следуя идеям Я.Б.Зельдовича [2], релаксацию слабометастабильных состояний термодинамической системы близкой к критической точке. Распределение вероятных флуктуаций в метастабильной фазе такой системы совпадает с распределением Гиббса, что отвечает локальному равновесию при заданной конфигурации крупномасштабных степеней свободы. Релаксация метастабильного состояния сводится к релаксации гидродинамических мод, осредненных по мелкомасштабным флуктуациям. Уравнение движения системы, описываемой скалярным полем параметра фазового перехода $\varphi(\vec{x}, t)$, есть:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \hat{\Gamma} \left[-\frac{\delta H}{\delta \varphi} + f_{st}(\vec{x}, t) \right] \quad (1)$$

Функционал $H\{\varphi\}$ — осредненный по мелкомасштабным степеням свободы эффективный гамильтониан системы [3]; случайная сила $f_{st}(\vec{x}, t)$ иммитирует взаимодействие с термостатом; оператор

$$\hat{\Gamma} = \Gamma_H ; \quad \hat{\Gamma} = -\Gamma_C \Delta \quad (2)$$

соответственно в случаях несохраняющегося и сохраняющегося параметра φ ; Γ_H, Γ_C — кинетические коэффициенты. Цель данной работы — рассмотреть в изложенной постановке процесс зародышеобразования при наличии промежуточного метастабильного состояния (т.к. многобарьерный случай) на примере систем близких к трикритической точке [4].

Три критическая точка — это точка на линии фазовых переходов первого рода, в которой скачки параметра φ при переходе из фазы $\langle \varphi \rangle = 0$ в фазы $\langle \varphi \rangle = \varphi_{1,2}$ обращаются в нуль, и переход становится переходом второго рода. Вблизи такой точки скачки параметра φ малы, радиус корреляции флуктуаций ζ_c в каждой из фаз велик по сравнению с характерным межатомным размером. Гамильтониан $H\{\varphi\}$ в этом случае (также как и вблизи критической точки) можно представить в виде разложения, описывающего слабонеоднородные состояния во всех трех фазах:

$$H\{\varphi\} = \int \left[\frac{c}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{g}{2} (\varphi - \varphi_1)^2 (\varphi - \varphi_2)^2 (\varphi + \mu) - h\varphi \right] dx \quad (3)$$

где величины $c, g, \varphi_1 > 0$; $\varphi_2 = -\alpha \varphi_1$, $0 < \alpha \leq 1$. Фазовая диаграмма системы такова; линия $\mu = 0$ в плоскости $h = 0$ есть линия фазового перехода первого рода; при $\mu < 0$ стабильна фаза $\langle \varphi \rangle = 0$, при $\mu > 0$ — одна из фаз $\varphi_{1,2}$; три критической точке соответствуют значения $\mu = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Рассмотрим фазовый переход $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ при изменении знака h ($|h| \ll g\varphi_1^5$), при значениях $|\mu| \ll |\varphi_1 \varphi_2|$. При таких значениях параметров две из трех фаз слабометастабильны. Напомним [4], что вне зависимости от близости к критической точке флуктуации в системе являются слабыми, т.е. амплитуда вероятных флуктуаций масштабов $\lambda \sim \zeta_c$ мала по сравнению с φ_1 . Силу $f_{st}(\vec{x}, t)$ при этом можно рассматривать как возмущение.

2. Динамика образования зародышей

Конфигурации поля $\varphi(\vec{x})$, для которых в некоторой области $\langle \varphi \rangle \approx \varphi_i$, а вне ее $\langle \varphi \rangle \approx \varphi_j$ (φ_{ij} — минимумы гамильтониана), описывают зародыши одной фазы в другой. Релаксация зародышей сводится к изменению размера и формы, причем она происходит квазистати-

чески, если размер зародыша R велик по сравнению с ζ_c . Конфигурации, соответствующие таким зародышам, есть в младшем приближении решения уравнения

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi} = 0 \quad (4)$$

выписанного без учета малых членов порядка ζ_c/R , h/h_c и т.п. Рассмотрим систему с несохраняющимся параметром φ . Введем безразмерные переменные: радиус ξ и время τ

$$\xi = \varphi_1 (\varphi_1^2 + \mu)^{1/2} \left(\frac{g}{c}\right)^{1/2} \tau; \quad \tau = \Gamma h g \varphi_1^4 t \quad (5)$$

Будем измерять параметр φ_1 в единицах φ_1 , а поле h и силу f_{st} в единицах $g\varphi_1^5$. Уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \Delta \varphi - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left\{ (\varphi - 1)^2 (\varphi + \alpha)^2 \left(\varphi + \frac{1}{\lambda}\right) \right\} + h + f_{st} \quad (6)$$

Уравнение (4) при $h = 0$ есть:

$$\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left\{ (\varphi^2 - 1)^2 (\varphi + \alpha)^2 \left(\varphi + \frac{1}{\lambda}\right) \right\}; \quad \lambda = \frac{\varphi_1^2}{\mu} \quad (7)$$

где в операторе лапласа опущены относительно малые члены порядка $1/\xi$. В общем случае уравнение (7) интегрируется в неявном виде. Рассмотрим подробно случай $\alpha = 1$, когда решение (7), описывающее сферически симметричный зародыш фазы $\langle \varphi \rangle = -1$ в фазе $\langle \varphi \rangle = 1$, есть:

$$\varphi_0(\xi, \lambda) = \left[\frac{\text{th}(\xi - \xi_0)}{\lambda + 1 - \lambda \text{th}(\xi - \xi_0)} \right]^{1/2} \quad \xi_0 \gg 1, \lambda > 0 \quad (8)$$

Конфигурация (8) отвечает минимуму гамильтониана при данных граничных условиях и изображена на рис.1. При $\lambda \ll 1$ (8) сводится к решению для двухфазной системы [1]. Рассмотрим релаксацию конфигурации $\varphi_0(\xi, \mu)$ ($\mu \gg 1$) с произвольным расстоянием между межфазными границами (без учета f_{st}). Запи-

сывая для малых τ

$$\varphi(\xi, \tau) = \varphi_0(\xi, u) + \psi(\xi, \tau) \quad (9)$$

и линеаризуя уравнение (6) по полю ψ , получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \hat{L} \psi + Q(\varphi_0) \quad (10)$$

$$\hat{L} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left\{ (\varphi^2 - 1) \left(\varphi^2 + \frac{1}{\lambda}\right) \right\} \Big|_{\varphi_0} \quad (11)$$

$$Q(\varphi_0) = h + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{2}{\xi} \frac{d\varphi_0}{d\xi} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u}\right) \frac{d}{d\xi} (1 - \varphi_0^2)^3 \quad (12)$$

Заметим, что каждый из членов функции $Q(\varphi_0)$ мал по одному из параметров h , λ^{-1} , ξ_0^{-1} . Разложим $\psi(\xi, \tau)$ и $Q(\varphi_0)$ в ряд по собственным функциям оператора (11):

$$\psi(\xi, \tau) = \sum_n c_n(\tau) \psi_n(\xi); \quad Q(\varphi_0) = \sum_n q_n \psi_n(\xi) \quad (13)$$

Подставляя (13) в (10), получим:

$$\frac{dc_n}{d\tau} = L_n c_n + q_n \quad (14)$$

Оператор (11) имеет двукратно вырожденный (с точностью до расщепления $\Delta L \sim 1/u$) уровень $L_0 = 0$. Остальные собственные значения $L_n \leq -1$ (см. Приложение). Релаксация устойчивых гармоник ($L_n < -1$) приводит к малым поправкам $\delta\varphi \sim q_n \psi_n(\xi) / L_n$ к конфигурации $\varphi_0(\xi, u)$, вычислять которые в рассматриваемом приближении нет необходимости. Трансляционные гармоники ($L_0 = 0$) описывают: (П.1) — смещение конфигурации $\varphi_0(\xi, u)$ вдоль оси ξ , т.е. изменение радиуса зародыша ξ_0 ; (П.2) — изменение расстояния между межфазными границами. При $\delta\tau \rightarrow 0$ из (14) получим уравнения для амплитуд этих гармоник:

$$-\frac{d\xi_0}{d\tau} = 4h + \frac{2(\xi_1 + \xi_2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} + 2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u}\right) \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (15)$$

где $\xi_{1,2} = \xi_0 \mp l$; $l = \frac{1}{2} m 4u$ — полуширина области промежуточной фазы. Для не слишком больших u ($u \sim \xi_0$) величина $l \sim \ln u$ мала по сравнению с ξ_0 . При этом с точностью до членов порядка l/ξ_0 имеем:

$$-\frac{d\xi_0}{d\tau} = 4h + \frac{2}{\xi_0} + 4\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u}\right) \frac{l}{\xi_0} \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2u} \frac{du}{d\tau} = 2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u}\right) + \frac{2l}{\xi_0} \left(4h + \frac{1}{\xi_0}\right)$$

При очень больших u ($l \sim \xi_0$) взаимодействием межфазных границ можно пренебречь и рассматривать движение каждой из них в отдельности. Как следует из (16) при $h < 0$, $\lambda > 0$, когда исходное значение $\langle \varphi \rangle = 1$, и промежуточное $\langle \varphi \rangle = 0$ — метастабильны, зародыши размеров $\xi_0 > \xi_c = (2|h|)^{-1}$ растут, тогда как зародыши $\xi_0 < \xi_c$ затухают. Параметр u стремится к значению λ . Приравнявая в общем случае правые части уравнений (15) к нулю, получим для метастабильной фазы решение $\xi_c(h, \lambda)$, $u_c(h, \lambda)$, определяющее критическую конфигурацию $\varphi_0(\xi - \xi_c, u_c)$. Последняя является перевальной точкой в пространстве конфигураций. Значение $H\{\varphi_c\}$ эффективного гамильтониана системы дает минимальную работу образования закритического зародыша стабильной фазы.

Опишем релаксацию зародыша произвольной формы с учетом флуктуаций поля ψ . Параметры ξ_0 и u являются теперь функциями времени и углов. Заметим, что

форма возникающих в системе зародышей размеров $\xi_0 \gg 1$ близка к сферической, поэтому в разложениях по сферическим функциям

$$\xi_0(\theta, \varphi, \tau) = \sum \xi_{lm}(\tau) Y_{lm}(\theta, \varphi); u(\theta, \varphi, \tau) = \sum u_{lm} Y_{lm} \quad (17)$$

амплитуды ξ_l, u_l ($l \geq 1$) можно считать малыми по сравнению со средним по углам значениями ξ_0, u_0 . Трансляционными гармониками наряду с функциями $\Psi_{\pm}(\xi)$ являются также функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ соответствующие им амплитуды есть величины ξ_l, u_l . Раскладывая $Q(\varphi_0)$ по трансляционным гармоникам, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{d\xi_0}{d\tau} &= 4h + \frac{2}{\xi_0} + 2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u_0}\right) \frac{\ln 4u_0}{\xi_0} + v_{+0} \\ -\frac{1}{2u_0} \frac{du_0}{d\tau} &= 2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u_0}\right) + \frac{\ln 4u_0}{\xi_0} \left(4h + \frac{1}{\xi_0}\right) + v_{-0} \end{aligned} \quad (18)$$

$$-\frac{d\xi_l}{d\tau} = \frac{l(l+1)-2}{(\xi_0)^2} \xi_l + v_{+l}$$

$$-\frac{1}{2u_0} \frac{du_l}{d\tau} = \frac{l(l+1)}{(\xi_0)^2} u_l + \frac{2u_l}{(u_0)^2} + v_{-l}$$

Величины $v_{\pm l}(\xi_0, \tau)$ — амплитуды разложения силы $f_{st}(\xi, \tau)$ [1] по трансляционным гармоникам. Амплитуды ξ_l, u_l ($l \geq 2$) в процессе релаксации затухают, т.е. зародыш сферизуется. Величина ξ_1 описывает смещение зародыша в пространстве (броунирование), u_1 — относительное смещение области зародыша.

В системе с сохраняющимся параметром фазового перехода процесс образования зародыша отличен от рассмотренного случая (см. также [1]). Будем использовать прежние безразмерные переменные (за исключением времени, которое теперь в единицах $\Gamma_c^{-1} c (g\varphi_1^y)^{-2}$) и запишем уравнения (1) в интегро-дифференциальной форме:

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi(\xi', \tau)}{\partial \tau} \frac{d\xi'}{|\xi - \xi'|} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} \quad (19)$$

В младшем приближении уравнения для квазистатической конфигурации совпадают с (4). Будем поэтому искать решение (19) в виде:

$$\varphi(\xi, \tau) = \varphi_0(\xi - \xi_0, u) + \Psi(\xi, \tau) \quad (20)$$

где φ_0 — решение уравнения (7) описывающее зародыш, параметры которого зависят от времени и от углов. Функция $\Psi(\xi, \tau)$ — малая поправка. При подстановке (20) в (19) в левой части уравнения достаточно удержать лишь член с $\varphi_0(\xi - \xi_0, u)$. После интегрирования получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left[\theta(\xi, \xi_1(\tau)) \xi_1(\tau) \frac{\partial \xi_1(\theta, \varphi, \tau)}{\partial \tau} + \theta(\xi, \xi_2(\tau)) \xi_2(\tau) \frac{\partial \xi_2(\theta, \varphi, \tau)}{\partial \tau} \right] &= \quad (21) \\ &= \hat{L}\Psi + Q(\varphi_0) \quad \theta(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ y/x & x > y \end{cases} \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы

$$\Psi(\xi, \tau) = \frac{1}{4} \left[\theta(\xi, \xi_1) \xi_1(\tau) \frac{\partial \xi_1(\theta, \varphi, \tau)}{\partial \tau} + \theta(\xi, \xi_2) \xi_2(\tau) \frac{\partial \xi_2(\theta, \varphi, \tau)}{\partial \tau} \right] \quad (22)$$

При этом в (21) останется член пропорциональный функции $\Psi_+(\xi)$, которая отлична от нуля в областях $\xi \sim 1$ вблизи точек $\xi = \xi_{1,2}$ положения межфазных границ. Потребуем обращения в нуль в этих точках коэффициента при $\Psi_+(\xi)$. Это требование приводит к уравнениям:

$$\left(\frac{d\xi_l}{d\tau} \right)_c = \left(1 - \frac{\ln 4u_0}{2\xi_0} \right) \left(\frac{d\xi_l}{d\tau} \right)_c + \frac{\ln 4u_0}{u_0 \xi_0} \left(\frac{du_l}{d\tau} \right)_c = \frac{1}{2\xi_0} \left(\frac{d\xi_l}{d\tau} \right)_H \quad (23)$$

$$\frac{1}{2u_0} \left(\frac{du_l}{d\tau} \right)_c = \frac{\ln 4u_0}{2\xi_0} \left(\frac{d\xi_l}{d\tau} \right)_c + \left(1 - \frac{\ln 4u_0}{2\xi_0} \right) \frac{1}{2u_0} \left(\frac{du_l}{d\tau} \right)_c = \frac{1}{2\xi_0} \left(\frac{1}{2u_0} \frac{du_l}{d\tau} \right)_H$$

описываемым (с точностью до членов более высокого порядка) релаксацию зародыша в системе с сохраняющимся параметром фазового перехода. Учет флуктуаций приводит (как и в (18)) к появлению в правых частях уравнений (23) соответствующих амплитуд случайной силы f_{st} [1]. Взаимодействием зародышей размеров $\xi_0 \gg 1$ между собой можно пренебречь ввиду их малой концентрации.

3. Частота образования зародышей

В работе [1] подробно обсуждалось, как на основании уравнений динамики зародышей найти различные статические величины, характеризующие процесс релаксации метастабильной фазы. Мы вычислим частоту J образования зародышей стабильной фазы в системе объема V . Введем плотность вероятности $W(\xi, u, \tau)$ найти в системе в момент времени τ зародыш, у которого средние по углам значения $\xi_0(\tau)$, $u_0(\tau)$ параметров $\xi_0(\theta, \varphi, \tau)$ и $u(\theta, \varphi, \tau)$ равны, соответственно, ξ и u . Эта величина есть плотность вероятности найти зародыш произвольного размера и формы, проинтегрированная по переменным ξ_e, u_e ($e \geq 1$). Стандартными методами теории случайных процессов [8] получим уравнение для функции $W(\xi, u, \tau)$:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} [a(\xi, u) W] + \frac{\partial}{\partial u} [b(\xi, u) W] = \frac{\partial}{\partial \xi} [D_1(\xi, u) \frac{\partial W}{\partial \xi}] + \frac{\partial}{\partial u} [D_2(\xi, u) \frac{\partial W}{\partial u}] \quad (24)$$

где величины

$$a(\xi, u) = \frac{d\xi_0}{d\tau} \Big|_{\xi, u}; \quad b(\xi, u) = \frac{du_0}{d\tau} \Big|_{\xi, u} \quad (25)$$

определены формулами (18), (23) соответственно в случаях несохраняющегося и сохраняющегося параметра. Парные корреляторы $D_i(\xi, u)$ в этих случаях есть:

$$D_1^H(\xi, u) = \frac{D^H}{2u(\xi^2 + e^2)}; \quad D_2^H = 2u D_1^H; \quad D_{12}^C(\xi, u) = \frac{1}{2\xi} D_1^H(\xi, u) \quad (26)$$

соответственно. При вычислении величин (26) мы считали силу $f_{st}(\xi, \tau)$, описывающую мелкомасштабные флуктуации, гауссовой и δ -коррелированной во времени и пространстве. Метастабильной фазе соответствует стационарное распределение $W(\xi, u)$ с малым потоком J зародышей в область больших значений среднего радиуса ($\xi \rightarrow \infty$). Это распределение должно удовлетворять очевидным граничным условиям:

$W(\xi, u)$ совпадает с равновесным распределением $W_0(\xi, u)$ для зародышей размеров много меньше критического; $W(\xi, u) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Учитывая, что

$$H(\xi, u) = \sqrt{1}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{2\sqrt{1}}{3} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{u} \right) (\xi_2^3 - \xi_1^3) + \frac{4\sqrt{1}h}{3} \left(\frac{\xi_1^3}{\lambda} + \frac{\xi_2^3}{\lambda} \right) \quad (27)$$

получим стационарное решение (24)

$$W(\xi, u) = V \omega \exp \left\{ - \frac{H(\xi, u)}{D} \right\} \cdot F(\xi, u) \quad (28)$$

$$F(\xi, u) = \begin{cases} 1 & \xi \ll \xi_c \\ 0 & \xi \gg \xi_c \end{cases}$$

откуда следует, что параметр $D = T$ (где T - температура, измерения в единицах $8g\varphi_1^6 \tau_c^3$); параметр ω является функцией только температуры и определен таким образом, чтобы при $F(\xi, u) = 1$ распределение (28) совпадало с равновесным. Подавляющая часть потока зародышей в фазовом пространстве проходит вблизи точки перевала ξ_c, u_c , поэтому для вычисления J функцию $F(\xi, u)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [V \omega D_1(\xi, u) \exp(-\frac{H}{T}) \frac{\partial F}{\partial \xi}] + 2u \frac{\partial}{\partial u} [V \omega D_2(\xi, u) \exp(-\frac{H}{T}) \frac{\partial F}{\partial u}] = \frac{\partial J_s}{\partial \xi} + \frac{\partial J_e}{\partial u} = 0 \quad (29)$$

достаточно найти лишь в перевальной области. Разложим $H(\xi, u)$ вблизи точки перевала и перейдем к нормаль-

ным координатам:

$$H(\xi, \mu) = H(\xi_c, \mu_c) - \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \quad (30)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{H_{\xi\xi} + H_{\mu\mu}}{2} \pm \left[\left(\frac{H_{\xi\xi} - H_{\mu\mu}}{2} \right)^2 + H_{\xi\mu}^2 \right]^{1/2} \Big|_{\xi_c, \mu_c}$$

Вблизи перевала компонентой потока J_y можно пренебречь $J_y \ll J_x$, при этом $F(x, y)$ оказывается функцией лишь переменной x :

$$F(x) = \frac{J_x(y)}{V\omega} \int_x^\infty \frac{\exp[H(x', y)/T]}{D_1(x', y)} dx' \quad (31)$$

Потребуем, чтобы при $x \approx -1$ $F(x)$ стремилась к единице, и получим

$$J_x(y) = \frac{V\omega}{\sqrt{2\pi/\lambda_1}} D_1(\xi_c, \mu_c) \exp[-H(\xi_c, \mu_c)/T] e^{-\lambda_2 y^2} \quad (32)$$

Проинтегрировав (32) по y найдем частоту образования зародышей

$$J = V\omega \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \right)^{1/2} D_1(\xi_c, \mu_c) \exp[-H(\xi_c, \mu_c)/T] \quad (33)$$

Время жизни метастабильной фазы $t_m = J^{-1}$ запишем в размерных единицах в случаях несохраняющегося и сохраняющегося параметра фазового перехода:

$$t_m^H = \frac{16\sqrt{\pi}}{V\omega} \frac{\tau_c^3 \varphi_1^2}{hT} \left(\frac{\lambda_2}{|\lambda_1|} \right)^{1/2} (\xi_c^2 + \mu_c^2) \exp\left[\frac{8g\varphi_1^6 \tau_c^3}{T} H(\xi_c, \mu_c) \right] \quad (34)$$

$$t_m^C = \frac{128\sqrt{\pi}}{V\omega} \frac{\tau_c^5}{c g \varphi_1^6 T} \left(\frac{\lambda_2}{|\lambda_1|} \right)^{1/2} \xi_c (\xi_c^2 + \mu_c^2) \exp\left[\frac{8g\varphi_1^6 \tau_c^3}{T} H(\xi_c, \mu_c) \right]$$

где τ_c радиус корреляции флуктуаций в системе; объем измерен в единицах τ_c^3 ; величина g выражается через восприимчивость χ_h системы по полю h

$$g = (4\varphi_1^4 \chi_h)^{-1} \quad (35)$$

Вопрос о вычислении величины $\omega(T)$ обсуждался в работе [5]. Заметим, что вблизи трикритической точки при изменении параметров h и μ ω практически не изменяется, поэтому при экспериментальной проверке формул (34) величина $\omega(T)$ может быть нормирована по одному из экспериментальных результатов.

В ряде работ (см. например [6]) предполагалось, что релаксацию метастабильной фазы в стабильную при наличии промежуточных метастабильных состояний можно описать как последовательное преодоление нескольких перевалов в фазовом пространстве. Как следует из полученных в данной работе результатов, такие представления не верны. Перевал в фазовом пространстве один, хотя его положение и величина минимальной работы образования закритического зародыша зависят более чем от одного параметра.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Спектр оператора (11)

Задача об определении спектра собственных значений оператора сводится (с точностью до экспоненциально малых поправок $\sim \exp(-\xi_0)$, $\xi_0 \gg 1$) к одномерной квантомеханической задаче с потенциалом, изображенным на рис.2., причем $L_n = -\epsilon_n$. Очевидно, оператор имеет непрерывный спектр $L_n \leq -4$ и некоторое число уровней $-4 < L_n < -1$. Основному состоянию отвечает функция

$$\Psi_+(\xi, u) = \frac{d\psi_0}{d\xi}; \quad \hat{L}\Psi_+ = 0 \quad (\text{П.1})$$

которая представляет собой (как нетрудно видеть, подставив (8)) симметричную комбинацию двух функций, каждая из которых отлична от нуля лишь вблизи одного из минимумов потенциала. Антисимметричная комбинация

$$\Psi_-(\xi, u) = \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \quad (\text{П.2})$$

соответствует уровню с малым отрицательным собственным значением ($|L| \sim 1/u$), точное значение которого вычислять нет необходимости. Покажем, что других состояний $-1 < L < 0$ нет. Вблизи точки минимума

$\xi_2 = \xi_0 + \frac{1}{2} \ln 4u$ потенциал, выписанный с точностью до членов $1/u$, есть:

$$V(x) = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} \text{th} x + \frac{15}{4} \text{th}^2 x; \quad x = \xi - \xi_2 \quad (\text{П.3})$$

Потенциал

$$\bar{V}(x) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{2} |\text{th} x| + \frac{15}{4} \text{th}^2 x \quad (\text{П.4})$$

совпадает с (П.3) при $x < 0$, а при $x \geq 1$, $V(x) - \bar{V}(x) = 3$. Очевидно, связанные уровни (П.4)

будут лежать несколько глубже, чем соответствующие уровни (П.3). Задача (П.4) легко сводится к задаче с потенциалом Пешля-Теллера, решение которой известно (см. [7]). Получим: $L_0 = 0,17$ — этот уровень при точном решении с учетом второй ямы и дает состояния (П.1, П.2);

$L_1 \approx -1$ следующий связанный уровень. Следовательно, все собственные функции оператора (11), кроме (П.1, П.2), имеют собственные значения $L_n \leq -1$.

2. Разложение $Q(\psi_0)$

При разложении функции $Q(\psi_0)$ по собственным функциям оператора \hat{L} необходимо вычислить интегралы вида

$$J = \int_0^\infty Q(\psi_0) \psi_\pm \xi^2 d\xi \quad (\text{П.5})$$

Функции ψ_\pm порядка единицы в областях шириной $\delta \xi \sim 1$ вблизи точек $\xi_{1,2}$ положения межфазных границ. Вне этих областей функции малы. Учитывая, что функция $Q(\psi_0)$ уже является малой, достаточно вычислить старшие члены

$$J = \xi_1^2 \int_{-\infty}^{\xi_0} Q(\psi_0) \psi_\pm d\xi + \xi_2^2 \int_{\xi_0}^{\infty} Q(\psi_0) \psi_\pm d\xi \quad (\text{П.6})$$

Переходя к интегрированию по $d\psi_0$ легко вычислим J

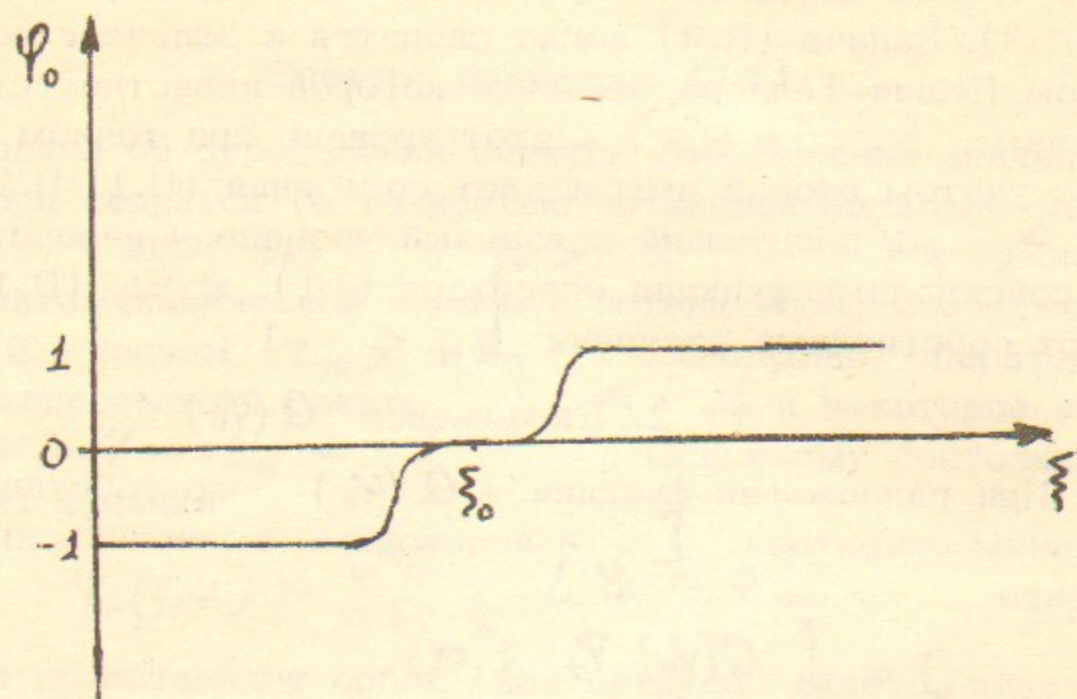


Рис.1.
Конфигурация $\psi_0(\xi - \xi_0, u)$

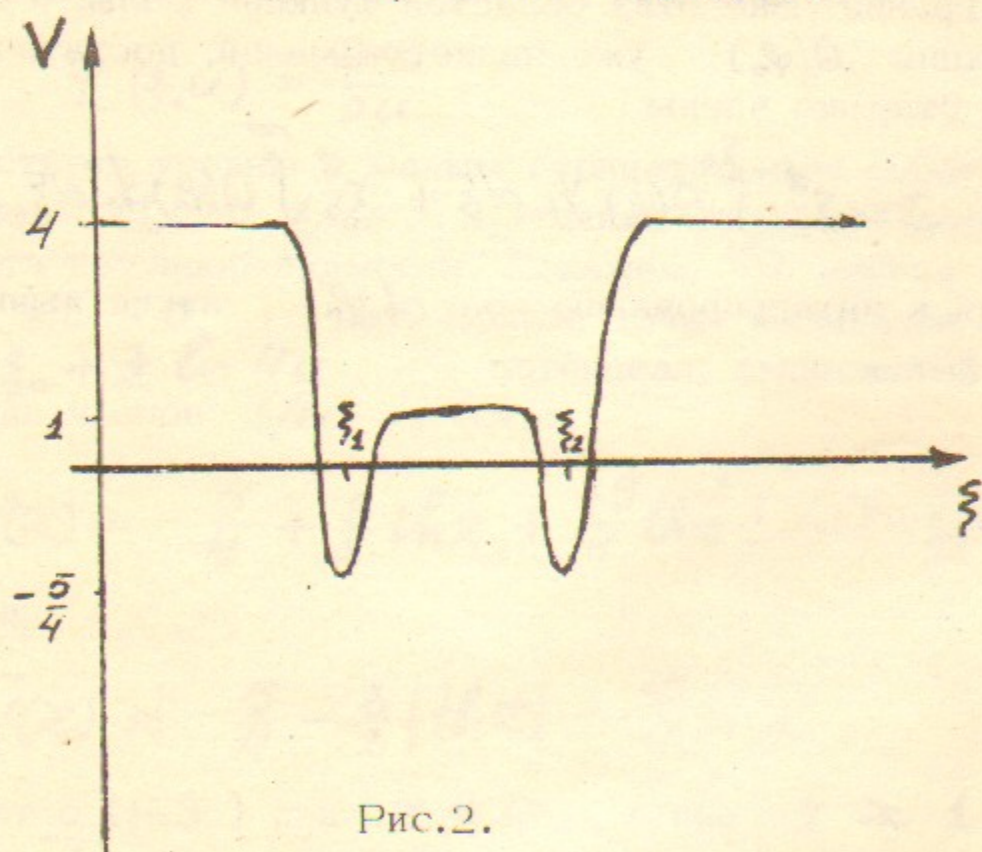


Рис.2.

Л и т е р а т у р а :

1. А.З.Паташинский, Б.И.Шумило. ЖЭТФ 77, 1418, (1979).
2. Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ 12, 525 (1942).
3. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. М., "Наука" (1975).
4. *A.Z. Patashinskii, B.I. Shumilo*
Phys. Letters 61A, 13 (1977)
5. А.З.Паташинский, Б.И.Шумило. "Теория зародышеобразования при фазовом переходе первого рода", Новосибирск. Препринт ИЯФ 79-101 (1979).
6. Б.И.Кидяров "Кинетика образования кристаллов из жидкой фазы", Новосибирск, "Наука" (1979).
7. З.Флюгге. "Задачи по квантовой механике" т.1, М. (1974)
8. Б.Гнеденко. Курс теории вероятности. М., 1969.