

37

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Л.С.Пеккер

ПОПЕРЕЧНЫЙ ПЕРЕНОС В АМБИПОЛЯРНОЙ
ЛОВУШКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПИКА В ФУНКЦИИ
ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

ПРЕПРИНТ 81 - 131



Новосибирск

ПОПЕРЕЧНЫЙ ПЕРЕНОС В АМБИПОЛЯРНОЙ ЛОВУШКЕ
ПРИ НАЛИЧИИ ПИКА В ФУНКЦИИ ОТРАЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

Л. С. Пеккер

АННОТАЦИЯ

Рассмотрен резонансный режим диффузии ионов в центральном пробкотроне амбиполярной ловушки, в случае, когда функция отражения частиц представляет собой узкий пик по питч-углу.

I. Как известно, магнитное поле в торцевых пробкотронах амбиполярной ловушки [1,2] обладает свойством "min B", что обеспечивает МГД устойчивость плазмы, но одновременно нарушает аксиальную симметрию магнитного поля всей системы. Последнее обстоятельство является весьма существенным, т.к. при отражении от аксиально несимметричных магнитных пробок частица смещается не только по азимуту, но и по радиусу, что может привести к резкому увеличению поперечных потерь плазмы в центральном пробкотроне [3,4]. В параксиальном приближении величина радиального смещения Δr при отражении частицы от пробки задается следующим выражением [3]:

$$\Delta r = a(r, \varepsilon, \chi) \cdot \cos 2\psi, \quad (1)$$

где ψ - азимутальный угол влета в пробку, отсчитываемый от плоскости симметрии ловушки. Амплитуда a , которую ниже будем называть функцией отражения, зависит от радиуса r влета в пробку, энергии частицы ε и χ - косинуса пичч угла θ частицы в области однородного поля. По порядку величины a равно:

$$a \sim \frac{\rho_{Li} r}{L_n},$$

где L_n - длина пробки, ρ_{Li} - ларморовский радиус ионов и $r/L_n \ll 1$.

В первых работах по неоклассическому и резонансному переносу предполагалось, что характерный масштаб изменения $a(\chi)$ порядка единицы. Однако, для конкретных магнитных полей это может быть и не так. Например, для ловушки АМБАЛ зависимость a от χ имеет ярко выраженный пик при $\chi = 0,75$ с шириной $\Delta\chi = 0,1$, малой по сравнению с единицей (рис.1). Еще одна особенность в a (см.рис.1) существует в окрестности пичч-углов, близких к θ_c - углу конуса потерь для данной силовой линии, которая связана с тем, что при стремлении χ к $\chi_c = \cos \theta_c$, время, проводимое частицей вблизи максимума поля растет, приводя к соответствующему возрастанию смещения Δr (см.подробнее в [5]). Такие пики в поведении функции отражения в принципе могли бы, по-видимому, быть устранены более тщательным подбором геометрии магнитного поля пробки. Например, в магнитных полях обладающих свойством омнигенности [12] эти особенности в a вообще отсутствуют. Заметим однако, что во всех построенных амбиполярных ловушках АМБАЛ, ТМХ, ГАММА-6 и др. магнитное поле не является

омнигенным.

Наличие пиков в $a(\chi)$ может существенно влиять в худшую сторону на поперечное время удержания плазмы в амбиполярной ловушке. В режиме неоклассической диффузии, т.е. когда характерный угол проворота иона $\Delta\psi$ за один пролет ловушки много меньше единицы, учет пика приводит к резкому возрастанию так называемой поперечной диффузии на расщеплении дрейфовых поверхностей [6], которая оказывается, например, для ловушки АМБАЛ гораздо важнее, чем обычная неоклассическая диффузия [4] для гладкой функции отражения.

Применительно к более длинным ловушкам, представляет интерес случай, когда $\Delta\psi$ больше или порядка единицы — режим резонансной диффузии. Качественное рассмотрение в этом режиме, проведенное в работе [7], показало, что если ширина пика $\Delta\chi$ больше, чем ширина области резонансных частиц $\delta\chi \sim (a/r\Delta\psi)^{1/2}$, то оценки коэффициента диффузии, обусловленные пиком, имеют вид:

$$D_p \sim \nu r^2 \left(\frac{a_p \Delta\psi}{r} \right)^{1/2} \Delta\chi, \text{ если } \nu t_n \leq \left(\frac{a_p}{r} \right)^{3/2} \Delta\psi^{-1/2}, \quad (2')$$

$$D_p \sim \frac{a_p^2}{t_n} \Delta\chi, \text{ если } \nu t_n > \left(\frac{a_p}{r} \right)^{3/2} \Delta\psi^{-1/2}, \quad (2'')$$

где a_p — высота пика, $t_n = L/\nu$ — время пролета ионом ловушки, L — длина центрального пробкотрона ($L \gg L_n$), ν — частота ион-ионных столкновений. Для пика, связанного с близостью χ и χ_c при типичных параметрах амбиполярной ловушки ($r/L_n > 0.1$, $\rho_{ni}/r < 0.02$ и $\Delta\psi \geq 1$) ширина $\Delta\chi$, оцениваемая по формуле $(d \ln a / d\chi)^{-1}$, оказывается порядка $r^2 \ln(L_n^2/r^2) / L_n^2$ (см. [5]) и больше чем $\delta\chi$. Если учесть теперь, что $a_p \sim a \ln(L_n^2/r^2)$ [5], где a — характерное значение функции ограничения вне пика, то наличием этого пика в поперечном переносе можно, согласно формулам (2), пренебречь.

Заметим теперь, что формулы (2) совпадают с оценками без пика [3] с точностью до множителя $\Delta\chi$, учитывающего малость ширины пика. Более того, т.к. в [3], неявно предполагалось, что характерный масштаб изменения $a(\chi)$ больше чем $\delta\chi$, понятно, что и формальные выражения для поперечного потока частиц q_r в случае, когда $\delta\chi \ll \Delta\chi \ll 1$, будут тождественно

совпадать с соответствующими формулами для q_r из [3].

Более содержательным является случай неравенства:

$$\Delta\chi < \delta\chi. \quad (3)$$

Для дальнейшего полезно, следуя [7], получить оценку коэффициента поперечной диффузии в этом случае. При $\Delta\psi \geq 1$ перенос в плазме определяется резонансными частицами, находящимися на фазовой плоскости (ε, χ) в окрестности кривых, задаваемых (на данном радиусе r) следующим уравнением [3]:

$$\Delta\psi(r, \varepsilon, \chi) = \frac{\pi}{2} (2k+1), \quad (4)$$

где k — целое число. Ширина полосы резонансных частиц в ε и χ — направлениях порядка [3]:

$$\delta\chi \approx \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \approx \sqrt{\frac{a}{r\Delta\psi}}, \quad (5)$$

а линии, образованные пересечением траекторий частиц из этой полосы с экваториальной плоскостью ловушки, имеют форму "банана" ширины $\Delta r_g \sim (a r / \Delta\psi)^{1/2}$; время обхода "банана" $\tau_g \sim \sqrt{r/a\Delta\psi}$. Наличие пика в функции отражения приводит к появлению на фазовой плоскости (ε, χ) полосы шириной $\Delta\chi$, пересекающей резонансные кривые (4) (рис.2), в которой $a \sim a_p$. Из неравенства (3) следует, что частицы, находящиеся на пересечении полосы $\Delta\chi$ и резонансной полосы с номером, например, k (рис.2), вследствие столкновений покидают полосу $\Delta\chi$ быстрее, чем выходят их резонанса. Поэтому роль эффективной частоты ν_{eff} принимает на себя величина $\nu / \Delta\chi^2$. При малых значениях ν , а именно, когда ν_{eff}^{-1} больше, чем τ_g , (этот режим потерь называется банановым), коэффициент диффузии D_p определяется резонансными частицами, находящимися на пересечении обеих полос. Величина D_p равна произведению $(\Delta r_g)^2 \nu_{eff}$, умноженному на долю частиц в области пересечения, которая порядка $\Delta\chi \delta\varepsilon/\varepsilon$ а также на число резонансов $\sim \Delta\psi$. В результате имеем:

$$D_p \sim \nu r^2 \left(\frac{a_p \Delta\psi}{r} \right)^{1/2} \frac{1}{\Delta\chi \Delta\psi^{1/2}}. \quad (6')$$

В режиме плато, когда $\tau_g > \nu_{eff}^{-1}$, по аналогии с работой [3], нетрудно получить, что

$$D_p \sim \frac{a_p^2}{t_n} \Delta\chi. \quad (6'')$$

Как видим из (2''), (6''), оценки D_p в режиме плато не зависят от соотношения между $\Delta\chi$ и $\delta\chi$. Это совпадение не является случайным. Как будет показано в следующем разделе, совпадают также и точные аналитические выражения для q_r в этом режиме. Исследование потерь в банановом режиме в случае, когда выполнено неравенство (3), посвящен раздел 3.

2. Прежде всего рассмотрим дрейфовое кинетическое уравнение для резонансных ионов в случае, когда функция отражения имеет вид узкого пика (см., например, рис.1, точечная линия) с шириной $\Delta\chi$ такой, что

$$\Delta\chi \ll \delta\chi \ll 1. \quad (7)$$

При этом, для удобства изложения, будем предполагать, что имеется только один резонанс с $\kappa = 0$. Т.к. время пролета ионов между точками поворота мало по сравнению с ν^{-1} , то функцию распределения их f_i можно считать постоянной вдоль траектории движения, так что f_i имеет вид:

$$f_i = f_i(\varepsilon, \chi, r, \psi, \zeta), \quad (8)$$

где r , ψ и χ соответственно полярные координаты и косинус питч-угла частицы в экваториальной плоскости центрального пробиротрона, а $\zeta = \text{sign}(v_z)$, т.е. $\zeta = 1$ соответствует функции распределения ионов с $v_z > 0$. Представим f_i в виде $f_i = f_M + \delta f$, где

$$f_M = n(r) \frac{1}{\pi^{1/2} T(r)^{3/2}} \exp(-\varepsilon/T(r)) \quad (9)$$

(n , T и ε соответственно плотность, температура и кинетическая энергия ионов). Тогда кинетическое уравнение на δf имеет вид [3]:

$$\dot{\psi} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} + \dot{r} \frac{\partial \delta f}{\partial r} + \dot{r} \frac{\partial f_M}{\partial r} = st f_i, \quad (10)$$

где $st f_i$ - столкновительный член,

$$\dot{\psi} = \frac{r - r_0}{t_n(r_0, \varepsilon, \chi)} \Delta\psi'_r(r, \varepsilon, \chi) \Big|_{r=r_0}, \quad (11)$$

$$\dot{r} = -G \sin(2\psi) \frac{a(r_0, \varepsilon, \chi)}{t_n(r_0, \varepsilon, \chi)},$$

а r_0 определяется из условий резонанса $\Delta\psi(r_0, \varepsilon, \chi) = \pi/2$.

Здесь необходимо сделать следующее замечание. В процессе поперечной диффузии возникают возмущения плотности и давления, зависящие от азимутального угла ψ . Как следствие этого появляется аксиально-несимметричное возмущение магнитного поля, которое приводит к дополнительному радиальному дрейфу частицы в соленоидальной части ловушки. Этот эффект может быть учтен соответствующей перенормировкой a , аналогично тому, как это было сделано в работе [4].

Общее выражение для столкновительного члена в (10) существенно упрощается, если учесть, что в случае неравенства (3) δf , как было отмечено в первом разделе, резко меняется при малых отклонениях χ от χ_p - положения максимума a . Оставляя в $st f_i$ лишь члены со второй производной по χ , получим, согласно [8]:

$$st f_i = \nu(\varepsilon, r_0) \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \chi^2}, \quad (12)$$

где

$$\nu(\varepsilon, r_0) = \frac{\pi n(r_0) z^4 e^4 \Lambda}{\varepsilon \sqrt{2m}} (1 - \chi_p^2) \Phi\left(\frac{\varepsilon}{T(r_0)}\right), \quad (13)$$

$$\Phi(x) = \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \text{erf}(x) - \frac{\exp(-x)}{\sqrt{\pi x}}, \quad (14)$$

Λ - кулоновский логарифм.

Учитывая теперь, что δf отлична от нуля, фактически, только в малой окрестности пересечения линий $\chi = \chi_p$ и $r = r_0(\varepsilon, \chi)$ (пересечение происходит при $\varepsilon = \varepsilon_0$, рис.2), можно считать t_n , $\Delta\psi'_r$, ν постоянными, функцию отражения зависящей только от χ , а также брать $\partial f_M / \partial r$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$. В результате кинетическое уравнение принимает вид:

$$-\zeta \frac{a(\chi)}{t_n} \sin(2\psi) \left(\frac{\partial \delta f}{\partial r} + \frac{\partial f_M}{\partial r} \right) - (r - r_0) \frac{\Delta\psi'_r}{t_n} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = \nu \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \chi^2}. \quad (15)$$

Из уравнения (15) нетрудно видеть, что \dot{r} и δf для ионов с $v_z < 0$ отличаются соответственно от \dot{r} и δf для ионов с $v_z > 0$ только знаком. Поэтому ниже мы приведем все вычисления

с $\epsilon = 1$, а в конечном ответе учтем и ионы с $\mathcal{U}_2 < 0$; для сокращения записи всюду опустим переменную ϵ .

Перейдем к рассмотрению поперечных потерь в режиме плато. Напомним, что этому режиму соответствует неравенство $\nu \ll \omega \gg \tau_e^{-1}$, т.е.

$$\frac{\nu}{(\Delta\gamma)^2} \gg \frac{1}{t_n \nu} \sqrt{\frac{a_p \Delta\psi}{r}} \quad (I6)$$

В этом случае, как показывают простые оценки, в кинетическом уравнении можно пренебречь членом $\dot{r} \partial \delta f / \partial r$. Разложив $r = r_0(\epsilon, \gamma)$ вблизи точки (γ_p, ϵ_0) , введя переменные $\bar{\epsilon} = \epsilon - \epsilon_0$, $\bar{\gamma} = \gamma - \gamma_p$ и обозначив

$$\alpha_\epsilon = 2 \frac{\partial r_0}{\partial \epsilon} \frac{\Delta\psi'_r}{t_n \nu}, \quad \alpha_\gamma = 2 \frac{\partial r_0}{\partial \gamma} \frac{\Delta\psi'_r}{t_n \nu}, \quad (I7)$$

$$a_0(\gamma) = \frac{a(\gamma)}{t_n \nu}, \quad \delta f_0 = \delta f / \left(\frac{\partial f_M}{\partial r} \right), \quad (I8)$$

запишем уравнение (I5) в виде:

$$\sin(2\psi) a_0(\bar{\gamma}) + \frac{1}{2} (\alpha_\epsilon \bar{\epsilon} + \bar{\gamma} \alpha_\gamma) \frac{\partial \delta f_0}{\partial \psi} = - \frac{\partial^2 \delta f_0}{\partial \bar{\gamma}^2}. \quad (I9)$$

Для определенности будем считать знак α_γ положительным. Это предположение не является существенным, т.к. α_γ не входит в конечную формулу для поперечного потока ионов q_r (см. ниже (26)).

Решение (I9) будем искать в виде:

$$\delta f_0 = f^c \cos(2\psi) + f^s \sin(2\psi).$$

Это представление приводит к следующей системе уравнений для f^c и f^s :

$$a_0(\bar{\gamma}) - (\alpha_\epsilon \bar{\epsilon} + \alpha_\gamma \bar{\gamma}) f^c = - \frac{\partial^2 f^s}{\partial \bar{\gamma}^2}, \quad (I9')$$

$$(\alpha_\epsilon \bar{\epsilon} + \alpha_\gamma \bar{\gamma}) f^s = - \frac{\partial^2 f^c}{\partial \bar{\gamma}^2}.$$

Удобно теперь перейти к уравнению на комплексную функцию $\bar{f} = f^s + i f^c$, которое уже легко решается методом Фурье. Для этого домножим второе уравнение (I9') на i и сложим с первым; в результате получим:

$$a_0(\bar{\gamma}) + i (\alpha_\epsilon \bar{\epsilon} + \alpha_\gamma \bar{\gamma}) \bar{f} = - \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{\gamma}^2}. \quad (I9'')$$

Преобразование Фурье этого уравнения дает:

$$A(\omega) + i \alpha_\epsilon \bar{\epsilon} \psi(\omega, \bar{\epsilon}) + \alpha_\gamma \frac{\partial \psi(\omega, \bar{\epsilon})}{\partial \omega} = \omega^2 \psi(\omega, \bar{\epsilon}), \quad (20)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega \bar{\gamma}) a_0(\bar{\gamma}) d\bar{\gamma}, \quad (21)$$

$$\psi(\omega, \bar{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega \bar{\gamma}) \bar{f}(\bar{\gamma}, \bar{\epsilon}) d\bar{\gamma}.$$

Нахождение решения уравнения (20) не представляет труда, поэтому приведем только окончательный ответ:

$$\psi = \frac{1}{\alpha_\gamma} \exp\left(\frac{\omega^3}{3\alpha_\gamma} - i \frac{\alpha_\epsilon}{\alpha_\gamma} \bar{\epsilon} \omega\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega'^3}{3\alpha_\gamma} + i \frac{\alpha_\epsilon}{\alpha_\gamma} \bar{\epsilon} \omega'\right) A(\omega') d\omega' \quad (22)$$

и

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi \alpha_\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} a_0(\bar{\gamma}') d\bar{\gamma}' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{\omega^3}{3\alpha_\gamma} - i \frac{\alpha_\epsilon}{\alpha_\gamma} \bar{\epsilon} \omega - i \bar{\gamma} \omega\right) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega'^3}{3\alpha_\gamma} + i \frac{\alpha_\epsilon}{\alpha_\gamma} \bar{\epsilon} \omega' + i \omega' \bar{\gamma}'\right) d\omega'. \quad (23)$$

В формуле для поперечного потока ионов, усредненного по азимутальному углу,

$$q_r = \frac{L}{2\pi} \sum_{\epsilon} \int_{-1}^1 d\gamma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\psi \dot{r} \sqrt{\epsilon} \delta f, \quad (24)$$

учтем, что \dot{r} содержит только синусоидальную гармонику по углу 2ψ , и что δf является узкой функцией ϵ и γ . Последнее обстоятельство позволяет формально проводить интегрирование по ϵ и γ от $-\infty$ до $+\infty$, а также положить ϵ в подынтегральном выражении (24) константой, равной ϵ_0 и вынести $\sqrt{\epsilon_0}$ из под знака интеграла. Следовательно, q_r равно:

$$q_r = - \frac{L}{2} \frac{\partial f_M}{\partial r} \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{t_n} \sum_{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} a_0(\bar{\gamma}) \bar{f}(\bar{\epsilon}, \bar{\gamma}) d\bar{\epsilon} d\bar{\gamma} \quad (25)$$

Подставляя в формулу (25) \bar{f} из (23) и проводя интегрирование по ω' , ε , ω и χ , получим:

$$q_r = -\frac{L}{2} \sqrt{\pi} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{|\Delta\psi'_\varepsilon| t_n} \frac{\partial f_M}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(\bar{\chi}', \varepsilon_0) d\bar{\chi}' \quad (26)$$

В выражении (26) мы учли частицы с $v_z < 0$ и очевидное тождество:

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \Delta\psi(\Gamma_0, \varepsilon, \chi)}{\partial \Gamma_0} + \frac{\partial \Delta\psi(\Gamma_0, \varepsilon, \chi)}{\partial \varepsilon} = 0$$

Если имеется несколько резонансов, то полный поток q_r получается суммированием по всем резонансам:

$$q_r = -\pi L \sum_k \frac{\sqrt{\varepsilon_k}}{2 t_n |\Delta\psi'_\varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} a^2(\varepsilon_k, \chi) d\chi \quad (27)$$

Если сравнить формулу (27) с q_r из работы [3]:

$$q_r = -\frac{\pi H_0}{2^{3/2} m^{3/2}} \sum_k \int d\mu \frac{a^2}{|\Delta\psi'_\varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r} \quad (28)$$

(H_0 — магнитное поле в соленоиде и μ — магнитный момент иона), то легко увидеть, что они тождественно совпадают, если в формуле (28) учесть пикообразную форму функции отражения. Таким образом показано, что формула (28) дает количественно правильный результат, даже в случае пикообразного вида функции $a(\chi)$.

3. Перейдем теперь к рассмотрению поперечных потерь плазмы в банановом режиме. В этом случае, как известно, имеет место неравенство, противоположное (16)

$$\frac{\nu}{(\Delta\chi)^2} \ll \frac{1}{t_n} \sqrt{\frac{a_p \Delta\psi}{r}} \quad (29)$$

означающее, что время обхода банана меньше ν_{eff}^{-1} . При этом в кинетическом уравнении (15), как показывают простые оценки, в выражении $\Gamma - \Gamma_0(\varepsilon, \chi)$, входящем в $\dot{\Gamma}$, можно положить χ равным χ_p ; имеем:

$$a(\chi) \sin(2\psi) \left(\frac{\partial \delta f}{\partial r} + \frac{\partial f_M}{\partial r} \right) + (\Gamma - \Gamma_0(\varepsilon, \chi)) \Delta\psi'_r \frac{\partial \delta f}{\partial r} = -\nu t_n \frac{\partial^2 \delta f}{\partial \chi^2} \quad (30)$$

Как и во втором разделе, мы рассматриваем кинетическое уравнение в случае одного резонанса с $k = 0$ и для $\Theta = 1$; в конеч-

ном ответе будут учтены частицы и с $v_z < 0$.

Переходя в уравнении (30) от переменных $\Gamma, \psi, \varepsilon, \chi$ к переменным $\Gamma, \psi, \gamma, \chi$, где $\gamma = a(\chi) \cos(2\psi) + (\Gamma - \Gamma_0(\varepsilon, \chi_p))^2 \Delta\psi'_r$, и пренебрегая малым членом $\dot{\Gamma}(\partial f / \partial r)_\gamma$, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \left(\frac{\partial \delta f}{\partial \psi} \right)_\gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \psi} \frac{\partial f_M}{\partial r} = -\nu t_n L_0^2 \delta f \quad (31)$$

Оператор L_0 имеет вид:

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial \chi} + \cos(2\psi) \frac{da}{d\chi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \quad (32)$$

Пусть для определенности $\Delta\psi'_r > 0$ *, тогда уравнение на функцию распределения δf запишется в виде:

$$a(\chi) \sin(2\psi) \frac{\partial f_M}{\partial r} + \eta \sqrt{\Delta\psi'_r} (\gamma - a(\chi) \cos(2\psi))^{1/2} \frac{\partial \delta f}{\partial \psi} = -\nu t_n L_0^2 \delta f \quad (33)$$

где η равно $+1$, если $\Gamma - \Gamma_0(\varepsilon, \chi_p) > 0$, и -1 , если $\Gamma - \Gamma_0(\varepsilon, \chi_p) < 0$.

В уравнении (33) удобно перейти к функции g по формуле:

$$g_{\pm} = \pm \sqrt{\gamma - a(\chi) \cos(2\psi)} + \sqrt{\Delta\psi'_r} \delta f / \left(\frac{\partial f_M}{\partial r} \right) \quad (34)$$

в которой знак $+$ соответствует значению η , равному 1 , а минус $-\eta$, равному -1 ; имеем:

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} = -\frac{\nu t_n \eta}{\sqrt{\gamma - a(\chi) \cos(2\psi)}} L_0^2 g \quad (35)$$

Представим g в виде ряда по малому параметру ν :

$$g = g_0 + \nu g_1 + \nu^2 g_2 + \dots$$

Нам потребуется только нулевой член разложения g_0 . Действуя так же, как в [9, 10] нетрудно показать, что g_0 для захваченных ионов, т.е. у ионов у которых $\gamma < a(\chi)$, обращается в нуль, а для пролетных ионов (когда $\gamma > a(\chi)$) удовлетворяет следующему уравнению:

$$\int_0^{\pi} L_0^2 \left(\frac{g_0(\gamma, \chi)}{\sqrt{\gamma - a(\chi) \cos(2\psi)}} \right) d\psi = 0 \quad (36)$$

* В конечную формулу для q_r входит $|\Delta\psi'_r|$, поэтому выбор знака $\Delta\psi'_r$ является непринципиальным.

При этом g_0 непрерывна на сепаратрисе, разделяющей захваченные и пролетные ионы, а $\partial g_0 / \partial \chi$ на ней имеет скачок. Т.к. δf стремится к константе при $\gamma \rightarrow \infty$, то из (34) следует, что асимптотика g_0 равна $\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}$. На рисунке 3 представлена качественная зависимость $g_0(\gamma)$ при фиксированном значении χ .

Уравнение (36) не удается решить аналитически. При решении его численными методами можно поставить следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial g_0(\gamma, \chi)}{\partial \chi} \right|_{\chi=\pm\infty} = 0, \quad g_0(\gamma, \chi) \Big|_{\gamma=a(\chi)} = 0, \quad \left. \frac{\partial g_0(\gamma, \chi)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=a(\chi)} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}, \quad (37)$$

учитывающие резкий спад $a(\chi)$ при малых отклонениях χ от χ_p , значение g_0 на сепаратрисе, а также асимптотику g_0 при $\gamma \rightarrow +\infty$. Ниже мы возвратимся к решению уравнения (36), но сначала получим выражение для усредненного по азимутальному углу поперечного потока ионов q_r .

Подставляя в (24) выражения для \dot{r} , переходя от интегрирования по энергии к интегрированию по γ и учитывая при этом, что γ меняется в пределах $(a(\chi), \infty)$, после простых преобразований получим:

$$q_r = -\frac{L\sqrt{\varepsilon_0}v}{t_n |\Delta\psi'_\varepsilon|} \sum_{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \int_{a(\chi)}^{\infty} d\gamma \int_0^{2\pi} L_0(\delta f) \frac{d\psi}{2\pi} \quad (38)$$

В формуле (38) учтены также частицы с $v_z < 0$. Выразим теперь δf через функцию g и проведем интегрирование по ψ и γ :

$$q_r = -2 \frac{L\sqrt{\varepsilon_0}v}{|\Delta\psi'_\varepsilon| \sqrt{|\Delta\psi'_r|}} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi \left(\frac{da(\chi)}{d\chi} \right)^2 \left. \frac{\partial g_0(\gamma, \chi)}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=a(\chi)} \quad (39)$$

Коэффициент 2 получается в результате суммирования по γ . Из выражения (39) следует, что, если функция отражения задается двумя параметрами — амплитудой и шириной пика, то q_r равно:

$$q_r = -2 \frac{L\sqrt{\varepsilon_0}v}{|\Delta\psi'_\varepsilon| \sqrt{|\Delta\psi'_r|}} \frac{\partial f_n}{\partial r} \frac{q_r}{\Delta\delta} \alpha, \quad (40)$$

где α — константа порядка единицы, которая определяется конкретной функциональной зависимостью a от δ (во избежания недоразумений подчеркнем, что при вычислении α надо брать характерные ширину и высоту пика порядка единицы).

Найдем коэффициент α , входящий в (40), когда зависимость $a(\delta)$ имеет степенной вид:

$$a = \frac{1}{(\bar{\gamma} + 1)^\gamma}$$

где $\bar{\gamma} = \gamma - \gamma_p$, а высота и ширина пика положены равными единице. Для нахождения $g_0(\gamma, \chi)$ в уравнении (36) удобно перейти от переменных γ и χ к переменным $z = a/\gamma$ и a ; имеем:

$$M_0 a^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial a^2} + 2 M_1 a z \frac{\partial^2 g_0}{\partial a \partial z} + M_2 z^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial z^2} + 2z(M_2 - M_1) \frac{\partial g_0}{\partial z} = -\frac{\gamma+1}{\gamma} \left\{ M_0 a \frac{\partial g_0}{\partial a} + M_1 z \frac{\partial g_0}{\partial z} \right\}, \quad (41)$$

где

$$M_0(z) = \int_0^\pi d\psi (1 - z \cos \psi)^{-1/2}, \quad M_1(z) = \int_0^\pi d\psi (1 - z \cos \psi)^{1/2}, \\ M_2(z) = \int_0^\pi d\psi (1 - z \cos \psi)^{3/2}.$$

Структура уравнения (41) позволяет искать решение с разделяющимися переменными. Из граничных условий (37) следует, что g_0 необходимо искать в виде: $g_0 = \sqrt{a} \Phi(z)$, где функция $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{1}{4} M_0 \Phi + 3 M_1 \frac{d\Phi}{dz} + 3^2 M_2 \frac{d^2\Phi}{dz^2} + 2z \frac{d\Phi}{dz} (M_2 - M_1) = -\frac{\gamma+1}{\gamma} \left(\frac{1}{2} M_0 \Phi + 3 M_1 \frac{d\Phi}{dz} \right). \quad (42)$$

Т.к. $\Phi(z)$ при $z \rightarrow 0$ стремится к $1/\sqrt{3}$, то решение этого уравнения можно записать в виде следующего ряда:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{2k} \right) + d,$$

где константа d определяется из условия: $\Phi(z) = 0$ при $z = 1$, а коэффициенты β_k удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению (мы здесь его не выписываем), которое несложно получить, если представить M_0, M_1, M_2 в виде рядов [II]:

$$M_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-1)!!}{(2^{2k} k!)^2} z^{2k}, \quad M_1 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-3)!!}{(2^{2k} k!)^2} z^{2k},$$

$$M_2 = 1 + \frac{3}{16} z^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3(4k-5)!!}{(2^{2k} k!)^2} z^{2k}.$$

В результате имеем:

$$\alpha = -\frac{2y^2}{(1+\frac{3}{2}y)} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{2y^2}{(1+\frac{3}{2}y)} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{1}{2} - 2k \right) \right). \quad (43)$$

Мы вычислили $\partial \Phi / \partial z$ на ЭВМ для следующих значений y : 5, 2, 1, 0.25. Соответствующие значения $\partial \Phi / \partial z$ приведены на рис. 4.

В заключение автору приятно поблагодарить Д.Д. Рютова, Г.В. Ступакова за обсуждение работы, а также П.Б. Лысянского за предоставление результатов численных расчетов функции отражения в ловушке АМБАЛ.

Л и т е р а т у р а :

1. Г.И. Димов, В.В. Закайдаков, М.Е. Кишиневский. Физика плазмы 2, 597 (1976).
2. T.K. Fowler, V.G. Logan. *Comments on Plasma Phys. and Contr. Fusion*, 2, p. 167 (1977).
3. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. ДАН, 240, № 5, 1086 (1978).
4. Д.Д. Рютов, Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 4, 501 (1978).
5. Л.С. Пеккер. Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 81-44 (1981).
6. П.Б. Лысянский, М.А. Тиунов. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 80-94 (1980).
7. D.D. Ryutov, G.V. Stupakov. "Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Research 1980", v. 1, p. 119 (1981).
8. F.L. Hinton, R.D. Hazeltine. *Rev. of Modern Phys.*, 48, 239 (1976).
9. Б.Н. Брейзман, В.В. Мирнов, Д.Д. Рютов. ЖЭТФ, 58, 1770 (1970).
10. V.V. Mirnov, D.D. Ryutov. *Nucl. Fusion*, 12, 627 (1972).
11. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., издание 4 (1962).
12. Г.В. Ступаков. Физика плазмы, 5, 958 (1979).

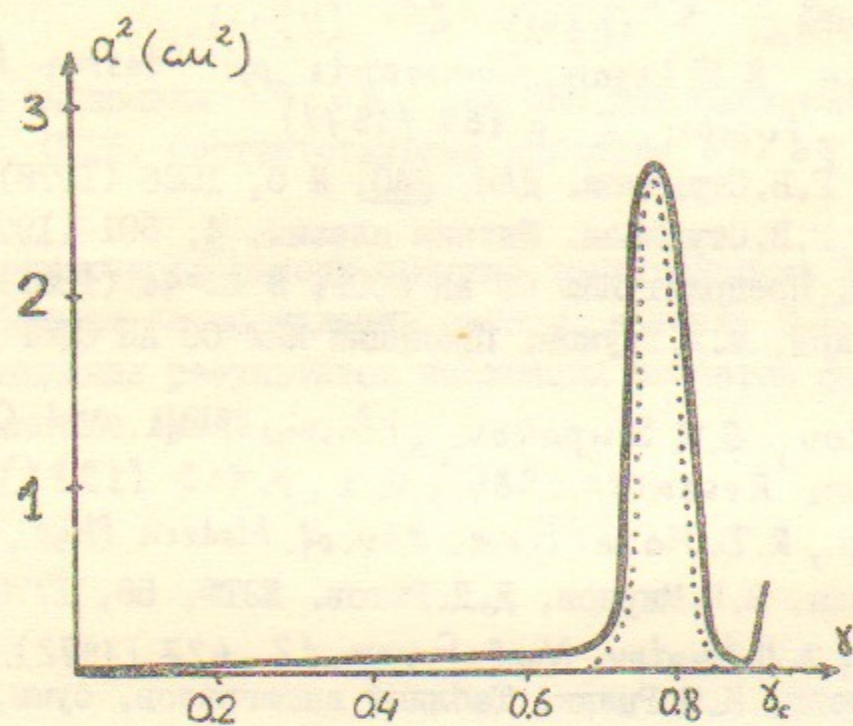


Рис.1. Зависимость α от χ . Сплошная линия для ловушки АМБАЛ, точечная линия для пика.

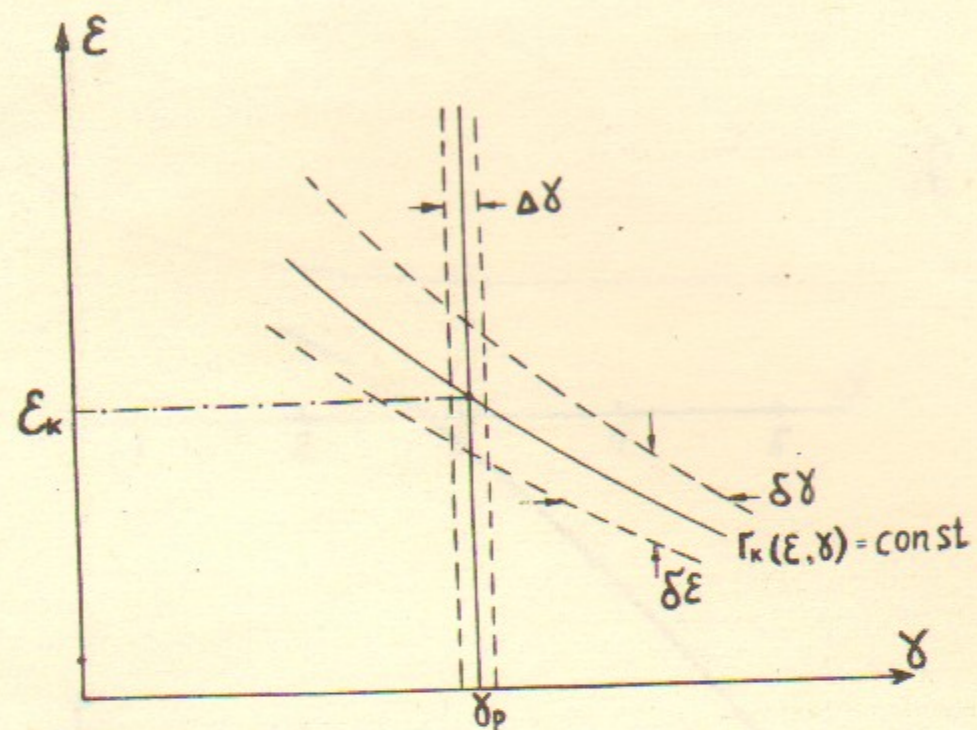


Рис.2. На фазовой плоскости (ϵ, χ) показано пересечение резонансной полосы $(\delta\chi, \delta\epsilon)$ с полосой $\Delta\chi$, в которой $\alpha \sim \alpha_p$.

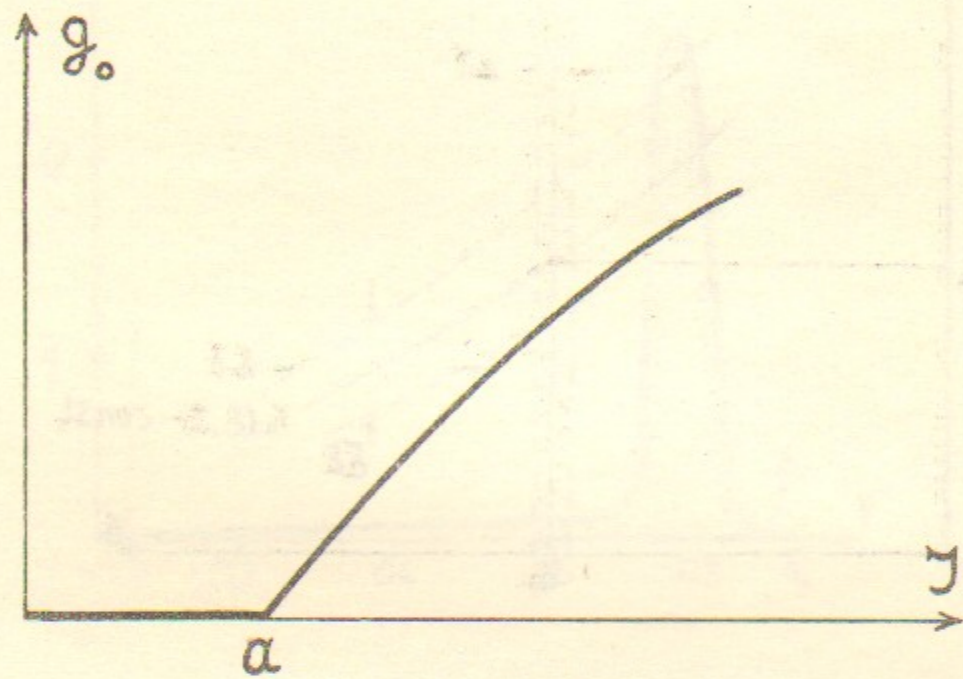


Рис.3. Зависимость g_0 от J для $\eta = +1$.

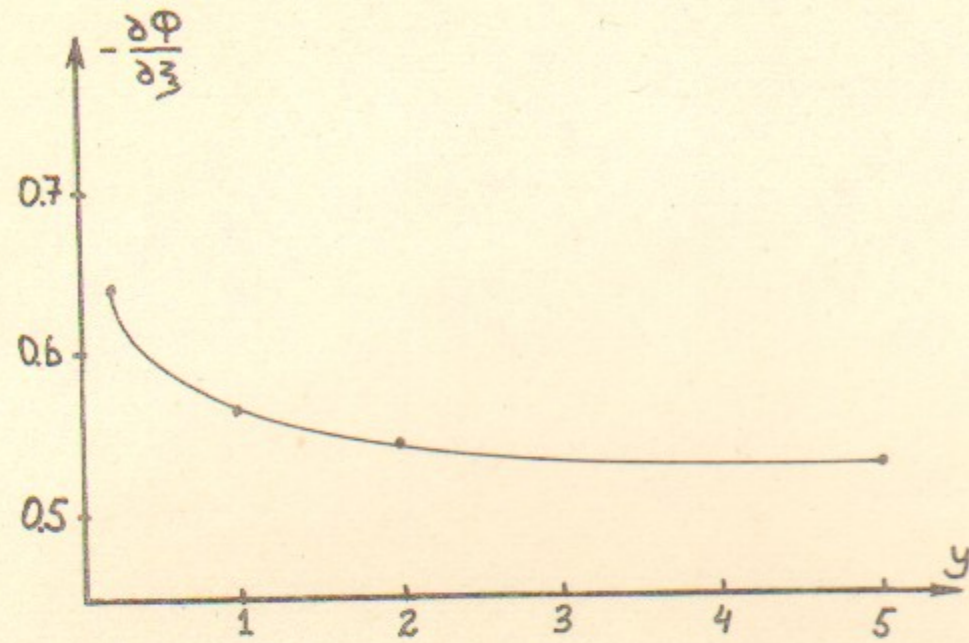


Рис.4. Зависимость $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$ от J . Точками обозначены результаты численного расчета.