

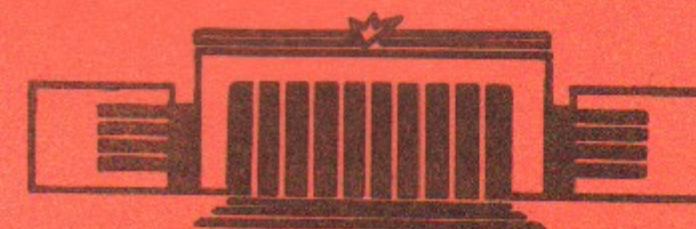
24

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

В.М.Малкин

нелинейная релаксация пучка  
релятивистских электронов  
в плазме

ПРЕПРИНТ 81 - 107



Новосибирск



# НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ПУЧКА РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛАЗМЕ

## I. Четырехплазмонное взаимодействие

В.М.Малкин

### АННОТАЦИЯ

Исследован нагрев плазмы пучком релятивистских электронов в условиях, когда стабилизация пучковой неустойчивости наступает за счет четырехплазмонного взаимодействия. Помимо оценок, получены аналитические выражения для функции распределения электронов пучка и спектра ленгмюровских волн. Практически важный результат работы состоит в существенном сдвиге предела применимости теории релаксации в область больших значений отношения  $n_p/n_0$  концентраций пучка и плазмы. Ленгмюровские спектры обнаруженного типа характерны для довольно широкого класса инкрементов и потому представляют интерес не только в рассмотренной задаче, но и в общей теории плазменной турбулентности.



NONLINEAR RELAXATION OF A RELATIVISTIC BEAM  
IN A PLASMA

I. Four-wave interaction

V.M.Malkin

Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

Plasma heating by a relativistic electron beam is studied in the conditions when the beam instability is saturated as a result of the four-wave interaction. In addition to estimations, analytical expressions for the distribution function and the spectrum of Langmuir waves are derived. The practically important result of the paper consists in the fact that the limit of applicability of the relaxation theory is substantially shifted to the range of large ratios of the beam-plasma concentrations. Langmuir spectra of the discovered type are characteristic of a quite broad class of increments and therefore are of interest not only in the problem under consideration but in the general theory of plasma turbulence as well.

I. Введение

Один из наиболее эффективных механизмов передачи энергии пучка релятивистских электронов плазме связан с неустойчивостью этой системы относительно возбуждения ленгмюровских волн. Длина, на которой пучок теряет заметную долю своей начальной энергии, определяет необходимые для достижения высокого к.п.д. нагрева плазмы размеры установки и потому является особо важным параметром в исследовании пучкового нагрева. При теоретическом рассмотрении этой длины и спектра ленгмюровской турбулентности решающую роль играет вопрос о механизме стабилизации неустойчивости. Данному вопросу посвящено большое количество работ, однако полный ответ на него все еще не получен. Существующие исследования релаксации пучка в режиме сильной ленгмюровской турбулентности (см., например, [1]) в значительной мере являются феноменологическими. В случае слабой турбулентности основы теории надежны, однако исследованные в рамках этой теории режимы релаксации осуществимы лишь при малом отношении  $n_e/n_0$  концентраций пучка и плазмы. В современных экспериментах по пучковому нагреву отношение  $n_e/n_0$  нередко на порядки превышает значения, описываемые последовательной теорией (см., например, [2]). Даже в том случае, если увеличение плотности плазмы в экспериментальных установках будет происходить при неизменной концентрации пучков<sup>1)</sup>, указанный зазор исчезнет лишь при параметрах гипотетического термоядерного реактора [3]. Таким образом, весьма желательно распространить теорию релаксации на большие значения  $n_e/n_0$ . В этом состоит цель настоящей работы. Проведенный в ней анализ существенно нелинейных режимов релаксации расширяет на несколько порядков область применимости теории по параметру  $n_e/n_0$ .

Для уточнения постановки задачи напомним, что ранее, в рамках теории слабой турбулентности, исследовались такие механизмы стабилизации неустойчивости релятивистского пучка, как квазилинейная диффузия его электронов [4 - 6], индуцированное рассеяние ленгмюровских волн на электронах плазмы [5] и на ионах [7 - 14]. Характерные времена перечисленных процессов обратно пропорциональны энергии волн, вследствие чего она не вхо-

1) Необходимое для нагрева плазмы увеличение энергии пучков может при этом обеспечиваться ростом их продолжительности.



дит в условия преобладания какого-либо из них над остальными. То же самое относится к инкременту пучковой неустойчивости (которому энергия волны пропорциональна при наличии стабилизации) и к отношению  $n_e/n_0$ . Максимальная концентрация пучка, при которой стабилизация неустойчивости обусловлена одним из процессов первого порядка, может определяться, в зависимости от значений параметров системы, как границей применимости теории слабой турбулентности, так и нелинейными процессами высших порядков.

Ниже, ввиду интересов практики, рассматривается кинетическая неустойчивость релятивистского пучка в не слишком холодной плазме:

$$\frac{T}{mc^2} > \frac{m}{M} \quad (1)$$

( $T > 0.1$  кэВ для дейтериевой плазмы), а самым быстрым процессом при малых значениях  $n_e/n_0$  считается индуцированное рассеяние на ионах. В силу неравенства (1), дисперсионная добавка к частоте ленгмювской волны мало меняется в каждом акте рассеяния на ионах, обратное время этого процесса содержит **дополнительную малость и верхняя граница применимости существующей** теории релаксации по параметру  $n_e/n_0$  определяется нелинейными процессами высших порядков. Основным конкурентом индуцированного рассеяния на ионах является четырехплазмонный процесс. Его вероятность была вычислена в работах [15,16], однако неправильно оценена там, что привело к выводу об относительной слабости четырехплазмонного взаимодействия при выполнении условия (1) во всей области применимости теории слабой турбулентности [16,17]. Правильная оценка была дана в [9] в связи с вопросом о толщине ленгмювских струй, но в этой работе была неверно установлена область применимости кинетических уравнений. В итоге вывод о преобладании индуцированного рассеяния на ионах получил подтверждение: струи автоматически оказались тонкими. Во многих более поздних работах данный вывод в отношении изотермической плазмы уже считался само собой разумеющимся<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Это тем более удивительно, что результат работы [9] в равной мере относился к неизотермической плазме с  $T_e > T_i$ , в которой существенность четырехплазмонного процесса (рассеяния ленгмювских волн на вынужденном звуке) очевидна.

С помощью полученной в [9] оценки нетрудно установить, что четырехплазмонный процесс относительно медленен (струи являются тонкими) при

$$\frac{n_e}{n_0} < \left( \frac{m}{M} \frac{mc^2}{T} \right)^{3/2} \frac{T}{mc^2} \frac{\nu_s}{\Omega_s} \varrho \Delta\theta^2. \quad (2)$$

Здесь  $\varrho$  и  $\Delta\theta$  - угловой разброс и релятивистский фактор электронов пучка,  $\Omega_s$  и  $\nu_s$  - частота и декремент затухания ионного звука,  $T = T_e$  - температура электронов плазмы; ионы считаются более холодными:

$$T_i \approx T_e.$$

Неравенство (2) является весьма жестким даже при наиболее благоприятных для его выполнения условиях. Так, например, в изотермической ( $\nu_s \sim \Omega_s$ ) дейтериевой плазме с температурой 10 кэВ, при  $\varrho = 3$ ,  $\Delta\theta \sim 1$ , из (2) следует  $n_e/n_0 < 10^{-4}$ .

В настоящей работе исследуется релаксация пучка, концентрация которого удовлетворяет неравенству, противоположному (2). Механизмом стабилизации неустойчивости считается рассеяние ленгмювских волн на порождаемых низкочастотными биениями электрического поля флуктуациях плотности. (При достаточно малых значениях  $n_e/n_0$  этот процесс можно рассматривать как четырехплазмонный). Формальной основой расчетов служат стандартные кинетические уравнения, описывающие распадное взаимодействие ленгмювских волн с ионнозвуковыми, а также полученное в [18] обобщение этих уравнений на случай сильной перенормировки частоты ионного звука. Основные уравнения количественно верны при  $T_i \ll T_e = T$ , вытекающие из них оценки справедливы и в изотермической плазме.

Следует заметить, что спектры турбулентности при распадном взаимодействии ленгмювских и ионнозвуковых волн неоднократно изучались ранее, в том числе и в непосредственной связи с задачей о стабилизации пучковой неустойчивости, однако оставались "практически недоступными для сколько-нибудь полного аналитического исследования" [19].

Обилие параметров в системе плазма-пучок приводит к необходимости выбора определенных соотношений между ними. Основой выбора служит эффективность нагрева плазмы. Режимы релаксации, в которых потерянная пучком энергия мала, выносятся излучением из плазмы или передается малой группе быстрых частиц не обжу-



даются. В тех случаях, когда релаксация идет в несколько стадий, рассматривается лишь стадия, соответствующая максимуму энерговыделения. Однако и при таком жестком отборе остается довольно много возможностей: характер релаксации зависит от величины магнитного поля, наличия электромагнитных волн, существенности нелинейных поправок к затуханию ионного звука и перенормировки его частоты. В публикуемой ниже первой части работы исследуется простейшая возможность: магнитное поле, нелинейное затухание ионного звука и перенормировка его частоты пренебрежимо малы, а возбуждение электромагнитных волн сорвано их быстрым выносом из плазмы.

## 2. Основные уравнения

Выражения для вероятностей различных процессов, длины релаксации пучка и других величин в размерных переменных оказываются весьма громоздкими. Для упрощения формул удобно ввести естественные единицы измерения. Будем измерять: длину-характерной длиной взаимодействующих с пучком (резонансных) ленгмюровских волн; частоту - дисперсионной добавкой к частоте этих волн; энергию ленгмюровской турбулентности - энергией порядка порога модуляционной неустойчивости; возмущение концентрации плазмы  $n$ , а также концентрацию пучка  $n_e$ , - величиной возмущения, необходимого для захвата резонансных волн; скорость и импульс электронов пучка - начальными значениями этих величин. Для уточнения численных коэффициентов приведем соответствующие формулы:

$$\begin{aligned} [x] &= \frac{v_0}{\omega_p}, \\ [t] &= \frac{2}{3\omega_p} \frac{m v_0^2}{T}, \\ [W] &= 6n_0 T \frac{T}{m v_0^2}, \\ [n; n_e] &= 3n_0 \frac{T}{m v_0^2}, \\ [v] &= v_0 \approx c, \\ [p] &= p_0 \approx \rho m c. \end{aligned} \quad (3)$$

В этих единицах инкремент пучковой неустойчивости имеет вид

$$\gamma_{\vec{k}} = \frac{\pi n_e}{2} \int \frac{\vec{k}}{k^2} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \delta(1 - \vec{k} \cdot \vec{v}) d^3 p, \quad (4)$$

где  $f$  - функция распределения электронов пучка по импульсам, нормированная на единицу. Для пучка с угловым разбросом  $\Delta \theta$  справедлива оценка

$$\gamma \sim \frac{\gamma_0}{\Delta \theta^2}, \quad \gamma_0 \equiv \frac{\pi n_e}{2}. \quad (5)$$

Дисперсионная добавка к частоте ленгмюровской волны и частота ионнозвуковой волны равны:

$$\omega_k = k^2, \quad (6)$$

$$\Omega_g = g g. \quad (7)$$

Здесь

$$g = \frac{2}{3} \left( \frac{m}{M} \frac{m c^2}{T} \right)^{1/2} \ll 1 - \quad (8)$$

характерное отношение скорости ионного звука к групповой скорости резонансных ленгмюровских волн.

Декремент затухания ионного звука пропорционален его волновому числу:

$$\gamma_g = \gamma g. \quad (9)$$

Коэффициент пропорциональности зависит от температур электронов и ионов. Он мал по сравнению с  $g$ . На пределе применимости представления об ионнозвуковых волнах - в изотермической плазме -  $\gamma \sim g$ .

Для пучков не очень большой концентрации спектральные плотности ленгмюровских и ионнозвуковых волн, нормированные на плотности их энергий ( $\int N_{\vec{k}} d^3 k = W$ ,  $\int N_{\vec{q}} \Omega_g d^3 q = W_s$ ) удовлетворяют стандартным кинетическим уравнениям. Пользуясь малостью частоты ионного звука по сравнению с шириной ленгмюровского спектра (которая порядка дисперсионной добавки к частоте ленгмюровских волн), можно разложить эти уравнения по параметру  $g$  и перейти к так называемому дифференциальному приближению. Результат удобно выразить через корреляционные функции  $F_{\vec{q}}$ ,  $A_{\vec{q}}$  компонент Фурье звуковых возмущений:



$$\langle n_{\vec{q}} n_{\vec{q}_1} \rangle = F_{\vec{q}} \delta(\vec{q} + \vec{q}_1), \quad (10)$$

$$\langle n_{\vec{q}} \frac{\partial n_{\vec{q}}}{\partial t} - n_{\vec{q}} \frac{\partial n_{\vec{q}_1}}{\partial t} \rangle = 2i \Omega_{\vec{q}} A_{\vec{q}} \delta(\vec{q} + \vec{q}_1).$$

Эти функции представимы в виде четной и нечетной частей спектральной плотности энергии звука:

$$F_{\vec{q}} = \frac{1}{2} \Omega_{\vec{q}} (N_{-\vec{q}}^s + N_{\vec{q}}^s),$$

$$A_{\vec{q}} = \frac{1}{2} \Omega_{\vec{q}} (N_{-\vec{q}}^s - N_{\vec{q}}^s). \quad (11)$$

В дифференциальном приближении столкновительные члены уравнений для  $N_{\vec{k}}$ ,  $F_{\vec{q}}$ ,  $A_{\vec{q}}$  даются следующими формулами:

$$St_N = (2\gamma_{\vec{k}} - \gamma_e + \tilde{\gamma}_{\vec{k}} - \Gamma_{\vec{k}}) N_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} + \tilde{u}_{\vec{k}}, \quad (12)$$

$$St_F = f_{\vec{q}} + \lambda_{\vec{q}} A_{\vec{q}} - (\gamma_{\vec{q}} + \tilde{\gamma}_{\vec{q}}) F_{\vec{q}}, \quad (13)$$

$$St_A = a_{\vec{q}} + \lambda_{\vec{q}} F_{\vec{q}} - (\gamma_{\vec{q}} + \tilde{\gamma}_{\vec{q}}) A_{\vec{q}}. \quad (14)$$

Здесь  $\gamma_e$  - частота кулоновских столкновений электронов плазмы с ионами<sup>3)</sup>,  $\tilde{\gamma}_{\vec{k}}$  - инкремент индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах;  $\Gamma_{\vec{k}}$  и  $u_{\vec{k}}$  описывают упругое, а  $\tilde{u}_{\vec{k}}$  - неупругое рассеяние ленгмюровских волн на флуктуациях плотности,  $f_{\vec{q}}$  и  $a_{\vec{q}}$  - генерацию звука низкочастотными биениями электрического поля;  $\lambda_{\vec{q}}$  и  $\tilde{\gamma}_{\vec{q}}$  - нелинейные поправки к затуханию звука:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{\vec{k}} \\ \Gamma_{\vec{k}} \\ u_{\vec{k}} \\ \tilde{u}_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \int d^3k_1 d^3q_1 T_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{q}_1} \begin{pmatrix} \Omega_{\vec{q}_1}^2 N_{\vec{k}_1}^s \delta'(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ F_{\vec{q}_1} \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ F_{\vec{q}_1} N_{\vec{k}_1}^s \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ \Omega_{\vec{q}_1} (N_{\vec{k}_1} - N_{\vec{k}_1}^s) [A_{\vec{q}_1} \delta'(\omega_k - \omega_{k_1}) + \frac{1}{2} \Omega_{\vec{q}_1} F_{\vec{q}_1} \delta''(\omega_k - \omega_{k_1})] \end{pmatrix} \quad (15)$$

3) Природа и постоянство затухания ленгмюровских волн в формальном отношении не очень существенны.

$$\begin{pmatrix} f_{\vec{q}} \\ a_{\vec{q}} \\ \lambda_{\vec{q}} \\ \tilde{\gamma}_{\vec{q}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int d^3k d^3k_1 T_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{q}} \begin{pmatrix} \Omega_{\vec{q}_1}^2 N_{\vec{k}_1}^s N_{\vec{k}_1}^s \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ \Omega_{\vec{q}_1}^3 N_{\vec{k}_1}^s N_{\vec{k}_1}^s \delta'(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ \Omega_{\vec{q}_1} (N_{\vec{k}_1} - N_{\vec{k}_1}^s) \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) \\ -\Omega_{\vec{q}_1}^2 (N_{\vec{k}_1} - N_{\vec{k}_1}^s) \delta'(\omega_k - \omega_{k_1}) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$T_{\vec{k}\vec{k}_1\vec{q}} = 2\pi \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{q}) \left( \frac{\vec{k} \vec{k}_1}{k k_1} \right)^2.$$

В дальнейшем будет рассматриваться задача о квазистационарном нагреве плазмы, однородно заполняющей полупространство, пучком электронов, инжектируемым по нормали к ее границе. При таких условиях в линейных недиссипативных частях кинетических уравнений остаются лишь сносовые члены, содержащие производные от спектральных функций в направлении инжекции  $Z$ . На расстояниях от границы плазмы, заметно превышающих длину нелинейного взаимодействия волн, можно пренебречь и этими членами, так как после установления спектра пространственный масштаб изменения его параметров становится порядка длины квазилинейной диффузии электронов пучка, которая при нелинейной стабилизации неустойчивости велика. Таким образом, для отыскания спектра волн следует приравнять столкновительные члены (12) - (14) нулю и решить возникающие уравнения. После этого пространственная зависимость параметров пучка и спектра определяется с помощью уравнения диффузии:

$$\cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_\beta}, \quad (17)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{6\pi}{e_0} \int d^3k \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} N_{\vec{k}}^s \delta(1 - R\vec{V}), \quad (18)$$

$$e_0 = \left( \frac{e m c^2}{T} \right)^2. \quad (19)$$

Реальную плазму можно считать пространственно однородной, если масштаб ее неоднородности, в частности, поперечный размер, достаточно велик для того, чтобы волновой вектор плазмона не успевал заметно измениться за время нелинейного взаимодействия волн. Для электромагнитных волн это условие является гораздо более жестким, чем для ленгмюровских, поскольку при одинаковых частотах волновые числа у первых намного меньше, чем у вторых. Возможна ситуация, когда электромагнитные волны быстро выносят-



ся из резонансной области частот и потому не возбуждается, а на ленгмюровские неоднородности практически не влияет. (Именно эта ситуация рассматривается в первой части работы). Количественную формулировку соответствующего условия применимости можно получить обычным способом (см., например, [II]). Следует лишь обратить внимание на одно различие в условиях несущественности электромагнитных ветвей между случаями индуцированного рассеяния на ионах и рассеяния на флуктуациях плотности: в первом случае характерное время рассеяния волн с трансформацией ленгмюровских в электромагнитные зависит, а во втором — не зависит от интенсивности электромагнитных волн. Когда она падает, а это происходит при  $\gamma\tau < 1$ , где  $\tau$  — время выноса электромагнитных волн из области частот  $\Delta\omega$ , занимаемой ленгмюровским спектром, индуцированное рассеяние с трансформацией волн срывается. Между тем, мощность, передаваемая электромагнитным волнам при рассеянии на флуктуациях плотности, оценочно не меняется до тех пор, пока фазы этих волн остаются случайными в интервале  $\Delta\omega$ . Она начинает уменьшаться лишь вне области  $\tau\Delta\omega > 1$ , причем уменьшается весьма медленно, как  $\tau\Delta\omega$ . В предположении о случайности фаз ленгмюровских волн  $\gamma < \Delta\omega$ , и условие несущественности электромагнитных ветвей при рассеянии на флуктуациях плотности оказывается более жестким, чем при индуцированном рассеянии на ионах. Тем не менее, это условие может выполняться в обоих случаях при разумных значениях параметров системы.

### 3. Граница применимости существующей теории

Как уже отмечалось выше, в наиболее интересной с точки зрения нагрева плазмы области параметров неустойчивость пучка малой концентрации стабилизируется за счет индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах. Обратное время этого процесса оценочно равно

$$\tilde{\gamma} \sim g^2 W. \quad (20)$$

Для сравнения приведем здесь же обратное время индуцированного рассеяния на электронах:

$$\gamma_e \sim \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{3/2} W. \quad (21)$$

Рассеяние на ионах идет быстрее, чем на электронах, при

$$\frac{T}{mc^2} < \left( \frac{m}{M} \right)^{2/5}$$

( $T < 20$  кэВ для дейтериевой плазмы).

Характерные длины обоих процессов даются теми же оценками, что и времена, поскольку групповая скорость ленгмюровских волн порядка единицы.

Энергия ленгмюровских волн определяется из условия стабилизации пучковой неустойчивости ( $\tilde{\gamma} \sim \gamma$ ):

$$W \sim \gamma / g^2. \quad (22)$$

Рассеяние на флуктуациях плотности считается при этом слабым:

$$\Gamma < \gamma. \quad (23)$$

Пользуясь результатом последующих оценок, нетрудно проверить, что при выполнении (23) нелинейные поправки к затуханию звука пренебрежимо малы:

$$|21|; |23| \ll 1. \quad (24)$$

Это позволяет упростить получающиеся из уравнений  $St_x = St_y = 0$  выражения для  $F_{\vec{q}}$ ,  $A_{\vec{q}}$  через  $N_{\vec{q}}$ :

$$F_{\vec{q}} = \frac{f_{\vec{q}}}{\nu_{\vec{q}}}, \quad A_{\vec{q}} = \frac{a_{\vec{q}} + \lambda_{\vec{q}} F_{\vec{q}}}{\nu_{\vec{q}}} \ll F_{\vec{q}} \quad (25)$$

и рассматривать рассеяние на флуктуациях плотности как четырехплазмонный процесс. Обратное время этого процесса дается следующей цепочкой оценок:

$$\Gamma \sim W_s \sim \frac{\int f_{\vec{q}} d^3q}{\nu} \sim \frac{g^2 W^2}{\nu}. \quad (26)$$

Предположение (23) выполняется при  $\gamma < \nu g^2$ , т.е.

$$\gamma_0 < \nu g^2 \Delta\theta^2. \quad (27)$$

В размерных переменных неравенство (27) совпадает с (2).

К тому же результату можно прийти несколько иным путем. При стабилизации неустойчивости за счет индуцированного рассеяния на ионах спектр ленгмюровских волн имеет вид струй в  $\vec{K}$ -пространстве [9]. Представление о струйном спектре оправдано до тех пор, пока ширина струи  $\Delta\psi$  меньше угловой ширины области возбуждения  $\Delta\theta$ . Согласно [9],

$$\Delta\psi \sim \left( \frac{\gamma_0}{\nu g^2} \right)^{1/2}, \quad (28)$$



и неравенство  $\Delta\psi < \Delta\theta$  эквивалентно (27).

Длину удвоения углового разброса пучка ( $l_e$ ) можно оценить с помощью уравнения диффузии:

$$l_e^{-1} \sim \frac{W}{\Delta\theta^3} l_0^{-1}.$$

При выполнении относительно мягкого условия

$$\Delta\theta > \frac{1}{r^{2/3}} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{1/6},$$

эта длина больше длины индуцированного рассеяния на электронах и, тем более, на ионах.

Обусловленный индуцированным рассеянием на ионах поток энергии вниз по частоте успевает поглотиться за счет кулоновских столкновений и не приводит к образованию ленгмювского конденсата только при небольших надкритичностях<sup>4)</sup>:  $\gamma - \nu_e \leq \nu_e$ . Фактически, это условие означает, что после удвоения начального углового разброса  $\Delta\theta_0$  пучковая неустойчивость срывается из-за столкновений. Пучок успевает потерять долю

$$\varepsilon \sim \Delta\theta_0$$

своей начальной энергии. Эта доля не мала лишь при  $\Delta\theta_0 \sim 1$ . Для пучка с угловым разбросом порядка единицы условие (27) имеет вид

$$\gamma_0 < \nu g^2. \quad (29)$$

На пределе применимости (29) струи перестают быть тонкими и представление о них теряет смысл даже для размытого пучка.

#### 4. Оценки

Если

$$\gamma_0 > \nu g^2, \quad (30)$$

то индуцированное рассеяние на ионах является относительно медленным процессом для пучка с произвольным угловым разбросом. Стабилизация неустойчивости происходит за счет упругого рассеяния плазмонов на флуктуациях плотности. Обратное время этого

<sup>4)</sup> Следует заметить, что при наличии магнитного поля или электромагнитных волн область применимости существующей теории релаксации по параметру  $\gamma/\nu_e$  оказывается более широкой [12 - 14].

процесса должно удовлетворять условию

$$\Gamma \gtrsim \gamma. \quad (31)$$

Если бы неравенство (31) выполнялось с бесконечно большим запасом, спектр был бы изотропным. При изотропном спектре пучок поглотил бы ленгмювские волны за время  $\gamma_0^{-1}$  [20]. По мере увеличения отношения  $\gamma/\Gamma$ , на спектральной функции плазмонов в области, где инкремент положителен, растет горбик, а в области  $\gamma/\Gamma < 0$  - впадина. Величина горбика (впадины) определяется условием баланса между изотропной  $N$  и анизотропной  $N'$  частями спектра:

$$\gamma N \sim \Gamma N'. \quad (32)$$

Для установившегося спектра эта величина такова, что связанное с горбиком и впадиной дополнительное возбуждение волн в точности компенсирует затухание изотропной части спектра, а также потери, связанные с кулоновскими столкновениями и индуцированным рассеянием на ионах:

$$\gamma N' \Delta\theta \sim (\gamma_0 + \nu_e + \tilde{\gamma}) N. \quad (33)$$

Соотношения (32), (33) позволяют найти  $N$  и  $N'$ .

Пусть

$$\gamma_0 \gtrsim \nu_e, \quad (34)$$

$$\nu_e \gtrsim \tilde{\gamma}. \quad (35)$$

Первое условие необходимо для того, чтобы неустойчивость не срывалась при малом угловом разбросе и пучок мог передать плазме заметную долю своей энергии; второе - гарантирует отсутствие ленгмювского конденсата<sup>5)</sup>.

Учитывая (34), (35), можно оставить в правой части (33) лишь первое слагаемое. После этого из (33), (32) следует:

$$N' \sim N \Delta\theta, \quad (37)$$

$$\gamma \sim \Gamma \Delta\theta. \quad (38)$$

<sup>5)</sup> Как выяснится в дальнейшем, конденсат не возникает при условии  $\gamma_0 > \tilde{\gamma}$ , (36) автоматически справедливом для пучка с не слишком малым угловым разбросом. Условие (35) является более жестким, но зато, и более очевидным.



В предположении, что спектр заключен в области  $\kappa \sim I$  и имеет ширину  $\Delta\omega \sim I$ , величина  $\Gamma$  по-прежнему дается оценкой (26) и

$$N \sim W \sim \frac{(\gamma_0 \nu)^{1/2}}{g \Delta\theta^{3/2}}. \quad (39)$$

Изменение углового разброса пучка описывается уравнением диффузии:

$$\frac{d\Delta\theta^2}{dz} \sim D \sim \frac{W}{e_0} \quad (40)$$

и происходит по закону

$$\Delta\theta^{3/2} = \Delta\theta_0^{3/2} + \frac{z}{e}, \quad (41)$$

где

$$e \sim \frac{g e_0}{(\gamma_0 \nu)^{1/2}} \quad (42)$$

— длина релаксации пучка по углу. На расстоянии  $z \sim e$  от границы плазмы неустойчивость срывается вследствие изотропизации пучка. Доля потерянной пучком энергии связана с его угловым разбросом соотношением

$$\varepsilon \sim \frac{\nu_e}{\gamma_0} \Delta\theta^2 \quad (43)$$

и к моменту срыва неустойчивости составляет

$$\varepsilon \sim \frac{\nu_e}{\gamma_0}. \quad (44)$$

Эта доля не мала (эффективность нагрева плазмы является высокой) при

$$\nu_e \sim \gamma_0 \quad (45)$$

В случае (45) условие (35) сводится к (36) и дает ограничение снизу на угловой разброс пучка:

$$\Delta\theta > \left(\frac{\nu g^2}{\gamma_0}\right)^{1/3}. \quad (46)$$

В данном разделе предполагалось существование устойчивого стационарного спектра, расположенного в области  $\kappa \sim I$  и имеющего ширину  $\Delta\omega \sim I$ . Проверить эти предположения на уровне оценок не представляется возможным. Поэтому перейдем к точному решению задачи.

## 5. Автоподобность

Заметно продвинуться в аналитическом решении задачи о релаксации пучка удается при

$$\Delta\theta \ll I,$$

когда анизотропная часть спектральной плотности плазмонов  $N_{\vec{R}}'$  мала по сравнению с изотропной частью  $N_{\kappa}$ :

$$N_{\vec{R}}' = N_{\kappa} + N_{\vec{R}}', \quad (47)$$

$$N_{\kappa} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{R}} N_{\vec{R}}', \quad (48)$$

$$|N_{\vec{R}}'| \ll N_{\kappa}.$$

Здесь  $d\Omega_{\vec{R}}$  означает элемент телесного угла в  $\vec{R}$ -пространстве.

Поскольку анизотропная добавка сосредоточена в узкой (порядка  $\Delta\theta$ ) области углов вблизи

$$\theta_{\kappa} = \arccos \frac{1}{\kappa},$$

всевозможные интегралы от  $N_{\vec{R}}'$  по углу содержат дополнительную малость  $\Delta\theta$  и могут не учитываться при удержании членов порядка  $N_{\vec{R}}'/N_{\kappa}$ . С точностью до наибольших анизотропных членов уравнение  $St_N = 0$  имеет вид

$$(2\gamma_{\vec{R}} - \Gamma_{\kappa}) N_{\kappa} - \Gamma_{\kappa} N_{\vec{R}}' + u_{\kappa} = 0. \quad (49)$$

Величины со скалярным индексом означают, как и в (47), изотропные части соответствующих функций:

$$\Gamma_{\kappa} = 8\pi^2 \int_0^{\kappa} dk_1 \frac{k_1}{\kappa} \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{\kappa^2}\right)^2 F_{2k_1}, \quad (50)$$

$$u_{\kappa} = \Gamma_{\kappa} N_{\kappa}, \quad (51)$$

$$F_{2k_1} = \frac{\pi^2 g^2}{2\nu} \int_{\kappa_1}^{\infty} dk_2 k_2 \left(1 - 2 \frac{k_2^2}{\kappa_2^2}\right)^2 N_{\kappa_2}^2. \quad (52)$$

Уравнение (49) позволяет выразить  $N_{\vec{R}}'$  через  $N_{\kappa}$ :

$$N_{\vec{R}}' = 2 \frac{\gamma_{\vec{R}} - \gamma_{\kappa}}{\Gamma_{\kappa}} N_{\kappa}. \quad (53)$$

Интегрирование точного уравнения  $St_N = 0$  по углу дает уравнение для  $N_{\kappa}$ :

$$(2\gamma_{\kappa} - \nu_e + \tilde{\gamma}_{\kappa}) N_{\kappa} + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{R}} 2\gamma_{\vec{R}} N_{\vec{R}}' = 0. \quad (54)$$



Здесь  $\tilde{\gamma}_k$  - изотропная часть  $\tilde{\gamma}_k$  :

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{4}{3} \pi^2 g^2 \frac{d}{dk} k^2 N_k. \quad (55)$$

Уравнения (53), (54) являются аналогами оценок (32), (33).

Подстановка (53) в (54) приводит к соотношению

$$\gamma_k^{\text{эф}} N_k = 0, \quad (56)$$

$$\gamma_k^{\text{эф}} = 2\gamma_k - \gamma_e + \tilde{\gamma}_k + \frac{1}{\pi} \int d\theta_k \gamma_k^2. \quad (57)$$

Учитывая условие внешней устойчивости спектра<sup>6)</sup>, (56) можно представить в виде:

$$\gamma_k^{\text{эф}} = 0, \quad \text{если } N_k > 0; \quad (58)$$

$$\gamma_k^{\text{эф}} \leq 0, \quad \text{если } N_k = 0. \quad (59)$$

Общая формула для изотропной части инкремента  $\gamma_k$  была получена в работе [20]. Для релятивистского пучка с малым энергетическим разбросом ( $\Delta E \ll I$ ) эта формула может быть заметно упрощена:

$$\gamma_k = -\frac{\gamma_0}{k^3} \mathbb{E}(k-1). \quad (60)$$

Здесь  $\mathbb{E}(k)$  - единичная ступенька:

$$\mathbb{E}(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k > 0; \\ 0, & \text{если } k < 0; \end{cases} \quad (61)$$

- а  $\gamma_0$  дается формулой (5).

Отклонение от простой зависимости (60) имеет место лишь в узкой области

$$|k-1| \lesssim \frac{\Delta E}{v^2}$$

и не играет сколько-нибудь заметной роли в дальнейшем.

Расчет изотропной части квадрата инкремента для аксиально-симметричного пучка приводит к следующей формуле:

6) Объяснение термина "внешняя" имеется в [21].

$$\int \gamma_k^2 d\theta_k = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{k^2-1}}{k^5} \mathbb{E}(k-1) \times$$

$$\times \int_0^\infty d\theta d\theta_1 \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial u(\theta_1)}{\partial \theta_1} (\theta + \theta_1) \left[ \mathcal{K}'\left(\frac{|\theta-\theta_1|}{\theta+\theta_1}\right) - E'\left(\frac{|\theta-\theta_1|}{\theta+\theta_1}\right) \right]. \quad (62)$$

Здесь  $\mathcal{K}'$  и  $E'$  - полные эллиптические интегралы первого и второго рода от дополнительного модуля,

$$u(\theta) = 2\pi \int_0^\infty dp p f(\vec{p}). \quad (63)$$

Формула (62) применима всюду, за исключением несущественной для дальнейшего узкой области

$$|k-1| \lesssim \left( \Delta\theta + \frac{\Delta E}{v^2 \Delta\theta} \right)^2.$$

Функция распределения электронов пучка определяется из уравнения диффузии. В данном случае оно представимо в виде

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{D_{||}}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{D_{\perp}}{p^2} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (64)$$

где

$$D_{||} = \frac{12\pi^2}{e_0} \int_1^\infty dk \frac{N_k}{k},$$

$$D_{\perp} = \frac{12\pi^2}{e_0} \int_1^\infty dk (k - \frac{1}{k}) N_k. \quad (65)$$

Пользуясь малостью энергетического разброса  $\Delta E$ , можно получить из (63) замкнутое уравнение для функции  $u(\theta, z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{D_{\perp}}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (66)$$

Уравнение (66) имеет автомодельное решение

$$u(\theta, z) = \frac{1}{\Delta\theta^2} u_1\left(\frac{\theta}{\Delta\theta}\right). \quad (67)$$

Множитель перед  $u_1$  выбран так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\int_0^\infty d\xi \xi u_1(\xi) = 1. \quad (68)$$

Подставляя (67) в (66) и учитывая (68), нетрудно установить, что:

$$\frac{d\Delta\theta^2}{dz} = D_{\perp}, \quad (69)$$



$$u_1(\xi) = \frac{1}{2} e^{-\xi^2/4} \quad (70)$$

Распределение (70) устанавливается после увеличения углового разброса пучка в несколько раз при любом начальном распределении с  $\Delta\theta_0 \ll 1$ . Вместе с  $u(\theta, z)$ , универсальной функцией оказывается инкремент пучковой неустойчивости. В частности, формула (62) приобретает вид

$$\int \gamma_{\kappa}^2 d\theta_{\kappa} = \frac{A \gamma_0^2 \sqrt{\kappa^2 - 1}}{\Delta\theta^3 \kappa^5} \Xi(\kappa - 1), \quad (71)$$

где

$$A = \frac{3}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^1 \frac{dx(1-x^2)[X'(x) - E'(x)]}{(1+x^2)^{5/2}} \approx 0.19. \quad (72)$$

Ленгмюровский спектр также удовлетворяет универсальному уравнению, для получения которого удобно ввести вспомогательную функцию  $N(\omega)$ :

$$N_{\kappa} = \frac{W}{4\pi a} \kappa^2 N(\kappa^2), \quad (73)$$

нормированную условием

$$\int_0^{\infty} d\kappa \kappa^4 N(\kappa^2) = a. \quad (74)$$

Подстановка (73) в (52), (50) дает:

$$\Gamma_{\kappa} = \frac{\pi^2 g^2 W^2}{16 \gamma_0^2 \kappa^5} \Gamma(\kappa^2), \quad (75)$$

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\omega} d\omega_1 (\omega - 2\omega_1)^2 F(\omega_1), \quad (76)$$

$$F(\omega_1) = \int_0^{\omega_1} d\omega_2 (\omega_2 - 2\omega_1)^2 N^2(\omega_2). \quad (77)$$

Величину  $a$ , которая пока произвольна, можно определить так, чтобы имело место соотношение:

$$W = \left( \frac{2}{\pi \Delta\theta} \right)^{3/2} (A \gamma_0 \gamma)^{1/2} \frac{a}{g}. \quad (78)$$

При этом выражение (57) для  $\gamma_{\kappa}^{sp}$  оказывается следующим:

$$\gamma_{\kappa}^{sp} = 2\gamma_0 \left[ \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\Gamma(\kappa^2)} - \frac{1}{\kappa^3} \right] \Xi(\kappa - 1) - \gamma_e + \frac{\pi g^2 W}{3a} \frac{d}{d\kappa} \kappa^4 N(\kappa^2). \quad (79)$$

Неравенство (46), выполненное с большим запасом, позволяет пренебречь в (79) третьим слагаемым, описывающим индуцированное рассеяние на ионах. В отсутствие этого процесса ленгмюровский спектр, очевидно, сосредоточен в области  $\kappa > 1$  и соотношения (58), (59) представимы в виде

$$\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega), \quad \text{если } N(\omega) > 0; \quad (80)$$

$$\Gamma(\omega) \geq \tilde{\Gamma}(\omega), \quad \text{если } N(\omega) = 0, \omega \geq 1; \quad (81)$$

где

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \frac{\sqrt{\omega - 1}}{\omega^{-3/2} + \gamma_e/2\gamma_0}. \quad (82)$$

Определяемая соотношениями (80), (81) функция  $N(\omega)$  не меняется в процессе релаксации. Зная эту функцию, можно вычислить по формуле (74) величину  $a$  и, подставив ее в (78), найти энергию ленгмюровских волн в зависимости от углового разброса пучка. Закон изменения углового разброса определяется уравнением (69) с коэффициентом диффузии

$$D_{\perp} = \left( \frac{18 A \gamma_0 \gamma}{\pi \Delta\theta^3} \right)^{1/2} \frac{\nu}{g \ell_0}, \quad (83)$$

$$\nu = \int_0^{\infty} d\omega (\omega - 1) N(\omega). \quad (84)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к формуле (40) с уточненным выражением для длины релаксации пучка:

$$\ell = \frac{4}{7} \left( \frac{\pi}{18 A \gamma_0 \gamma} \right)^{1/2} \frac{g \ell_0}{\nu}. \quad (85)$$

## 6. Построение спектра

Шестикратным дифференцированием по  $\omega$  уравнение (80) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\hat{L}^2 N^2(\omega) = - \frac{d^6 \tilde{\Gamma}(\omega)}{d\omega^6}, \quad (86)$$

$$\hat{L} \equiv \left( \omega \frac{d}{d\omega} \right)^2 + 7\omega \frac{d}{d\omega} + 14. \quad (87)$$



Общее решение уравнения (86) имеет вид

$$N^2(\omega) = c_1 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^\alpha + c_2 \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^\alpha \varrho_m \frac{\omega_m}{\omega} + \text{к.с.} + \tilde{N}^2(\omega). \quad (88)$$

Здесь  $\tilde{N}^2(\omega)$  - частное решение, которое строится стандартным способом с помощью решений однородного уравнения;

$$\alpha = \frac{1}{2} (-7 + i\sqrt{7}) - \quad (89)$$

один из корней характеристического уравнения

$$\alpha^2 + 7\alpha + 14 = 0;$$

$c_1$  и  $c_2$  - комплексные постоянные. Вещественный параметр  $\omega_m$  можно было бы включить в  $c_1, c_2$ , однако форма записи (88) более удобна для дальнейшего.

В общем случае ленгмюровский спектр состоит из набора сферических слоев, в каждом из которых имеет вид (88) со своими постоянными  $c_1, c_2$ . С одним слоем связано шесть вещественных постоянных:

$$\text{Re } c_1, \text{Im } c_1, \text{Re } c_2, \text{Im } c_2, \omega_m, \omega_M,$$

где  $\omega_m$  и  $\omega_M$  - нижняя и верхняя границы слоя. При подстановке (88) в (80) получается функция, отличающаяся в каждом из слоев от  $\tilde{\Gamma}(\omega)$  на некоторый полином пятой степени (свой в каждом слое). Условия обращения в нуль шести коэффициентов этого полинома во всех слоях позволяют однозначно определить все параметры спектра. Будучи однозначно определенной внутри слоев и равной нулю вне них, функция  $N(\omega)$ , вообще говоря, терпит разрыв на границе каждого слоя. Разрывы исчезают при учете индуцированного рассеяния на ионах. Оно придает границам слоев конечную ширину  $\delta\omega$ :

$$\delta\omega \sim \left(\frac{\nu g^2}{\gamma_0 \Delta\theta^3}\right)^{1/2} \ll 1.$$

В интересующем нас случае функция  $\tilde{\Gamma}(\omega)$  задается формулой (82) и спектр состоит из единственного сферического слоя. Частное решение уравнения (86) может быть представлено в виде

$$\tilde{N}^2(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^2} \hat{R}_2 \frac{d}{d\omega} \hat{R}_1 \frac{1}{\omega^2} \frac{d\tilde{\Gamma}}{d\omega}, & \omega_m < \omega < \omega_M; \\ 0, & \omega < \omega_m \text{ или } \omega > \omega_M. \end{cases} \quad (90)$$

Здесь  $\hat{R}_1$  и  $\hat{R}_2$  - линейные операторы, действие которых задается формулами:

$$\hat{R}_1 \chi = \chi + \frac{4}{\sqrt{7}} \text{Im}(\alpha+3) \omega^{\alpha+3} \int_{\omega_m}^{\omega} \frac{d\omega_1}{\omega_1^{\alpha+4}} \chi, \quad (91)$$

$$\hat{R}_2 \chi = \chi + \frac{8}{\sqrt{7}} \text{Im}(\alpha+3) \omega^{\alpha+2} \int_{\omega}^{\omega_M} \frac{d\omega_1}{\omega_1^{\alpha+3}} \chi. \quad (92)$$

Подстановка (88) с частным решением (90) в (80) приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{c_1}{\alpha+p} + \frac{c_2}{(\alpha+p)^2} + \text{к.с.} = \Gamma_p; \quad p = 1, 2, 3; \quad (93)$$

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega_M}\right)^\alpha \left[ \frac{c_1 + c_2 \varrho_m \frac{\omega_m}{\omega_M}}{\alpha+p} + \frac{c_2}{(\alpha+p)^2} \right] + \text{к.с.} = \Gamma_p; \quad (94)$$

$$p = 4, 5, 6.$$

Здесь:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{\omega_m^3}, \quad \tilde{F}(\omega) \equiv \hat{R}_1 \frac{1}{\omega^2} \frac{d\tilde{\Gamma}(\omega)}{d\omega},$$

$$\Gamma_4 = 3 \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{\omega_m^3} + \frac{4}{\sqrt{7}} \text{Im}(\alpha+5) I(\omega_m, \omega_M), \quad (95)$$

$$\Gamma_5 = 3 \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{\omega_m^3} + \frac{4}{\sqrt{7}} \text{Im}(\alpha+4) I(\omega_m, \omega_M),$$

$$\Gamma_6 = \frac{5}{2} \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{\omega_m^3} - \frac{15}{8} \frac{\tilde{F}(\omega_m)}{\omega_m^6} + \frac{1}{\sqrt{7}} \text{Im}(3\alpha+11) I(\omega_m, \omega_M),$$

$$I(\omega_m, \omega_M) = \omega_m^\alpha \int_{\omega_m}^{\omega_M} \frac{d\omega}{\omega^{\alpha+3}} \frac{d\tilde{F}(\omega)}{d\omega}.$$

Постоянные  $c_1, c_2, c_1^*, c_2^*$ , входящие в уравнения (93), (94) линейно, легко исключаются из этих уравнений. Оставшаяся система из двух уравнений с двумя неизвестными  $\omega_m$  и  $\omega_M$  решается численно. В частном случае  $\nu_e/2\gamma_0 \ll 1$  -

$$\begin{aligned} \omega_m &= 1.36, \\ \omega_M &= 4.96. \end{aligned} \quad (96)$$

Соответствующий этому случаю график функции  $\omega^{3/2} N(\omega)$  (которая пропорциональна плотности энергии волн по частоте) изображен на рисунке. Постоянные  $a$  и  $b$  оказываются следующими:

$$\begin{aligned} a &= 2.25, \\ b &= 1.61. \end{aligned} \quad (97)$$



Зная  $\alpha$  и  $\beta$ , нетрудно найти энергию ленгмюровских волн и длину релаксации пучка:

$$\begin{aligned} W &= 0.50 \frac{(\gamma_0 \nu)^{3/2}}{g \Delta \theta} & (98) \\ e &= 0.34 \frac{g e_0}{(\gamma_0 \nu)^{3/2}} \end{aligned}$$

В размерных переменных эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} W &= 3.76 n_0 T \left( \frac{n_e}{n_0} \frac{\nu}{\omega_p} \frac{T}{\rho m c^2} \frac{m}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\Delta \theta^{3/2}}, & (99) \\ e &= 0.27 \frac{c}{\omega_p} \rho \left( \frac{\rho m c^2}{T} \right)^{3/2} \left( \frac{m}{m} \frac{n_0}{n_e} \frac{\omega_p}{\nu} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При увеличении параметра  $\nu_e/\gamma_0$  результат качественно не меняется вплоть до значений  $\nu_e/\gamma_0 \sim 1$ .

### 7. Устойчивость

Вне области спектра функцию  $\Gamma(\omega)$  удобно вычислять с помощью формул:

$$\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega_m) + (\omega - \omega_m) \frac{d\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_m)^2 \times \left[ \frac{d^2 \tilde{\Gamma}(\omega_m)}{d\omega_m^2} + \omega_m^4 N^2(\omega_m - 0) \right], \quad \omega > \omega_m; \quad (100)$$

$$\Gamma(\omega) = \omega^3 \left\{ \frac{\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{\omega_m^3} + (\omega - \omega_m) \frac{d}{d\omega_m} \frac{\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{\omega_m^3} + \frac{1}{2} (\omega - \omega_m)^2 \left[ \frac{d^2}{d\omega_m^2} \frac{\tilde{\Gamma}(\omega_m)}{\omega_m^3} + \omega_m N^2(\omega_m + 0) \right] \right\}, \quad \omega < \omega_m. \quad (101)$$

Пользуясь этими формулами, нетрудно проверить внешнюю устойчивость найденного решения (неравенство (81)).

Вопрос об устойчивости также решается положительно: оказывается, что внешне устойчивый спектр обязательно устойчив. Для простоты рассмотрим этот вопрос в рамках уравнения

$$\frac{\partial N(\kappa^2)}{\partial t} = \gamma_{\kappa}^{\text{эф}} N(\kappa^2) + \epsilon_{\kappa}. \quad (102)$$

Член  $\epsilon_{\kappa}$ , описывающий источник шумов, учтен в (102) для того, чтобы исключить физически нереальную возможность обращения функции  $N(\kappa^2)$  в нуль. В пренебрежении индуцированным рассеянием на ионах эффективный инкремент  $\gamma_{\kappa}^{\text{эф}}$  может быть представлен в виде

$$\gamma_{\kappa}^{\text{эф}} = \begin{cases} 2\gamma_0 \sqrt{\kappa^2 - 1} \left( \frac{1}{\hat{\Gamma} N^2(\kappa^2)} - \frac{1}{\tilde{\Gamma}(\kappa^2)} \right), & \kappa > 1; \\ -\gamma_e, & \kappa < 1. \end{cases} \quad (103)$$

Здесь введено обозначение

$$\Gamma(\kappa^2) = \hat{\Gamma} N^2(\kappa^2),$$

подчеркивающее линейность функционала  $\Gamma(\kappa^2)$  по  $N^2(\kappa^2)$ . Оператор  $\hat{\Gamma}$  является симметричным и положительно определенным. В этом нетрудно убедиться с помощью представления

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\infty} d\omega_2 G(\omega, \omega_2) N^2(\omega_2), \quad (104)$$

$$G(\omega, \omega_2) = \int_0^{\infty} d\omega_1 (\omega - 2\omega_1)^2 (\omega_1 - 2\omega)^2 \square(\omega - \omega_1) \square(\omega_2 - \omega_1). \quad (105)$$

Пусть  $N_0(\kappa^2)$  — стационарное решение (102), а  $\Gamma_0(\kappa^2)$  — соответствующее этому решению значение  $\Gamma(\kappa^2)$ . Функция  $N_0(\kappa^2)$  близка к найденному выше спектру в силу его внешней устойчивости и малости  $\epsilon_{\kappa}$ . Выразив  $\tilde{\Gamma}(\kappa^2)$  через  $N_0(\kappa^2)$ , можно переписать уравнение (102) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma \Gamma_0}{2\sqrt{\kappa^2 - 1}} N_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N^2}{N_0^2} - 1 - \rho_m \frac{N^2}{N_0^2} \right) &= -2\gamma_0 (N^2 - N_0^2) \hat{\Gamma} (N^2 - N_0^2) - \\ - \epsilon_{\kappa} \frac{N + N_0}{N N_0} (N - N_0)^2, & \quad \kappa > 1; \end{aligned} \quad (106)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (N - N_0)^2 = -2\gamma_e (N - N_0)^2, \quad \kappa < 1.$$

После интегрирования по  $\kappa^2$  из уравнения (106) сразу следует устойчивость стационарного спектра относительно возмущений с

$$|\Gamma(\omega) - \Gamma_0(\omega)| \ll \Gamma_0(\omega). \quad (107)$$

### 8. Заключение

Область значений  $\gamma_0$ , в которой осуществляется рассмотренный режим релаксации, ограничена сверху наиболее жестким из условий линейности затухания звука —

$$\nu > |\lambda| \sim g W \Delta \theta, \quad (108)$$

$$\nu > |\tilde{\nu}| \sim g^2 W \quad - \quad (109)$$



и применимости стандартных кинетических уравнений теории слабой турбулентности. Кинетические уравнения применимы, если перенормировка частоты ионного звука мала:

$$W < 1, - \quad (II0)$$

а сама частота велика по сравнению с обратным временем нелинейных процессов:

$$g > \Gamma \sim \frac{g^2 W^2}{\nu}. \quad (III)$$

Для пучка с достаточно большим угловым разбросом самым жестким является условие (I08). При  $\Delta\theta \sim 1$  оно сводится к неравенству

$$\chi_0 < \nu. \quad (II2)$$

Это неравенство обеспечивает применимость полученных выше соотношений на заключительной стадии релаксации, во время которой энергетические потери пучка максимальны.

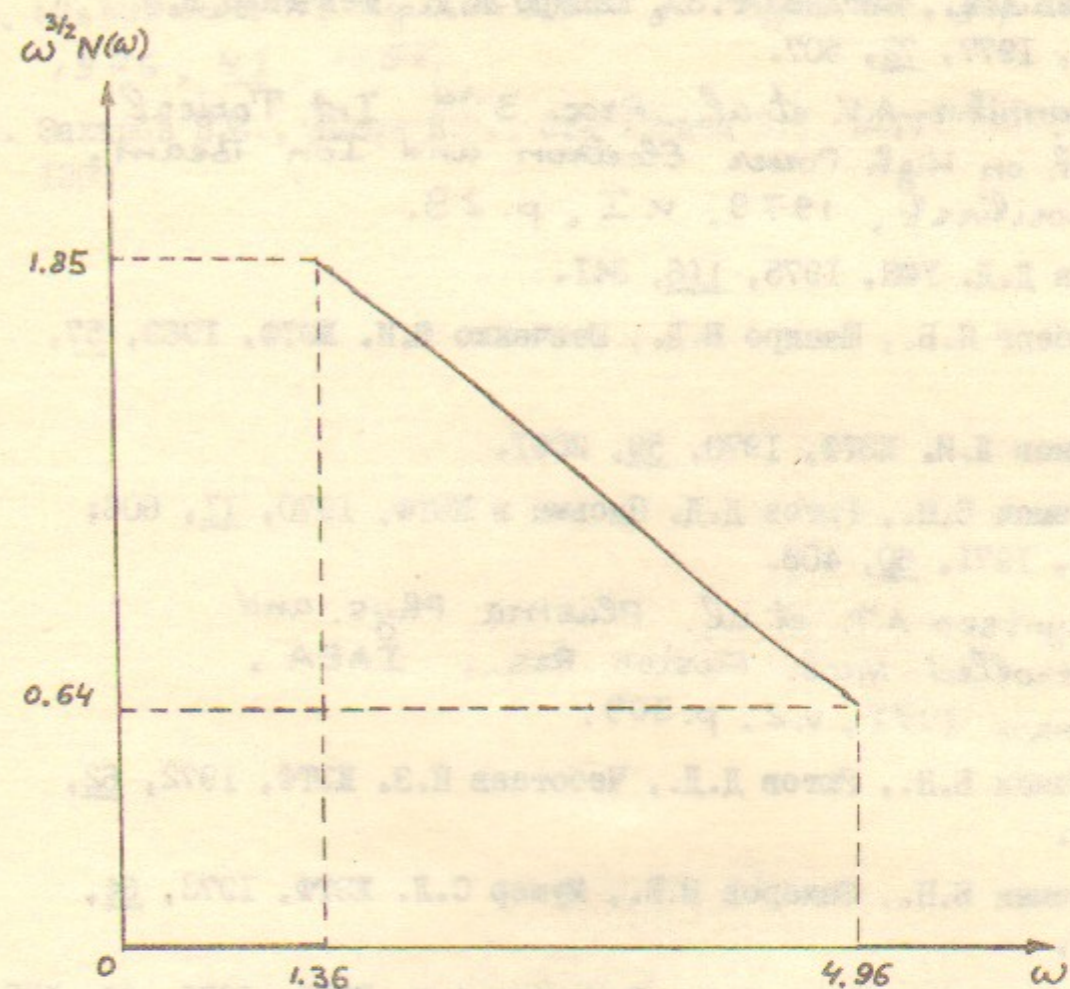
Заметим, что для размытого пучка из неравенства (I08) следует малость обратного времени нелинейных процессов не только по сравнению с частотой, но и по сравнению с затуханием ионного звука. Это позволяет считать звук "статичным", т.е. пользоваться соотношениями (25), связывающими звуковой спектр с ленгмюровским, даже в тех случаях, когда последний еще не установился. Таким образом, область применимости использовавшегося в работе [9] статического приближения гораздо шире области преобладания индуцированного рассеяния на ионах.

Сравнение условий (29) и (II2) показывает, что с исследованием четырехплазмонного взаимодействия граница применимости теории релаксации по параметру  $n_e/n_0$  возрастает в

$$\frac{1}{g^2} \sim \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \quad (II3)$$

раз. (Для дейтериевой плазмы с температурой 10 кэВ - в 100 раз). Кроме того, при стабилизации пучковой неустойчивости за счет четырехплазмонного процесса снимается связанное с требованием отсутствия ленгмюровского конденсата ограничение на параметр  $\chi/\nu_e$ , бывшее в случае индуцированного рассеяния на ионах очень жестким; конденсат не возникает даже при слабом затухании ленгмюровских волн, если угловой разброс пучка не слишком мал.

Автор благодарен Л.С.Пеккеру и В.П.Нагорному за помощь в вычислениях на ЭВМ.



Зависимость плотности энергии ленгмюровских волн по частоте от дисперсионной добавки при стабилизации пучковой неустойчивости за счет четырехплазмонного процесса. Все переменные безразмерны. Затухание ленгмюровских волн мало по сравнению с инкрементом неустойчивости размытого пучка:  $\nu_e \ll \chi_0$ .



Л и т е р а т у р а

1. Галеев А.А., Сагдеев Р.З., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. ЖЭТФ, 1977, 72, 507.
2. Arzhannikov A.V. et al. Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Topical Conf. on High Power Electron and Ion Beams, Novosibirsk, 1979, v. I, p. 29.
3. Рютов Д.Д. УФН, 1975, 116, 341.
4. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. ЖЭТФ, 1969, 57, 966.
5. Рудаков Л.И. ЖЭТФ, 1970, 59, 2091.
6. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ, 1970, 11, 606; ЖЭТФ, 1971, 60, 408.
7. Aityntsev A.T. et al. Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Res., IAEA, Vienna, 1971, v. 2, p. 309.
8. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д., Чеботаев П.З. ЖЭТФ, 1972, 62, 1409.
9. Брейзман Б.Н., Захаров В.Е., Мушер С.Л. ЖЭТФ, 1973, 64, 1297.
10. Захаров В.Е., Мушер С.Л., Рубенчик А.М. ЖЭТФ, 1975, 69, 155.
11. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д. Ядерный синтез, 1974, 14, 873.
12. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, 421.
13. Брейзман Б.Н. ЖЭТФ, 1975, 69, 896.
14. Брейзман Б.Н., Малкин В.М., Соболев О.П. ЖЭТФ, 1977, 72, 1783.
15. Коврижных Л.М. ЖЭТФ, 1965, 49, 237; ЖЭТФ, 1965, 49, 1376.
16. Липеровский В.А., Цытович В.Н. Изв. вузов - Радиофизика, 1969, 12, 823.
17. Цытович В.Н. Теория турбулентной плазмы. Атомиздат, М., 1971, с. 184.
18. Малкин В.М. Физика плазмы, 1981, 7, в. 6.
19. Мушер С.Л., Рыбак И.Я., Стурман Б.И. Физика плазмы, 1979, 5, 58.

20. Nishikawa K, Ryutoz D.D. J. Phys. Soc. Japan, 1976, 41, 1757.
21. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. ЖЭТФ, 1970, 59, 1200.