

1

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

В.В.Вечеславов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК  
И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ХАРАКТЕРИСТИК  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, I

ПРЕПРИНТ 81 - 01



Новосибирск

## I. Введение

Относительно недавно было установлено, что многие нелинейные колебательные гамильтоновы системы допускают как регулярные, так и стохастические режимы движения. Фазовое пространство таких систем оказывается сложным образом разделено на устойчивые и стохастические области и основным динамическим механизмом, порождающим эту фазовую структуру, является взаимодействие нелинейных резонансов [1]. Важное значение приобрело понятие стохастического слоя. В неконсервативных системах всего лишь с одной степенью свободы контакты между стохастическими слоями основных резонансов ликвидируют нелинейную стабилизацию и могут привести к стохастической раскачке колебаний. Определение пороговых (в смысле наступления этой неустойчивости) значений параметров весьма важно для практики. В консервативных системах с числом степеней свободы более двух при сколь угодно малом возмущении стохастические слои образуют единую сложную сеть, вдоль которой осуществляется пока еще мало изученный процесс развития универсальной неустойчивости, получивший название диффузии Арнольда [1,3]. Оценки скорости этой диффузии, особенно при наличии в системе "шума" или обычной диффузии, представляют большой интерес с принципиальной и практической сторон для ряда проблем нелинейной динамики [1].

Решение некоторых из перечисленных выше вопросов в конкретных ситуациях значительно облегчается, если предварительно отыскать точные фазовые координаты устойчивых (центры) и неустойчивых (седла) неподвижных точек, т.к. первые непосредственно связаны с областями автофазировок, а вторые — со стохастическими слоями нелинейных резонансов. Осуществить это с помощью аналитических подходов, как правило, не удастся и ниже делается попытка разработать численные методы. Опробование предлагаемых методов проводится на описанной в п.2 и имеющей определенный практический интерес простой одномерной модели взаимодействия встречных пучков в накопителях заряженных частиц. Знание седловых точек этой модели дает возможность относительно просто установить для нее наличие или отсутствие контактов между стохастическими слоями отдельных резонансов и определить тем самым

порог наступления стохастической неустойчивости колебаний.

## 2. Одномерная модель взаимодействия встречных пучков.

Одна из актуальных задач современной ускорительной техники — повышение светимости установок со встречными пучками частиц. Решение этой задачи требует изучения динамики встречных взаимодействий с детальным учетом стохастических эффектов. Простейшей одномерной моделью здесь является многократная встреча одиночного заряда с коротким сгустком круглого сечения. Эта модель в приближении тонкой линзы и гауссового распределения заряда изучалась, например, в работе [4] и именно она будет рассматриваться ниже в качестве конкретного примера.

Если использовать относительные переменные и условия, введенные в [4], то движение одиночного заряда можно исследовать с помощью гамильтониана:

$$\mathcal{H} = \frac{\nu}{2} \cdot (p^2 + x^2) - \xi \cdot \delta_{2\pi}(\theta) \cdot U(x). \quad (1)$$

В этом выражении:

- $\nu$  — частота невозмущенных бетатронных колебаний;
- $\xi$  — параметр встречного взаимодействия, зависящий от величин и распределений зарядов в пучках;
- $\delta_{2\pi}$  — дельта-функция, имеющая период  $2\pi$  относительно азимутальной координаты ускорителя  $\theta$ .

Потенциал встречного взаимодействия равен [5]:

$$U(x) = -4\pi \cdot \left[ \mathcal{C} + \ln\left(\frac{x^2}{2}\right) - Ei\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right], \quad (2)$$

где  $\mathcal{C} = 0,577215665$  — постоянная Эйлера,

$Ei$  — интегральная показательная функция.

Особенностью системы (1) является то, что нелинейность вносится в нее встречным взаимодействием, имеющим характер толчков. Если фиксировать положение заряда на фазовой плоскости в моменты встреч, то движение можно рассматривать как последовательность точечных отображений  $(x_1, p_1) \Rightarrow (x_2, p_2)$ :

$$x_2 = x_1 \cdot \cos 2\pi\nu + \left[ p_1 - \frac{\xi}{2} \cdot F(x_1) \right] \cdot \sin 2\pi\nu, \quad (3a)$$

$$p_2 = -x_1 \cdot \sin 2\pi\nu + \left[ p_1 - \frac{\xi}{2} \cdot F(x_1) \right] \cdot \cos 2\pi\nu - \frac{\xi}{2} \cdot F(x_2), \quad (3b)$$

здесь  $F(x) = -dU/dx = 8\pi \cdot [1 - \exp(-x^2/2)]/x$  — импульс силы, переданный заряду встречным пучком при  $\xi = 1$ . Отметим, что частота  $\nu$  нелинейных колебаний системы (1) заложена в пределах:

$$\nu + \xi > \bar{\nu} > \nu \quad (4)$$

причем левая граница относится к малым амплитудам.

В рамках модели (1) — (4) главным эффектом, определяющим увеличение амплитуд колебаний и потерю светимости оказывается стохастическая неустойчивость, обусловленная перекрытием основных резонансов [4]. Определение границы этой неустойчивости  $\xi_K$  к ее зависимости от частоты  $\nu$  является здесь основной задачей, для решения которой полезно уметь отыскивать неподвижные точки основных резонансов. В работе [4], например, это осуществлялось приблизительно путем "нащупывания" с помощью светового пера на экране дисплея. Ниже описаны алгоритмы, позволяющие поручить ЭВМ отыскание фазовых координат неподвижных точек с любой требуемой точностью.

В настоящей работе не изучается зависимость  $\xi_K(\nu)$  и везде используется фиксированное значение невозмущенной бетатронной частоты  $\nu = 1,6005$ .

## 3. Отыскание неподвижных точек методом пересечений.

Фазовую точку называют неподвижной с периодом  $T$ , если начавшаяся в этой точке траектория по истечении времени  $T$  вновь попадает в нее:  $x(T) = x(0)$ ,  $p(T) = p(0)$ . Условимся называть точку: 1)  $x$  — неподвижной, если  $x(T) = x(0)$  при любом  $p(T)$ , 2)  $p$  — неподвижной, если  $p(T) = p(0)$  при любом  $x(T)$ . Для отображений типа (3) удобнее говорить о неподвижности с индексом  $N$ , где  $N$  — минимальное обеспечивающее неподвижность число отображений.

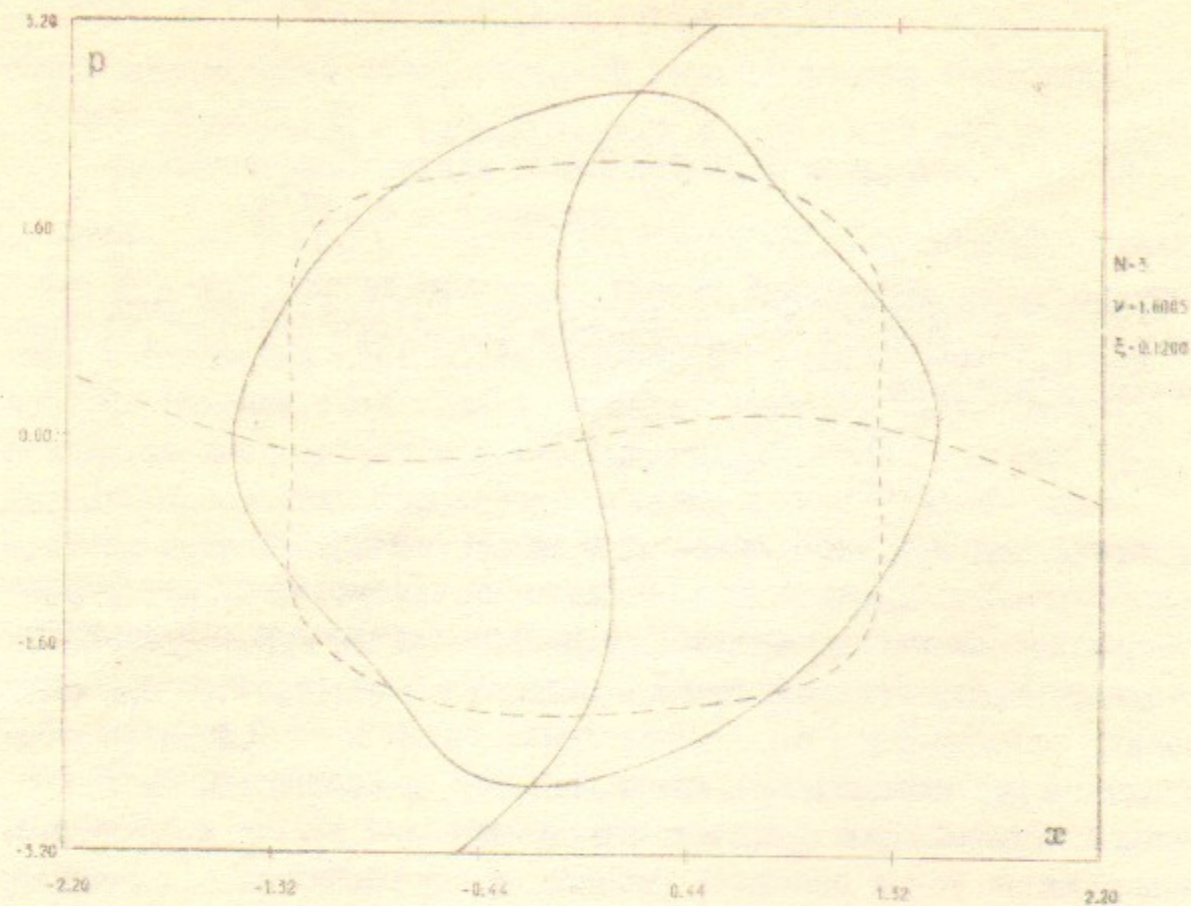


Рис.1. Семейства  $X$ -линий (пунктирные) и  $P$ -линий (сплошные) для системы (I) при индексе неподвижности  $N = 3$  и параметрах  $\nu = 1,6005$ ,  $\xi = 0,12$ .

При фиксированном  $N$  множества  $X$ - и  $P$ -точек образуют соответственно  $X$ - и  $P$ -линии. Это можно видеть, например, на относящихся к системе (I) рисунках 1 и 2, где  $P$ -линии изображены сплошными, а  $X$ -линии пунктирными кривыми. Рассмотрение этих рисунков подсказывает простую идею: для отыскания неподвижных точек двигаться вдоль, скажем,  $P$ -линий и отлавливать лежащие на них  $X$ -точки. Опишем подробнее алгоритм этого "метода пересечений", позволяющего полностью автоматизировать процесс отыскания и классификации неподвижных точек для любого индекса  $N$ .

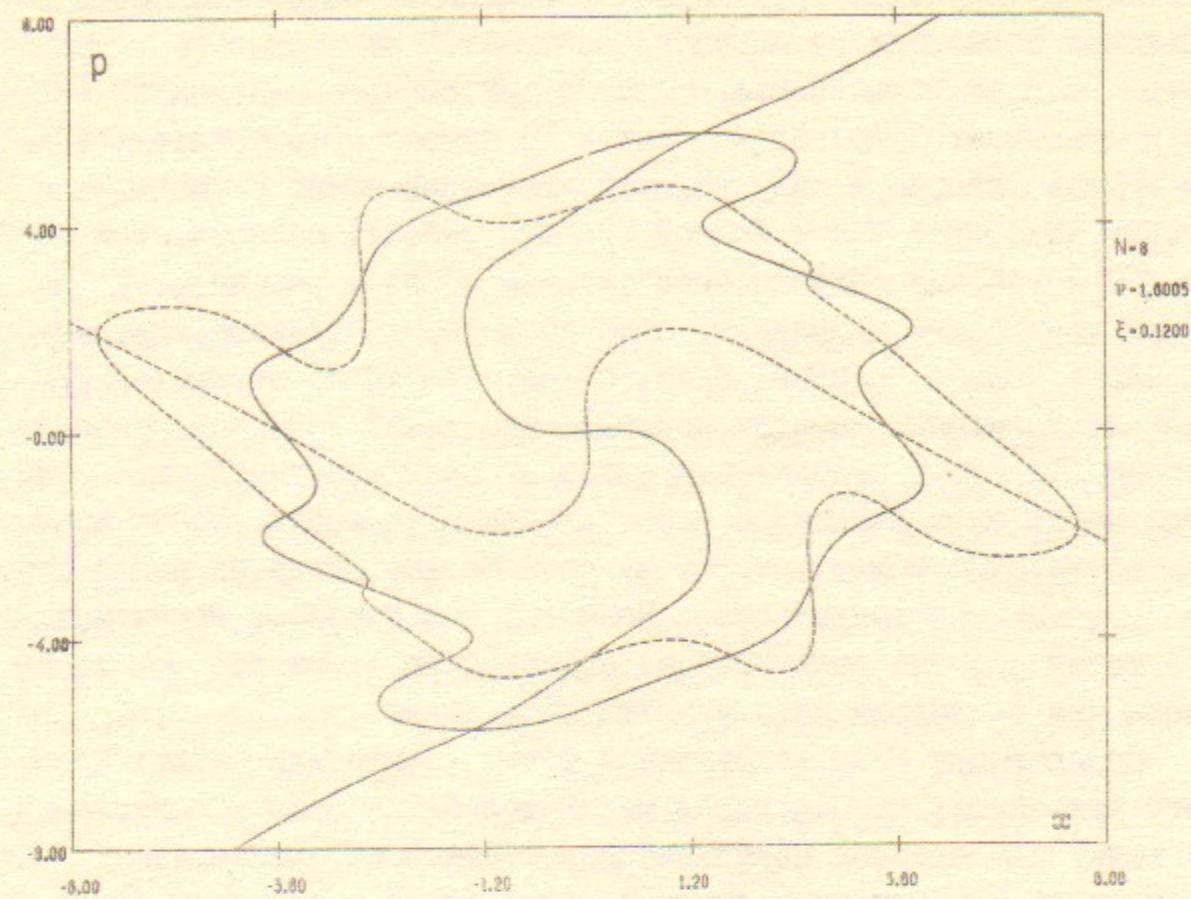


Рис.2. Семейства  $X$ -линий (пунктирные) и  $P$ -линий (сплошные) для системы (I) при индексе неподвижности  $N = 8$  и параметрах  $\nu = 1,6005$ ,  $\xi = 0,12$ .

Рабочую область фазовой плоскости представим в виде суммы нескольких (или одной) смежных зон и назовем полной границей области сумму периметра области (внешняя часть полной границы) и принадлежащих области границ зон (внутренняя часть полной границы). Обходим область по ее полной границе, фиксируя все попадающиеся на этом пути  $P$ -точки. Перебирая затем по порядку граничные  $P$ -точки, движемся в пределах рабочей области вдоль содержащих их  $P$ -линий, отыскивая лежащие на этих линиях  $X$ -точки: это и будут искомые неподвижные точки с индексом  $N$ .

Здесь возможны определенные упрощения. Обычно множество неподвижных точек одного индекса распадается на несколько групп, внутри которых точки связаны друг с другом преобразованием типа (3) и оказывается достаточно найти по одному представителю каждой группы. Иногда в силу условий симметрии можно ограничиться обходом некоторой части полной границы рабочей области. Так, на рис. 1 и 2 рабочие области естественным образом разбиваются на четыре зоны осями координат, отрезки которых образуют внутреннюю часть полной границы; здесь обход области по периметру оказывается излишним. Заметим попутно, что любой основной резонанс системы (I) имеет неподвижные точки на осях координат, где они легко могут быть найдены с любой степенью точности. Желая испытать достаточно общие методы, мы сознательно нигде не используем это частное обстоятельство. Наконец, при переборе граничных  $\rho$ -точек полезно выяснить, не является ли очередная  $\rho$ -точка концом уже обследованного участка  $\rho$ -линии.

Определение типа неподвижной точки (центр или седло) проще всего выполнить, рассматривая малые колебания вокруг содержащей эту точку равновесной периодической траектории. Линеаризация приводит здесь к уравнениям движения типа Хилла с периодом  $2\pi N$  и вопрос об устойчивости решается после нахождения величины характеристического показателя этого уравнения [6].

В заключение этого раздела заметим, что иногда нетрудно установить определенные энергетические соотношения, связанные с условиями неподвижности. Так, в системе (I) присутствуют линейная сила фокусировки накопителя и нелинейная в общем случае сила взаимодействия заряда со встречным пучком. Легко проверить, что при индексе неподвижности  $N$  на интервале  $\Delta\theta = 2\pi N$  оказывается в среднем равна нулю: а) работа линейной силы, если имеет место  $X$ -неподвижность, б) сумма работ обеих сил, если имеет место  $\rho$ -неподвижность, в) работа порознь каждой силы при неподвижности в обычном смысле.

#### 4. Резонансы системы (I) и их перекрытие.

Применим описанный в п.3 метод пересечений к системе (I) при  $\nu = 1,6005$  и  $\xi = 0,12$ , придавая индексу неподвижности

$N$  значения первых пятнадцати чисел натурального ряда. Оказывается, что индексы  $N = 1, 2, 4, 5, 7, 10$  вообще не имеют неподвижных точек, а для  $N = 3, 6, 9, 12, 15$  отыскиваются одни и те же неподвижные точки.

Условие возникновения основных резонансов для системы (I) имеет вид:

$$N \cdot \bar{\nu} = \text{целое число}, \quad (5)$$

причем частота нелинейных колебаний  $\bar{\nu}$  должна попадать внутрь интервала (4). Соотношение (5) носит лишь необходимый характер и выполнение его вовсе не означает, что налицо "настоящий" резонанс со своей областью автофазировки и стохастическим слоем; последние будут иметь место только при наличии неподвижных точек. Для системы (I) при  $\nu = 1,6005$  и  $\xi = 0,12$  среди обследованных пятнадцати значений  $N$  условию (5) удовлетворяют  $N = 3, 7, 8, 10, 11, 13$  и 14; однако, как отмечалось, для  $N = 7$  и  $N = 10$  резонансные ситуации не реализуются. Таким образом, при  $\nu = 1,6005$  и  $\xi = 0,12$  первым пяти резонансам системы (I) отвечают следующие значения индексов неподвижности:

$$N = 3, 14, 11, 8, 13. \quad (6)$$

Ниже показано, что резонансы (6) полностью покрывают наиболее важную часть фазовой плоскости  $0 \leq |x|, |\rho| \leq 5$  и их взаимодействие в основном определяет динамическое поведение системы (I) в этой области.

Выберем в качестве начальных условий величины, близкие к значениям координат седловых точек резонансов (6) и проследим за начинающимися в них траекториями при достаточно большом числе преобразований (3). Получившаяся при этом фазовая картинка дана на рис.3, где в силу симметрии приведен лишь первый квадрант; номера траекторий соответствуют резонансам в том порядке, который указан в перечислении (6). Как и в работе [4], мы попытаемся отыскать пороговое значение параметра взаимодействия встречных пучков  $\xi_N$ , отвечающее началу возникновения стохастической раскачки колебаний. Из рис.3 видно, в частности, что при  $\xi = 0,12$  контакты между резонансами (6) отсутствуют, т.е. стохастический порог  $\xi_N$  еще не достигнут. При  $\xi > \xi_N$  в соответствии со смыслом критерия перекрытия [1,2,3]

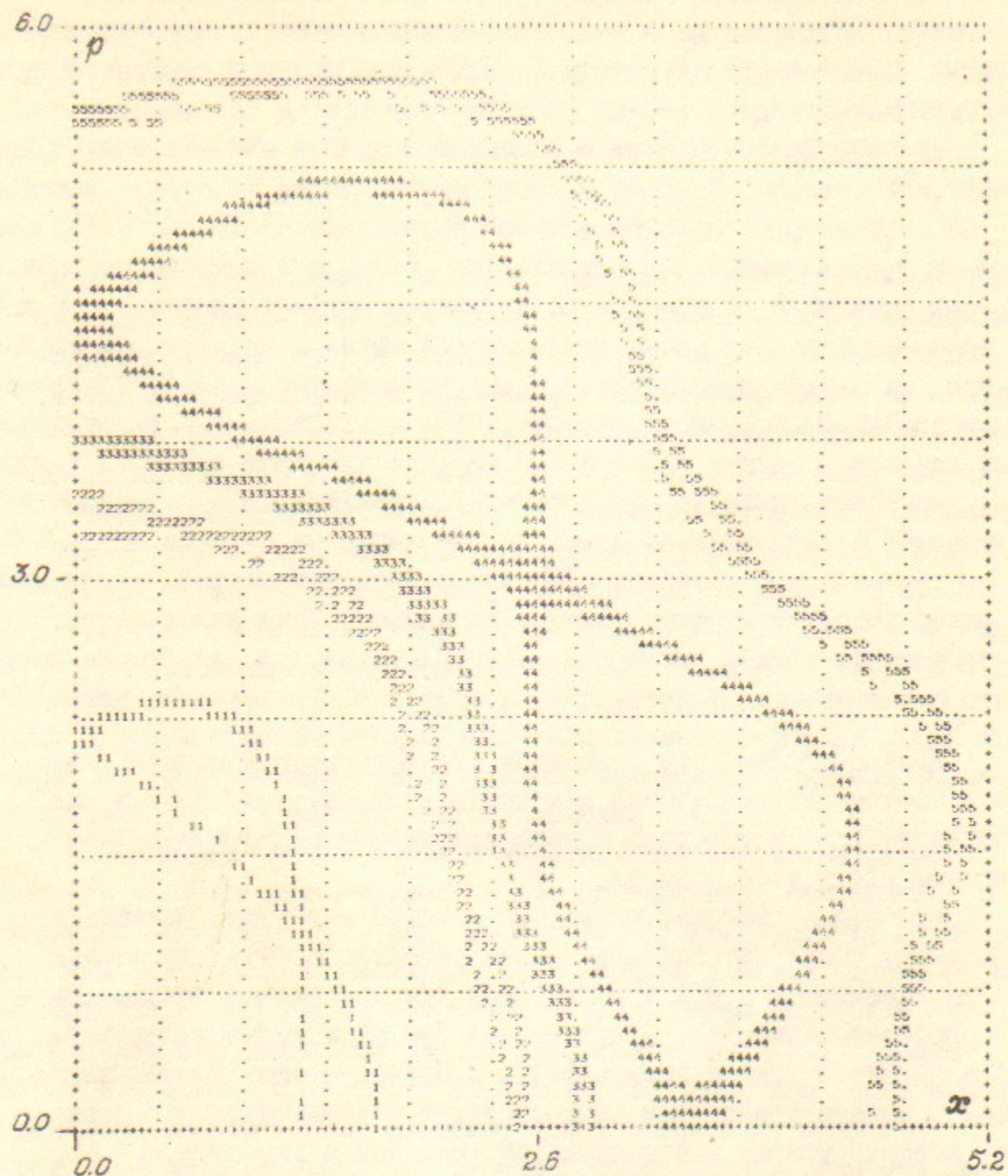


Рис.3. Фазовые траектории системы (I), начинающиеся вблизи седловых точек резонансов  $N = 3, 14, 11, 8$  и  $13$  соответственно;  $\nu = 1,6005$ ,  $\xi = 0,12$ . Полное число отображений для каждой траектории  $2 \times 10^4$

следует ожидать образования общей для нескольких резонансов стохастической области. Фазовые траектории, начинающиеся вблизи седловых точек, со временем покидают "свои" резонансы и, блуждая по стохастической области, попадают в "чужие" зоны [3]; этот факт удобно использовать при построении алгоритма отыскания  $\xi_K$ , реализация которого может быть полностью поручена ЭВМ.

Предполагая параметры исследуемой системы фиксированными, рассмотрим следующий план: 1) отыскиваются неподвижные точки нескольких основных резонансов системы, 2) на достаточно большом интервале времени прослеживаются траектории, начинающиеся вблизи седловых точек этих резонансов, 3) фиксируются заходы каждой из траекторий в окрестности "чужих" седел, что позволяет судить о наличии контакта между любой парой резонансов. Определенный интерес может иметь также попутно добываемая информация: биение амплитуд колебаний, времена переходов от одного резонанса к другому и т.п.

Начиная со значения параметра взаимодействия  $\xi = 0,12$  и действуя в отношении системы (I) по описанному плану обнаруживаем, что при  $\xi = 0,165$  стохастические слои резонансов  $N = 3, 14, 11, 8$  перекрываются и образуется простирающаяся практически на всю рабочую область  $0 \leq |x|, |p| \leq 5$  связанная стохастическая сеть (при установлении этого факта траектории прослеживались на протяжении  $5 \times 10^4$  отображений). Естественно считать полученное значение параметра взаимодействия порогом возникновения стохастической неустойчивости, т.е. положить  $\xi_K = 0,165$  при  $\nu = 1,6005$ . Отметим, что эта величина  $\xi_K$  практически совпадает с найденной в работе [4], где наступление неустойчивости определялось по возрастанию энергии колебаний.

При дальнейшем увеличении силы взаимодействия встречных пучков растет доля стохастической компоненты движения, области автофазировок существующих резонансов уменьшаются или исчезают и одновременно возникают новые резонансы [1,3]. Это можно видеть на рис.4, полученном для величин параметров  $\nu = 1,6005$  и  $\xi_K < \xi = 0,195$ ; цифрами помечены точки фазовых траекторий, начинающихся вблизи седел резонансов (6). Обращает на себя внимание появление резонансов второго уровня [2] - на рис.4 один

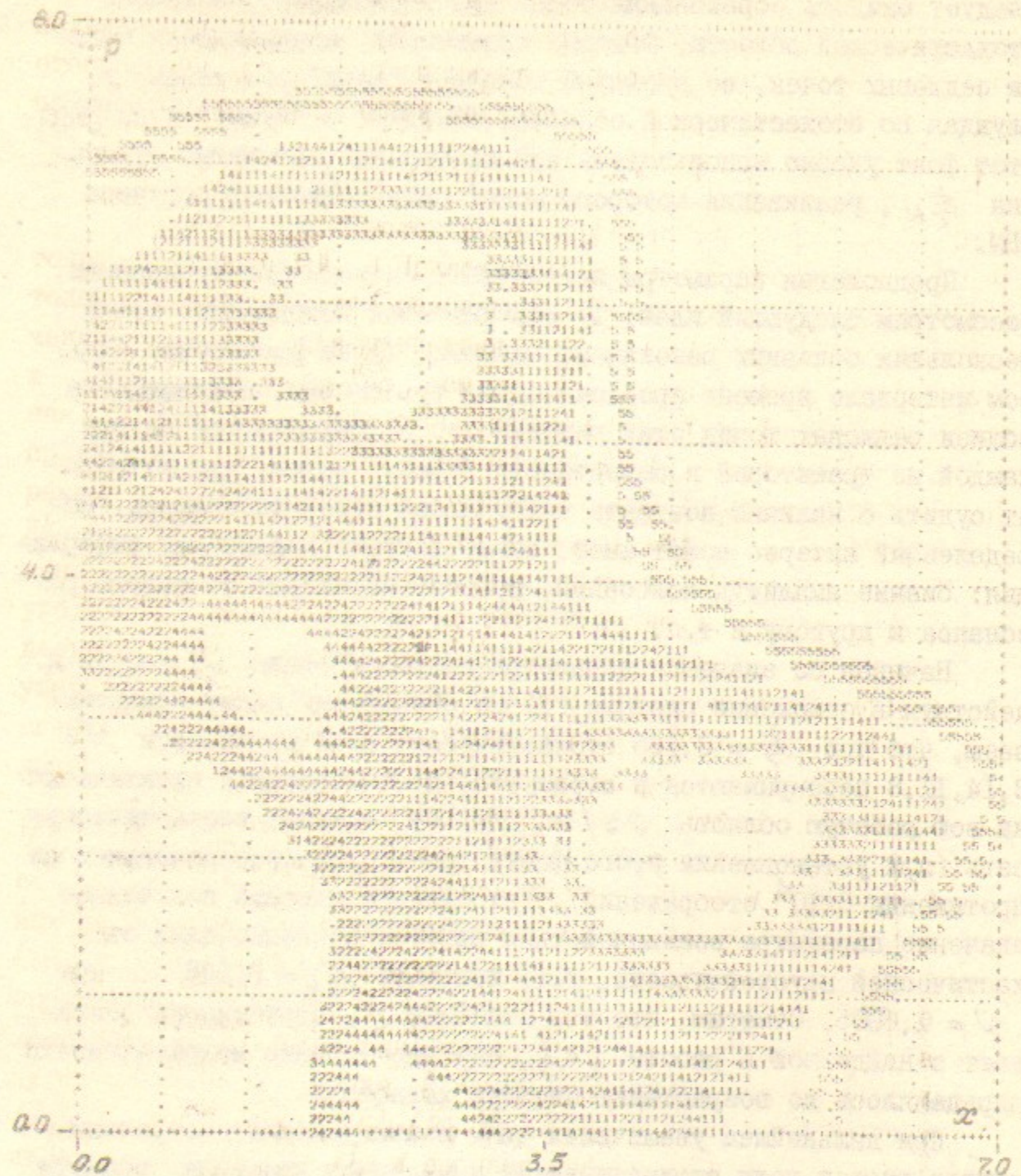


Рис.4. Фазовый портрет системы (I) для  $\nu = 1,6005$ ,  $\xi = 0,195$ . Цифрами помечены точки траекторий, начинающихся вблизи седел резонансов  $N = 3, 4, 8$  и  $13$  соответственно. Полное число отображений для каждой траектории  $2 \times 10^4$ .

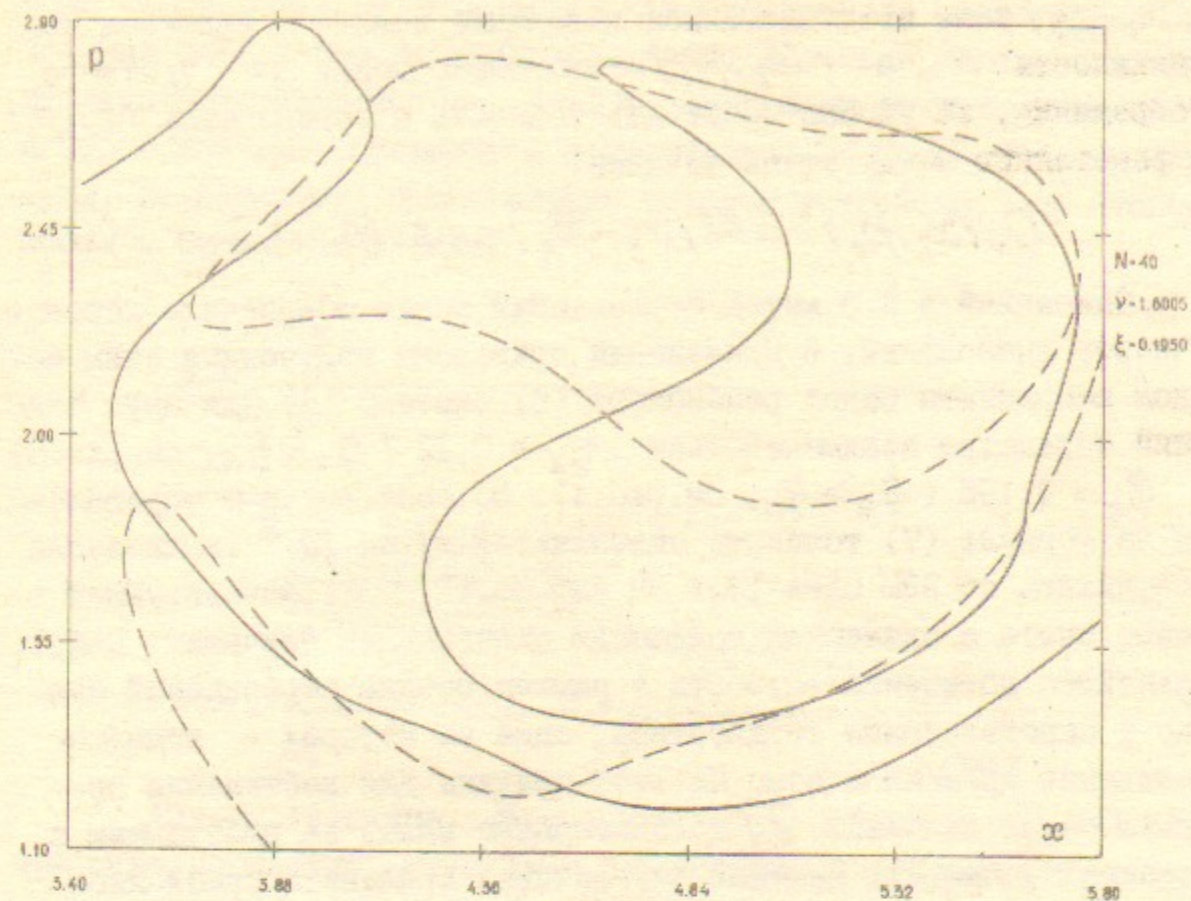


Рис.5. Семейства  $X$ -линий (пунктирные) и  $p$ -линий (сплошные) для системы (I) при индексе неподвижности  $N = 40$  и параметрах  $\nu = 1,6005$ ,  $\xi = 0,195$ .

из них представлен набором "ожерелий" из пяти зон, окружающих области автофазировки основного резонанса  $N = 8$ . Указанный резонанс имеет относительно высокий индекс неподвижности  $N = 40$ , тем не менее его неподвижные точки легко отыскиваются с помощью метода пересечений (см.п.3). На рис.5 приведена часть всей картины  $p$ - и  $X$ -линий для этого случая, причем устойчивая неподвижная точка в центре рисунка принадлежит основному резонансу  $N = 8$ .

5. Точное определение координат седел и оценка размеров стохастических слоев.

Координаты седловых точек необходимо уметь определять достаточно точно (для тонких стохастических слоев эта точность может приближаться к предельной, обеспечиваемой ЭВМ). Если

$(x_c, p_c)$  есть предполагаемое положение седла с индексом неподвижности  $N$ , а  $(\bar{x}_c, \bar{p}_c)$  - его образ после  $N$ -кратного отображения, то удобно оценивать точность в определении  $(x_c, p_c)$  по расстоянию между этими точками:

$$Q_N(x_c, p_c) = a \text{vs}(x_c - \bar{x}_c) + a \text{vs}(p_c - \bar{p}_c). \quad (7)$$

Описанный в п.3 метод пересечений может обеспечить хорошую точность вычислений. В Приложении приведены полученные этим методом координаты седел резонансов (6) системы (I) для двух значений параметра взаимодействия  $\xi_1 = 0,12$  ( $\xi_1 < \xi_N$ , см.рис.3) и  $\xi_2 = 0,195$  ( $\xi_2 > \xi_N$ , см.рис.4). Во всех случаях определенная по формуле (7) точность оказывается лучше  $10^{-8}$  (вычисления проводились на ЭВМ ОДРА-1304 ВЦ ИЯФ СО АН СССР, использующей в режиме счета с одинарной точностью одиннадцать значащих цифр). Дальнейшее повышение точности в рамках метода пересечений связано с определенными трудностями, одна из которых - заметное увеличение времени счета. По этой причине для достижения предельно малых значений  $Q_N$  целесообразно вслед за работающим с умеренной точностью методом пересечений применить какой-либо специальный уточняющий алгоритм. Рассмотрим один из них, условно названный "методом пробных сфер".

Пусть  $(x_c, p_c)$  - найденное методом пересечений с точностью  $Q_N(x_c, p_c)$  положение седла. Опишем вокруг него окружность радиуса  $R$ , разместим на ней равномерно  $m$  точек и для каждой из них по формуле (7) вычислим значение  $Q_N$ . Из пробной точки  $(x_k, p_k)$  давшей минимальное значение  $Q_N(x_k, p_k)$ ,  $1 \leq k \leq m$  продвигаемся с шагом  $S$  попеременно вдоль направлений осей координат до тех пор, пока наблюдается уменьшение  $Q_N$ . Таким путем отыскивается точка  $(\bar{x}_c, \bar{p}_c)$  и отвечающая ей величина  $Q_{N+1}(\bar{x}_c, \bar{p}_c)$ . Если  $Q_N(\bar{x}_c, \bar{p}_c) < Q_N(x_c, p_c)$  то осуществляется переход  $x_c = \bar{x}_c, p_c = \bar{p}_c$  и процесс уточнения продолжается. В противном случае уменьшается радиус пробной сферы  $R$  или увеличивается число пробных точек  $m$  и вычисления повторяются. Практически оказалось полезно связать текущие значения радиуса пробной сферы  $R$  и шага  $S$  с текущим значением целевой функции  $Q_N(x_c, p_c)$ .

Заметим, что если из этого метода "убрать" сферу, то он превращается в классический метод Зейделя по координатному по-

иска [7] и сразу же становится непригодным для определения положения седел. Нам не удавалось также добиться успеха с помощью градиентных методов [7], хотя с отысканием точных координат центров все они справляются относительно легко. Это свидетельствует, по-видимому, о достаточно сложном устройстве  $Q$ -поверхности в окрестности седла.

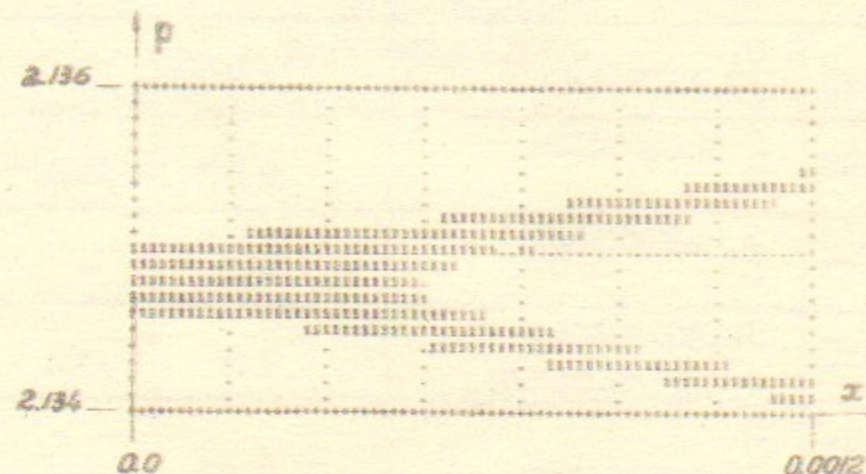


Рис.6. Резонанс  $N = 3$  при  $\nu = 1,6005$  и  $\xi = 0,12$ . Фрагмент стохастического слоя, обрисованный запущенной из окрестности седла  $(x_c = 0, p_c = 2,1347731076)$  траекторией. Полное число отображений  $10^6$ .

В Приложении приведен пример использования метода пробных сфер. Отметим, что его применение часто требует перехода на вычисления с двойной точностью.

Выше знание седловых точек использовалось при изучении перекрытий стохастических слоев с различными индексами неподвижности. Но с этими точками связана также определенная информация о "своем" стохастическом слое, в частности, о его размерах: запущенная из окрестности седла траектория рисует фазовый портрет этого слоя (см., например, рис.6). Рассмотрим состояние только из точек стохастического слоя с центрами в седле прямоугольнички и пусть  $A_{S,N}^2$  - площадь наибольшего из них. Величину  $A_{S,N}$  удобно назвать "приведенной толщиной слоя в седле". В Приложении даны значения  $A_{S,N}$  для резонансов (6) системы (I) при  $\nu = 1,6005$  и  $\xi = 0,12$ .

Автор благодарен Б.В.Чирикову, Ф.М.Израйлеву и Дж.Теннисону (*J. Tennyson*) за обсуждения и советы.



Приложение.

Координаты седловых точек резонансов (6) системы (I);

$$\nu = 1,6005.$$

$N$	$\xi$	$x_c, p_c$	$Q_N \cdot 10^9$	$Q_{S,N}$
3	0,120	0. ±2,1347731076	1,6	0,0007
	0,195	0. ±3,4319142050	2,4	-
I4	0,120	2,5210094125 0.	0,23	0,003
	0,195	3,6285462587 0.	2,2	-
II	0,120	±2,8372293566 ±0,39108259570	1,8	0,004
	0,195	0. ±5,1304244764	0,71	-
8	0,120	0. 4,3964923411	2,5	0,42
	0,195	4,5400486581 0.	7,4	-
I3	0,120	±3,2554567516 ±3,9903800970	3,3	0,0008
	0,195	0. ±6,9258111109	0,91	-

I. Пояснения к таблице:

а) Все седловые точки каждого резонанса образуют одну ( $N = I4; 8$ ) или две ( $N = 3; II; I3$ ) независимые группы, внутри которых они связаны преобразованием (3). В таблице указаны координаты представителей этих групп.

б) Указанные в таблице величины получены методом пересечения (см. п.3), значения  $Q_N$  вычислены по формуле (7).

в) "Приведенная толщина стохастического слоя в седле" определена как сторона квадрата, равновеликого наибольшему среди "вписанных" в стохастический слой с центром в седле прямоугольников (см. п.5).

2. Применим метод пробных сфер, описанный в п.5, для уточнения координат седла  $N = I3$  при  $\xi = 0,12$  (предпоследняя строка таблицы). Принимая число пробных точек  $m = I3$  и текущий радиус сферы  $R$  равным текущему значению целевой функции  $Q_{I3}$ , находим:

$$x_c = 3,25545675531174$$

$$p_c = 3,99038008388578$$

$$\text{при } Q_{I3} = 1,1 \times 10^{-10}.$$

Л и т е р а т у р а :

1. B.V. Chirikov, "A Universal Instability of Many-Dimens. Oscill. Systems", *Phys. Rep.*, **32**, n5, 1979.
2. Б.В.Чириков. "Нелинейный резонанс". Уч.пособие, изд. НГУ, Новосибирск, 1978.
3. Б.В.Чириков. "Взаимодействие нелинейных резонансов", Уч.пособие, изд. НГУ, Новосибирск, 1978.
4. И.Б.Вассерман и др., "Изучение стохастических эффектов при взаимодействии встречных пучков", Тр. X междунар. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, Серпухов, 1977.
5. В.В.Вечеславов. "Приближенное представление потенциала встречного взаимодействия эллиптических пучков", препринт 80-72 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
6. И.Г.Малкин. "Теория устойчивости движения", Гостехиздат, 1952.
7. Н.С.Бахвалов "Численные методы", т.1, М. Наука, 1975.

Работа поступила -24.12.80.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 5.1-1981 г. МН 13677  
Усл. 1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.  
Тираж 170 экз. Бесплатно  
Заказ № 1.

---

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР