

В.41

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

Ф.Вивальди, Дж.Форд, Ф.М.Израйлев.

Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

МОДУЛЯЦИОННАЯ ДИФФУЗИЯ В НЕЛИ-  
НЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

ПРЕПРИНТ 81-70



Новосибирск

V

МОДУЛЯЦИОННАЯ ДИФФУЗИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ <sup>\*)</sup>

Ф. Вивальди <sup>\*\*)</sup>, Ф. М. Израйлев, Дж. Форд <sup>\*\*)</sup>,  
Б. В. Чириков, Д. Л. Шепелянский

Численно и аналитически исследуется диффузия, возникающая в многомерных нелинейных колебательных системах при наличии низкочастотной модуляции. Показано, что скорость диффузии вдоль стохастического слоя экспоненциально падает с уменьшением глубины модуляции. Изучено влияние резонансов с высокими гармониками, вплоть до  $m = 20$ . Как и диффузия Арнольда, модуляционная диффузия может быть существенна при учете тонких эффектов в многомерных нелинейных системах.

---

<sup>\*)</sup> Доклад на IX Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев 1981).

<sup>\*\*) Школа физики Технологического института (г. Атланта, шт. Джорджия, США).</sup>

## И. Введение

Как надежно установлено к настоящему времени поведение классических (не квантовых) динамических систем может характеризоваться широким спектром статистических свойств вплоть до настоящей случайности (см., например, /1-5/). В последнем предельном случае движение допускает простое статистическое описание и представляет из себя, по существу, релаксацию к микроканоническому распределению для замкнутой системы или некоторую неограниченную диффузию в фазовом пространстве (для гамильтоновой системы) под действием внешнего регулярного возмущения. Такого рода внутренней стохастичности можно противопоставить обратному предельному случаю динамической эволюции — квазипериодическому движению, структура которого также весьма проста. Однако в практических приложениях приходится встречаться, как правило, со значительно более сложной промежуточной ситуацией так называемого разделенного фазового пространства /5/, которое представляет собой весьма хитрую мозаику областей как с регулярным, так и со стохастическим движением. Ярким примером может служить так называемая диффузия Арнольда, которая распространяется по всюду плотной системе очень узких стохастических слоев нелинейных резонансов (рис. I). Этот пример тонкой гамильтоновой динамики уже обсуждался на одной из предыдущих Международных конференций по нелинейным колебаниям /6/ (см. также /5, 10, 11/).

Ниже мы рассмотрим другой механизм диффузии в многомерной колебательной системе /7, 8/, который был назван модуляционной диффузией и который напоминает диффузию Арнольда. Основное различие между двумя механизмами лежит в природе стохастических слоев, по которым идет диффузия. В случае диффузии Арнольда слои образуются на месте невозмущенных сепаратрис нелинейных резонансов (рис. I, S) и оказываются обычно экспоненциально узкими, но универсальными в том смысле, что они сохраняются при произвольно слабом возмущении /5, 9/.

Модуляционный стохастический слой, с другой стороны, есть результат перекрытия резонансов внутри мультиплета, образованного под действием низкочастотной модуляции, внутренней или внешней. Ширина слоя зависит в этом случае не от возмущения, а от глубины модуляции и обычно значительно превышает ширину стохас-

тического слоя сепаратрисы (рис. 1, М). Однако для перекрытия резонансов мультиплета необходимо конечное возмущение. Скорость диффузии в слое оказывается сравнимой в обоих случаях, однако, из-за значительно большей ширины модуляционных стохастических слоев, последние, вероятно, много опаснее.

Как модуляционная диффузия, так и диффузия Арнольда могут играть существенную роль в некоторых приложениях к динамическим системам с пренебрежимо малой диссипацией. Важным примером, который является фактически стимулом настоящей работы, служит проблема устойчивости движения протона (или антипротона) в накопительном кольце установки со встречными пучками — гигантский проект, достаточно дорогой, чтобы оправдать широкие исследования даже таких своеобразных и тонких эффектов как модуляционная диффузия и диффузия Арнольда.

## 2. Спектр движения в модуляционном стохастическом слое

Как мы увидим ниже, центральной проблемой при оценке скорости диффузии являются спектральные свойства движения в стохастическом слое. Для достаточно узкого сепаратрисного слоя ( $\Delta\omega_s \ll \Delta\omega$ , см. рис. 1) эта проблема оказывается неожиданно простой, поскольку движение в таком слое близко к движению по невозмущенной сепаратрисе. Однако для модуляционного слоя такое упрощение уже не имеет места, и мы сталкиваемся с одной из интересных задач нелинейной механики.

Мы исследовали эту задачу путем численных экспериментов на простой модели с гамильтонианом

$$H(p, \varphi, t) = \frac{p^2}{2} + k \cos(\varphi + \lambda \cos \omega_m t) \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_m$  — частота модуляции, а ее глубина  $\lambda$  определяет эффективное число линий мультиплета.

При условии (см. /5, 12/)

$$K_m \approx 2.5 S^2 \approx 23 \frac{k}{\lambda \omega_m^2} > 1 \quad (2.2)$$

где  $S$  — параметр перекрытия резонансов, образуется сплошная стохастическая компонента или модуляционный слой шириной  $2\Delta\omega_s \approx 2\lambda\omega_m$  ( $S < \lambda$ ). Для достаточно быстрой диффузии в слое необ-

ходимо выполнение еще одного условия /12/:

$$V = \frac{|\dot{\omega}_r|}{\Omega_\varphi^2} = \frac{\lambda \omega_m^2}{k} > 1 \quad (2.3)$$

Физический смысл этого условия связан с другим представлением возмущения в (2.1), а именно, вместо мультиплета стационарных резонансов  $\dot{\varphi} = p = m\omega_m$  ( $m$  — целое) можно рассматривать один медленно движущийся резонанс  $\dot{\varphi} = \omega_r(t) = \lambda\omega_m \sin \omega_m t$  с частотой фазовых колебаний  $\Omega_\varphi = \sqrt{k}/12$ . В таком случае имеет место многократное прохождение этого резонанса, и для того, чтобы диффузия была быстрой, прохождение резонанса также должно быть быстрым, а это зависит от безразмерной скорости прохождения  $V$ . В случае медленного прохождения ( $V < 1$ ) скорость диффузии быстро падает с  $V$  и время заполнения слоя становится слишком большим.

Рассмотрим вспомогательную динамическую переменную  $Z$ , представляющую другую степень свободы и подчиняющуюся уравнению

$$\dot{Z} = \varepsilon \sin(\varphi - \omega t) \quad (2.4)$$

где  $\varphi(t)$  определяется движением системы (2.1);  $\varepsilon$  — параметр возмущения, а  $\omega$  — расстройка по частоте между двумя степенями свободы. Если  $\varphi(t)$  — случайная функция (вследствие стохастического движения в слое), то переменная  $Z(t)$  также описывает некоторый случайный процесс со скоростью диффузии

$$D(\omega) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\Delta Z)_t^2}{t}; \quad \Delta Z = \varepsilon \int_0^t \sin(\varphi(t') - \omega t') dt' \quad (2.5)$$

Заметим, что  $D(\omega)$  пропорциональна Фурье-компоненте корреляционной функции для  $\sin \varphi(t)$ . На рис. 2 показан пример зависимости  $D(\omega)$  в весьма большом диапазоне (почти 30 порядков!) в безразмерных переменных  $\omega/\Delta\omega$  и  $D_R = D\Delta\omega/\varepsilon^2$ . Существуют две качественно различных области диффузии:

1) резонансное "плато" ( $|\omega| \leq \Delta\omega$ ) с наибольшей и приблизительно постоянной скоростью диффузии из-за резонанса при  $\dot{\varphi} = \omega$  ( $|\dot{\varphi}| \leq \lambda\omega_m$  в пределах слоя);

2) "нерезонансная" область экспоненциально медленной диффузии ( $|\omega| \geq \Delta\omega$ ). В последнем случае точный резонанс первого приближения  $\dot{\varphi} = \omega$  никогда не достигается, а диффузия идет за счет резонансов высших порядков вследствие высокочастотного "хвоста" движения в слое.

Во многих приложениях такой медленной диффузией можно полностью пренебречь, как это следует и непосредственно из простого метода усреднения (см., например, /13/). Рис.2 показывает, что в рассматриваемом случае точность этого метода весьма высока. Мы, однако, интересуемся как раз такими специальными случаями, когда даже чрезвычайно слабые эффекты могут иметь значение.

Скорость диффузии по  $Z$  может быть грубо описана выражениями /8/:

$$D_R \approx \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & |\omega| < \Delta\omega \approx \lambda\omega_m \\ \frac{\ln s}{2\lambda} \exp(-\alpha(\frac{|\omega|}{\Delta\omega} - 1)); & |\omega| > \Delta\omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Постоянная  $\pi/2$  получается непосредственно из условия нормировки /8/

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_R(\frac{\omega}{\Delta\omega}) \frac{d\omega}{\Delta\omega} = \pi$$

принимая, что основной вклад в  $D_R$  определяется областью резонанса  $\varphi \approx \omega$ . Наиболее интересное второе выражение в (2.6), показанное на рис.2 прямой линией, является полуэмпирическим. Среднее численное значение множителя в экспоненте  $\langle \alpha \rangle = 6.21 \pm 0.17 \approx 2\pi$ .

Множитель  $(\ln s)/\lambda$  в (2.6) был получен из предположения, что скорость  $\gamma$  убывания корреляций  $R(\tau)$  асимптотически пропорциональна КС-энтропии в модуляционном стохастическом слое:

$$R(\tau) \rightarrow \frac{e^{-\gamma\tau}}{\tau \rightarrow \infty}; \quad \gamma = ch \approx c \frac{\omega_m}{\pi} \ln s \quad (2.7)$$

Последнее выражение для  $h$  подтверждается численными экспериментами, а численное значение константы  $c \approx 0.5$  (подробности см. в /8/).

Как видно из рис.2, оценка (2.6) согласуется с численными данными по порядку величины, хотя помимо больших флуктуаций можно заметить, что зависимость  $D(\omega)$  является на самом деле более сложной (см. также рис.4 в /8/).

### 3. Методика численного эксперимента

Основная трудность, с которой мы встретились в численных экспериментах, связана с очень малой скоростью диффузии (см.

рис.2). Для подавления "фона" (главным образом из-за больших осцилляций с частотой  $\sim \omega$ ) мы проводили специальное усреднение диффундирующей величины  $v(t) (= z(t)$  для (2.5)):

$$v(t) \rightarrow \bar{v}_i = \int_{t_i - T/2}^{t_i + T/2} v(t) g(\frac{t-t_i}{T/2}) \frac{dt}{T/2} \quad (3.1)$$

Здесь  $T$  - период усреднения (обычно  $0.01 + 0.1$  от полного времени движения  $t_m$ ), а  $g(\tau)$  ( $|\tau| < 1$ ) - нормированная весовая функция. В простейшем случае, когда  $g(\tau) = 1/2$  методика численного определения малой скорости диффузии подробно описана в /6,5,11/. Поскольку фактор подавления осцилляций  $v(t)$  на частоте  $\omega$ , т.е. относительное уменьшение амплитуды этих осцилляций за счет усреднения, пропорционален соответствующей Фурье-компоненте от  $g(\tau)$ , то более гладкая  $g(\tau)$  кажется более предпочтительной. Удобной формой  $g(\tau)$ , использованной в этой работе, является

$$g(\tau) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1} n!} (1-\tau^2)^n \approx \sqrt{\frac{2n+3}{2\pi e}} \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^{n+\frac{1}{2}} (1-\tau^2)^n \quad (3.2)$$

обеспечивающая фактор подавления

$$S(\omega) = 2^{2n+1} \Gamma(n+\frac{3}{2}) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\frac{\omega T}{2})}{(\omega T)^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{e}} \left(\frac{4n+6}{e\omega T}\right)^{n+1} \sin(\frac{\omega T - \pi n}{2}) \quad (3.3)$$

где  $\Gamma, J_n$  - гамма и бesselовы функции, соответственно;  $e = 2.71\dots$ , а последнее выражение дает асимптотическую зависимость  $S(\omega T, n)$  при  $\omega T \gg n$ , тогда как в противоположном пределе ( $\omega T \lesssim \sqrt{n}$ )  $S \approx 1$ . Любопытно отметить, что приближенные выражения в (3.2,3) справедливы с точностью в несколько процентов даже при  $n = 0$ .

Таким образом, "гладкое" усреднение значительно улучшает подавление фона, хотя, в то же время, оно увеличивает граничную частоту эффективного подавления ( $\omega T \gg n$ ). Численные данные на рис.2 получены с весом (3.2) при  $n = 6$ . Остаточный фон (последние 3 точки) определяется в этом случае ошибками округления (длина мантииссы 56 бит).

Другой особенностью нашей методики является специальная схема численного интегрирования уравнений движения /6,11/, которая может быть названа гамильтоновой, или канонической, поскольку

ку она точно сохраняет фазовую плотность и, таким образом, уменьшает накопление ошибок счета.

#### 4. Простой пример модуляционной диффузии

Для первоначального исследования модуляционной диффузии мы выбрали простую модель с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 \cos(\Omega t + \lambda \sin \omega_M t) \quad (4.1)$$

Модель представляет собой два нелинейных осциллятора, связанных малым линейным (по силе) возмущением с параметром  $\mu \ll a_i^2$  ( $a_i$  — амплитуда колебаний,  $i = 1, 2$ ), и находящихся под действием частотно-модулированного внешнего возмущения со средней частотой  $\Omega$  и малым параметром  $\varepsilon \ll a_i^3$ . В отсутствие модуляции динамика близкой модели изучалась в [6, 5, II], главным образом, в отношении диффузии Арнольда по резонансу связи  $\omega_1 = \omega_2$  ( $\omega_i = \beta a_i$  ( $\beta \approx 0.85$ ) — невозмущенные частоты движения ( $\mu = \varepsilon = 0$ )). Здесь мы рассмотрим другую задачу — диффузию в модуляционном слое внешнего резонанса  $\omega_1 = \Omega$ .

Невозмущенное движение имеет вид (см., например, [5])

$$\frac{x_i(t)}{a_i} \approx \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\cos[(2q+1)\omega_i t]}{23^q} \approx a_i \cos \theta_i \quad (4.2)$$

При выполнении условий (см. (2.2, 3))

$$K_M \approx 11 \beta^2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda} a_1 \omega_M^2} > 1$$

$$V \approx \frac{2}{\beta^2} \frac{\lambda a_1 \omega_M^2}{\varepsilon} \approx 22 \frac{\sqrt{\lambda}}{K_M} > 1 \quad (4.3)$$

внешнее возмущение ( $\varepsilon$ ) приводит к образованию модуляционного слоя с быстрой диффузией по  $a_1$ , а связь ( $\mu$ ) вызывает диффузию вдоль внешнего резонанса  $\omega_1 \approx \Omega$ . Оценку скорости диффузии по  $a_2$  (или  $\omega_2$ ) можно получить из уравнения (см. [8])

$$\dot{\omega}_2 \approx I_2 \frac{d\omega_2}{dI_2} \approx \frac{\beta^2}{2} \mu \frac{a_1}{a_2} \sin(\theta_1 - \omega_2 t) \quad (4.4)$$

где мы положили приближенно  $\theta_2 \approx \omega_2 t$ , оставили только первый член ряда (4.2) для  $x_2$  (см. ниже) и пренебрегли нерезонанс-

ным слагаемым  $\sin(\theta_1 + \omega_2 t)$ . Если теперь записать  $\theta_1 \approx \omega_1 t + \varphi$ , то уравнение (4.4) принимает форму (2.4) с расстройкой  $\omega = \omega_2 - \omega_1$ , а  $\varphi(t)$  определяется движением в слое резонанса  $\omega_1 = \Omega$ . При условии, что  $\mu$  достаточно мало ( $\mu \ll \varepsilon/a_2$ ), это движение можно считать независимым от диффузии по  $\omega_2$  и, используя результаты раздела 2 (см. (2.6)), мы приходим к оценке

$$D_{\omega_2}^{(1)} \approx \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\mu^2}{\lambda \omega_M} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2; & |\omega_1 - \omega_2| < \lambda \omega_M \\ \frac{\mu^2}{16} \frac{\ln 5}{\lambda^2 \omega_M} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \exp(-2\pi \left[\frac{\omega_1}{\lambda \omega_M} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - 1\right]); & |\omega_1 - \omega_2| > \lambda \omega_M \end{cases} \quad (4.5)$$

где верхний индекс указывает, что оставлен только первый член ряда (4.2).

Механизм диффузии вдоль модуляционного слоя резонанса  $\omega_1 = \Omega$  под действием связи можно рассматривать также как "перекачку стохастичности" из одной степени свободы в другую. Такая наглядная картина диффузии в стохастическом слое была развита в [10] и кратко упоминалась в [14]. Так называемая "диффузия в толстом слое", которая изучалась в [10], похожа по механизму на модуляционную диффузию на плато (первое выражение в (4.5)).

Пример зависимости  $D_{\omega_2}(\omega_1/\omega_2)$ , полученной в серии предварительных численных экспериментов, приведен на рис. 3 (кружки). Три первых численных значения действительно напоминают экспоненциальную зависимость в (4.5), однако, для больших  $\omega_1/\omega_2$  скорость диффузии изменяется значительно более сложным образом. Мы догадались, что это можно объяснить влиянием высших резонансов связи ( $\omega_1 = m \omega_2$ ,  $m = 2q + 1$ ), соответствующих гармоникам невозмущенного движения, несмотря на то, что на первый взгляд кажется, что ими можно пренебречь. Скорость диффузии под действием гармоники  $m$  получается из (4.2, 5)

$$D_{\omega_2}^{(m)} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = D_{\omega_2}^{(1)} \left(\frac{\omega_1}{m \omega_2}\right) \cdot \frac{m^4}{23^{m-1}} \quad (4.6)$$

Принимая, что различные резонансы связи действуют независимо и суммируя  $D_{\omega_2}^{(m)}$ , получим теоретическую оценку для  $D_{\omega_2}(\omega_1/\omega_2)$ , показанную на рис. 3 сплошной линией. Ясно видны несколько первых

резонансов с их плато и экспоненциальными "хвостами". Согласие между теорией и численными данными остается довольно хорошим вплоть до  $\omega_1/\omega_2 \approx 9$  и все еще сохраняется по порядку величины даже до  $\omega_1/\omega_2 \approx 15$ . Здесь, по-видимому, нарушается использованное выше приближение  $X_2 \approx a_2 \cos \omega_2 t$  поскольку

$$\frac{\mu a_1 a_2}{a_2^4/4} = \frac{4\mu}{a_1^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^3 \approx 0.3$$

Природа "плато" при  $\omega_1/\omega_2 > 15$  остается пока невыясненной и требует дальнейших исследований. Отметим, что при выходе из слоя ( $\omega_1 - \Omega \approx 3\lambda\omega_m$ ) наблюдаемая скорость диффузии падает по крайней мере на 4 порядка. Это означает, что уровень фона значительно меньше скорости диффузии на "плато".

## Л и т е р а т у р а

- I. V.I. Arnold, A. Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, 1968).
2. И.П. Корнфельд, Я.Г. Синай, С.В. Фомин, Эргодическая теория (Москва, Наука, 1980).
3. В.М. Алексеев, М.В. Якобсон, Символическая динамика и гиперболические динамические системы, Добавление в книге Р. Боуэн, Методы символической динамики, Мир, М., 1979.
4. J. Ford, A Picture Book of Stochasticity, A.I.P. Conf. Proc. No 46, 1978, p. 121.
5. B.V. Chirikov, Physics Reports 52:5 (1979) 263.
6. Г.В. Гадияк, Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков, Труды 7-й Международной конференции по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975), т. II, I, с. 315.
7. B.V. Chirikov, Adiabatic Invariants and Stochasticity in Magnetic Confinement Systems, Proc. Int. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980, Vol. II, p. 176.
8. Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский, Динамическая стохастичность в классической механике, препринт 80-209, Институт ядерной физики, Новосибирск, 1980.
9. Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский, Статистика возвратов Пуанкаре и структура стохастического слоя нелинейного резонанса, доклад на этой конференции.
10. J.L. Tennyson, M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg, in Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction, A.I.P. Conf. Proc. No 57, 1979, p. 272.
11. B.V. Chirikov, J. Ford, F. Vivaldi, *ibid*, p. 323.
12. Б.В. Чириков, Д.Л. Шепелянский, Диффузия при многократном прохождении нелинейного резонанса, препринт 80-211, Институт ядерной физики, Новосибирск, 1980.
13. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Наука, М., 1974.
14. C. Froeschle, *Astroph. and Space Sci.* 14 (1971) 110.

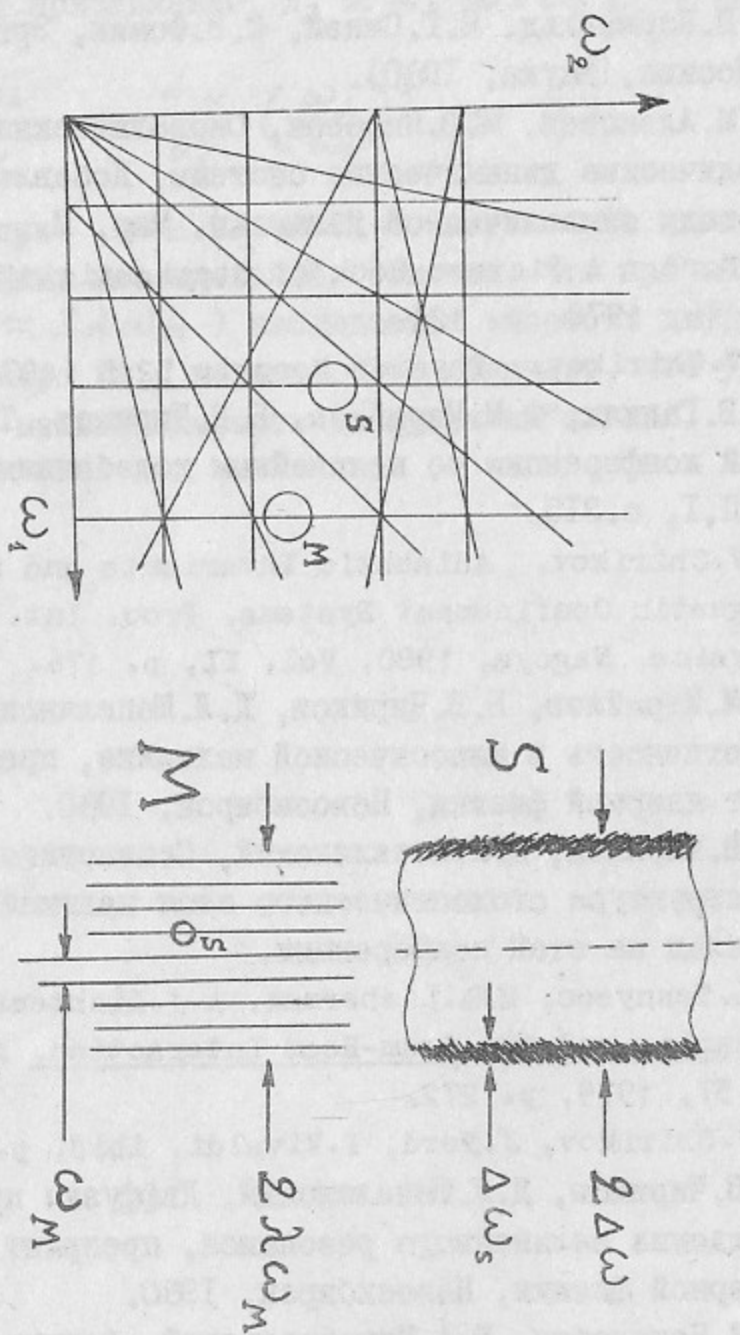


Рис. 1 Схема резонансной структуры:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  - основные невозмущенные частоты;  $\lambda \gg 1$ ,  $\omega_M \ll \omega_{2,1}$  - глубина и частота модуляции,  $S$  - увеличенный участок внешнего резонанса в отсутствии модуляции;  $\Delta\omega$ ;  $\Delta\omega_2 \sim \Delta\omega \exp(-\gamma\omega/\Delta\omega)$  - ширина резонанса и его стохастического слоя (затухающего);  $\omega$  - расстройка по частоте (см. текст);  $M$  - то же для резонанса, расщепленного в модуляторе под действием модуляции.

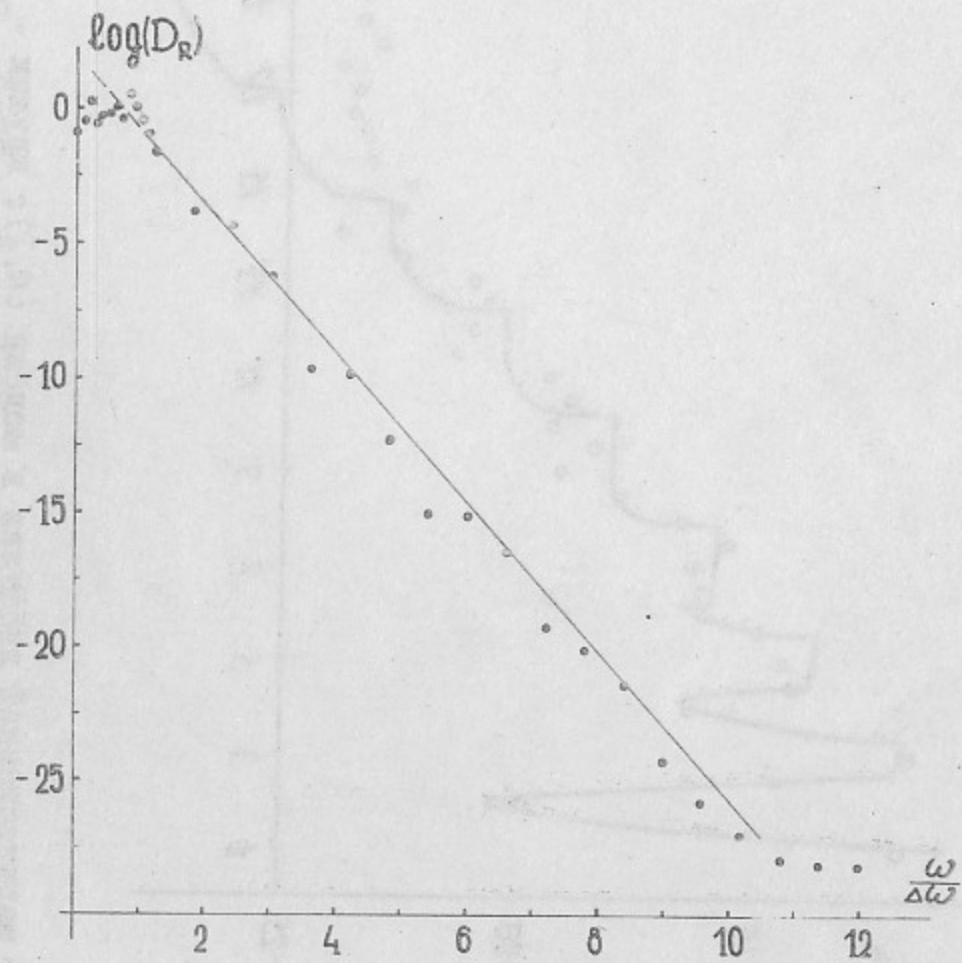


Рис. 2 Спектр корреляций  $D(\omega)$  в модуляционном стохастическом слое для модели (2.1):  $D_R = D\omega/\epsilon^2$ ;  $\lambda = 10$ ;  $\omega_M = 0.01$ ;  $\Delta\omega = 0.13$  (эмпирическое значение);  $k = 5 \times 10^{-4}$ ;  $t_m = 10^6$ ;  $s \approx 4$ ;  $K_m \approx 40$ ;  $V \approx 2$ . Время усреднения  $\tau = 10^5$ ;  $n = 6$  (3.2). Логарифм десятичный.



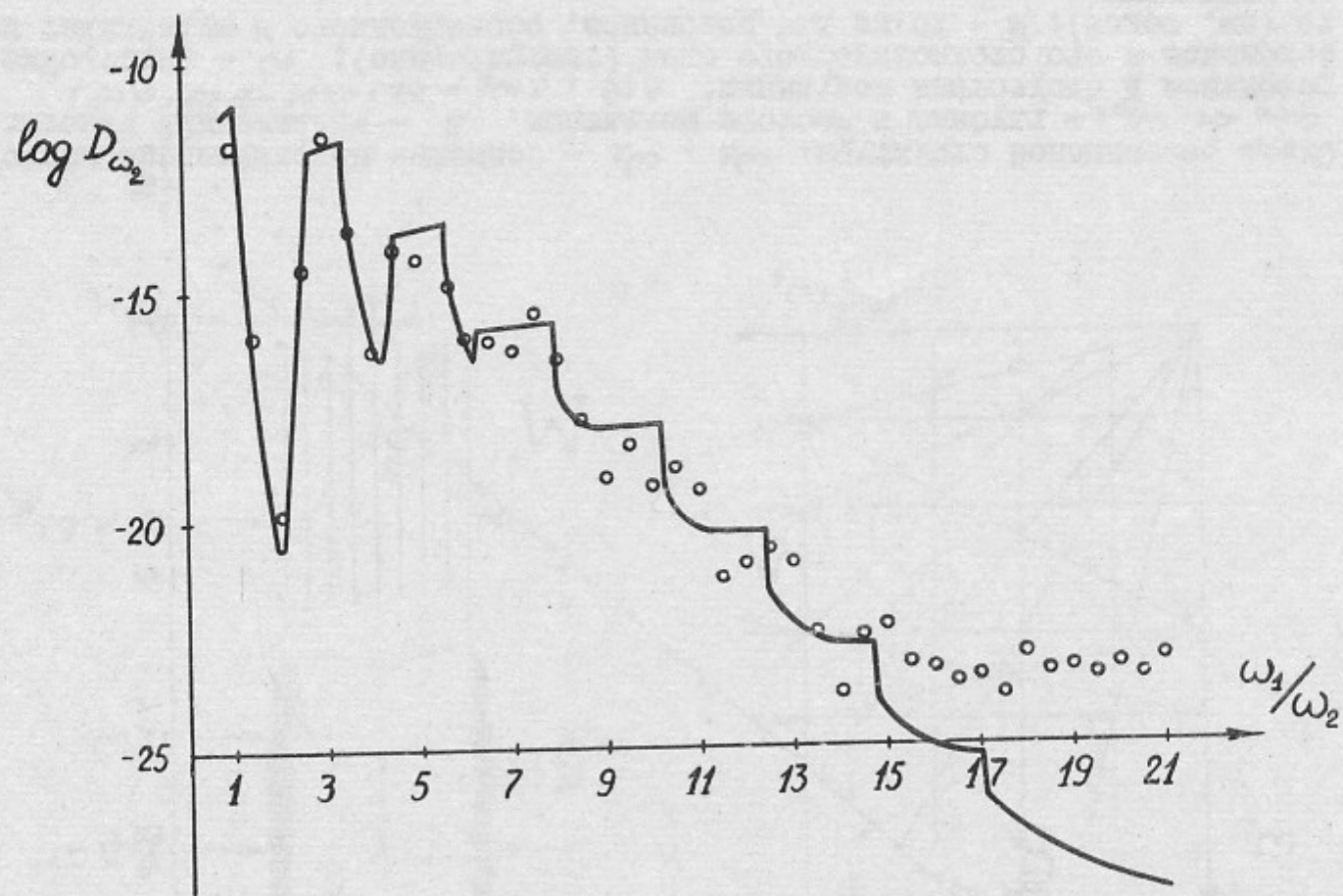


Рис. 3 Пример модуляционной диффузии в модели (4.1): кружки - численные данные; линия - теория (4.5, 6);  $a_1 = 0.2$ ;  $\mu = 10^{-6}$ ;  $\epsilon = 10^{-5}$ ;  $\Omega = 0.169$ ;  $\lambda = 10$ ;  $\omega_m = 0.002$ ;  $t_m = 10^6$ ;  $s \approx 3.5$ ;  $K_m \approx 30$ ;  $V \approx 2$ ;  $T = 10^5$ ;  $n = 4$ .  
Логарифм десятичный.

Работа поступила 14 апреля 1981 г.

---

Ответственный за выпуск С.Г.Попов  
Подписано к печати 24.6-1981г. МН 03196  
Усл. 1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 70.

---

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР