18

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

А.И.Мильштейн, В.С.Фадин

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ ПОЛЕЙ ЯНГА - - МИЛЛСА В ПЛАНАРНОЙ КАЛИБРОВКЕ

ПРЕПРИНТ 81 - 18

Новосибирск

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ ПОЛЕЙ ЯНГА-МИЛЛСА В ПЛАНАРНОЙ КАЛИБРОВКЕ

А.И.Мильштейн, В.С.Фадин

А Н Н О Т А Ц И Я

В однопетлевом приближении вычислен поляризационный оператор глюона и расходящиеся части трех и четырехглюонных вершин в планарной калибровке. Показано, что в результате перенормировок меняется форма калибровочных преобразований, оставляющих инвариантным полный лагранжиан. Найдена структура полного лагранжиана и соответствующих калибровочных преобразований. Доказана конечность функций Грина в теории с этим лагранжианом.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 630090

On the renormalisation of Yang-Mills fields in the planar gauge

V.S.Fadin, A.I.Milstein

a b s t r a c t

The gluon polarization tenzor (8) and the divergent parts of three and four-gluon vertices (19),(20) have been calculated in a one-loop approximation in the planar gauge. It is shown that the form of gauge transformations which remain invariant the full Lagrangian, is changed as a result of the renormalisation. The structure of the full Lagrangian (22),(23),(43) and the relevant gauge transformations (21) are obtained. The finiteness of Green functions in the theory with this Lagrangian is proved.

I. Введение

Калибровочная инвариантность КХД позволяет использовать при решении конкретных задач наиболее удобную калибровку. Во многих случаях удобными оказываются аксиальная /I,2/ и планарная /3/ калибровки, которые не содержат "духов" /4/. Вопрос о перенормировках в аксиальной калибровке рассматривался в ряде работ (см. например /4-7/). В планарной калибровке этот вопрос не обсуждался. Оказывается, здесь есть особенность, состоящая в следующем. Рассмотрим сначала самодействующее глюонное поле в пустоте. Его лагранжиан

$$L_{YM}(A,g) = -\frac{1}{4}\left(G^a_{\mu\nu}\right)^2 ; \quad G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g f^{abd} A^b_\mu A^d_\nu \qquad (I)$$

где f^{abd} -структурные константы группы $SU(N)$, инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + \partial_\mu \omega^a + g f^{abd} \omega^b A^d_\mu \qquad (2)$$

Будем использовать калибровочно-инвариантную размерную регуляризацию /3/ и устранять расходимости, возникающие при снятии регуляризации, введением в лагранжиан контрчленов /9/. При использовании ковариантных (а также аксиальной) калибровок полный лагранжиан

$$L(A,g) = L_{YM}(A,g) + \Delta L(A,g) \qquad (3)$$

где ΔL -совокупность контрчленов, инвариантен относительно тех же преобразований (2), только с зарядом $\tilde{g}$, вообще говоря не равным g /IO,II/. В планарной же калибровке преобразования, относительно которых инвариантен полный лагранжиан, не имеют привычной формы (2) и зависят от вектора C_μ, фиксирующего калибровку (см.(2I) ниже). Изменение формы калибровочных преобразований аналогично тому, которое происходит в рассмотренном в /I2/ случае, когда лагранжиан содержит источники нелинейных Вильсоновских операторов.

В разделе 2 в однопетлевом приближении вычислены поляризационный оператор глюонного поля и расходящиеся части трехглюонных и четырехглюонных вершин в планарной калибровке. В разделе 3 найдена структура полного лагранжиана и соответствующих калибровочных преобразований. В разделе 4 приводится доказательство конечности функций Грина в теории с полным лагранжианом, полученным в разделе 3. В разделе 5 обсуждается включение фермионов и эквивалентность S -матрицы.

2. Однопетлевое приближение

Введем производящий функционал для функций Грина (неперенормированных) в планарной калибровке:

$$W(g) = \int dA \, exp\Big[i \int dx \Big(L_{YM}(A,g) - \frac{1}{2c^2}(c_\mu A^a_\mu)\partial^2(c_\nu A^a_\nu) + g^a_\mu A^a_\mu \Big)\Big] \tag{4}$$

В нулевом приближении по g глюонный пропагатор имеет вид

$$\left(G_0\right)^{ab}_{\mu\nu}(K) = \frac{-i\,\delta^{ab}}{K^2+i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{K_\mu c_\nu + c_\mu K_\nu}{(Kc)}\right) \tag{5}$$

При взятии интегралов по K $\frac{1}{(Kc)}$ понимается в смысле главного значения /2,6,7/

$$\frac{1}{(Kc)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Kc+i0} + \frac{1}{Kc-i0}\right) \tag{6}$$

При таком определении подсчет индекса расходимости диаграммы производится так же, как в фейнмановской калибровке /6,7/.

Явное вычисление поляризационного оператора

$$i\,\mathcal{P}^{ab}_{\mu\nu} = \left(G_0^{-1}\right)^{ab}_{\mu\nu} - \left(G^{-1}\right)^{ab}_{\mu\nu} \tag{7}$$

где $G^{ab}_{\mu\nu}$ - полный глюонный пропагатор, в g^2 порядке дает. (мы пользуемся размерной регуляризацией и рассматриваем $K^2 < 0$)

$$\mathcal{P}^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab} g^2 \frac{2N}{(4\pi)^{n/2}}\left(-\frac{K^2}{\mu^2}\right)^{\frac{n}{2}-2}\Big\{(K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu)\cdot \tag{8}$$

$$\cdot\Big[\Gamma\left(2-\tfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\tfrac{n}{2}\right)\frac{(3n-2)}{2\Gamma(n)} + \Gamma\left(3-\tfrac{n}{2}\right)\int_0^1 dx\Big(2\rho(1-x+x^2) +$$

$$+\frac{(1-x)}{\rho}(1-2x)\Big)\int_0^\infty dz\left(\mathcal{D}_-^{\frac{n}{2}-3} - \mathcal{D}_+^{\frac{n}{2}-3}\right)\Big] + \left(K_\mu - \frac{K^2}{Kc}c_\mu\right)\left(K_\nu - \frac{K^2}{Kc}c_\nu\right)\cdot$$

$$\cdot\Gamma\left(3-\tfrac{n}{2}\right)\int_0^1 dx\,\rho\,(3x-2-2x^2)\int_0^\infty dz\left(\mathcal{D}_+^{\frac{n}{2}-3} - \mathcal{D}_-^{\frac{n}{2}-3}\right) + \Big(-2\frac{K^2}{c^2}c_\mu c_\nu +$$

$$+ \frac{Kc}{c^2}\left(K_\mu c_\nu + c_\mu K_\nu\right)\Big)\Gamma(3-n)\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\Big[(2\rho - i0)^{n-4} +$$

$$+ (-2\rho - i0)^{n-4}\Big]\Big\}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_\pm = z^2 \pm 2\rho x z + x(1-x) - i0, \quad \rho = \frac{Kc}{\sqrt{(-K^2)c^2}}, \tag{9}$$

n -размерность пространства-времени. Из (8) следует, что поляризационный оператор в планарной калибровке не является поперечным, более того, непоперечна даже его полюсная по $n-4$ часть

$$\left(\mathcal{P}^{ab}_{\mu\nu}\right)_{div} = \delta^{ab}\frac{g^2 N}{(4\pi)^2}\frac{1}{(4-n)}\Big[\frac{10}{3}(K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) + \tag{10}$$

$$+ 4\left(2\frac{K^2}{c^2}c_\mu c_\nu - \frac{Kc}{c^2}(K_\mu c_\nu + c_\mu K_\nu)\right)\Big]$$

Этот факт является отличительной чертой планарной калибровки по сравнению с ковариантной и аксиальной калибровками. Следует заметить здесь, что в /6/ предполагалась непоперечность поляризационного оператора в аксиальной калибровке. Это заблуждение было исправлено в /7/. В работе /3/, напротив, считалось, что в планарной калибровке поляризационный оператор поперечен, что, как мы видим, неверно.

Непоперечность поляризационного оператора следует из обобщенных тождеств Уорда в планарной калибровке. Эти тождества для функционала $W(g)$ (4), выражающие инвариантность $L_{YM}(A,g)$ относительно преобразований (2) имеют следующий вид

$$\left[\left(\mathcal{D}_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta g(x)}\right) g_\mu(x)\right)^a - \left(c_\mu \mathcal{D}_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta g(x)}\right)\frac{\partial_x^2}{c^2} c_\nu \frac{\delta}{i\delta g_\nu(x)}\right)^a\right] W = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

где

$$\mathcal{D}_\mu^{ad}\left(\frac{\delta}{i\delta g(x)}\right) = \delta^{ad}\partial_\mu^x - g f^{abd}\frac{\delta}{i\delta g_\mu^b(x)} \qquad (\mathrm{I2})$$

Переходя от функционала $W(g)$ к производящему функционалу одночастично неприводимых вершин $\Gamma(A)$ /I3/ с помощью соотношений

$$\Gamma(A) = Z(g) - \int g_\mu^a A_\mu^a\, dx; \quad Z(g) = -i \ln W; \quad A_\mu^a(x) = \frac{\delta Z(g)}{\delta g_\mu^a(x)} \qquad (\mathrm{I3})$$

получим из (II)

$$\mathcal{D}_\mu^{ad}(A(x))\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^d(x)} + c_\mu \mathcal{D}_\mu^{ad}(A(x))\frac{\partial_x^2}{c^2} c_\nu A_\nu^d(x) = g f^{abd}\frac{c_\mu c_\nu}{c^2}\partial_y^2 G_{\mu\nu}^{bd}(x,y,g)\Big|_{y=x} \qquad (\mathrm{I4})$$

где

$$G_{\mu\nu}^{bd}(x,y,g) = \frac{i\delta^2 Z(g)}{i\delta g_\mu^b(x)\, i\delta g_\nu^d(y)}, \qquad (\mathrm{I5})$$

$G_{\mu\nu}^{bd}(x,y,0)$ – полная функция Грина глюона. Беря производные от (I4) по A при $A=0$ получаем тождества Уорда для одночастично неприводимых вершин. Однократное дифференцирование с учетом того, что

$$-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu^a(x)\,\delta A_\nu^b(y)}\Big|_{A=0} = G_{\mu\nu}^{-1\,ab}(x,y) \qquad (\mathrm{I6})$$

дает

$$i p_\mu P_{\mu\nu}^{ab}(p) = g f^{aij}\frac{c_\mu c_\rho}{2c^2}\int\frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^4}\delta(p-k_1-k_2)\, G_{\mu\mu'}^{ii'}(k_1)\, G_{\rho\rho'}^{jj'}(k_2)(k_1^2-k_2^2)\,\Gamma_{\mu'\rho'\nu}^{i'j'b}(k_1,k_2,-p) \qquad (\mathrm{I7})$$

При этом в вершинных функциях все импульсы входящие:

$$\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_n}^{i_1\ldots i_n}(p_1\ldots p_n)(2\pi)^4\delta\Big(\sum_j p_j\Big) = \int dx_1\ldots dx_n\, e^{-i\sum_j p_j x_j}\frac{\delta^n\Gamma}{\delta A_{\mu_1}^{i_1}(x_1)\ldots\delta A_{\mu_n}^{i_n}(x_n)}\Big|_{A=0} \qquad (\mathrm{I8})$$

Для вычисления в g^2 порядке следует положить в (I7) $G_{\mu\nu}^{ab} = (G_0)_{\mu\nu}^{ab}$ а $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abd}$ –обычной Янг-Миллсовской вершине. Очевидно $p_\mu P_{\mu\nu}^{ab}(p) \neq 0$ причем (I7) согласуется с (8).

Вычисление расходящихся частей трех и четырехглюонных вершин можно производить с помощью соответствующих тождеств Уорда, которые вместе с лоренц-инвариантностью и бозе-статистикой однозначно определяют вид полюсных по $(n-4)$ членов в этих вершинах. В результате вычислений получаем

$$\left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abd}(p,q,r)\right]_{div} = -ig f^{abd}\Big[\Big(-\frac{2}{3}\lambda\Big)\gamma_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r) - 4\lambda\gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}(p,q,r) - 2\lambda\gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(p,q,r)\Big], \qquad (\mathrm{I9})$$

$$\left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abdl}\right]_{div} = -g^2\Big[\frac{\lambda}{3}\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abdl} - 4\lambda\tilde\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abdl}\Big],$$

где $\lambda = \dfrac{g^2 N}{8\pi^2(4-n)}$,

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r) = g_{\alpha\beta}(q-p)_\gamma + g_{\alpha\gamma}(p-r)_\beta + g_{\beta\gamma}(r-q)_\alpha,$$

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}(p,q,r) = \frac{c_\alpha c_\beta}{c^2}(q-p)_\gamma + \frac{c_\alpha c_\gamma}{c^2}(p-r)_\beta + \frac{c_\beta c_\gamma}{c^2}(r-q)_\alpha,$$

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}(p,q,r) = g_{\alpha\beta}\frac{(c(q-p))c_\gamma}{c^2} + g_{\alpha\gamma}\frac{(c(p-r))c_\beta}{c^2} + g_{\beta\gamma}\frac{(c(r-q))c_\alpha}{c^2}, \qquad (20)$$

$$\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abdl} = f^{abi}f^{dli}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) + \begin{pmatrix} b\leftrightarrow d \\ \beta\leftrightarrow\gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\leftrightarrow l \\ \beta\leftrightarrow\delta\end{pmatrix},$$

$$\tilde\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abdl} = \frac{f^{abi}f^{dli}}{c^2}(c_\alpha c_\gamma g_{\beta\delta} + c_\beta c_\delta g_{\alpha\gamma} - c_\alpha c_\delta g_{\beta\gamma} - c_\beta c_\gamma g_{\alpha\delta}) + \begin{pmatrix} b\leftrightarrow d \\ \beta\leftrightarrow\gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\leftrightarrow l \\ \beta\leftrightarrow\delta\end{pmatrix}.$$

Других расходящихся вершин, как показывает подсчет индекса расходимости, нет.

3. Структура полного лагранжиана

Непоперечность расходящейся части поляризационного оператора вынуждает нас вводить непоперечные контрчлены. Очевидно, при этом лагранжиан $L(A,g)$ (3) уже не будет инвариантным относительно преобразований (2) ни при каком выборе g. Однако, используя преобразование Бекки, Рюэ и Стора /I4/, нетрудно показать, что контрчлены можно вводить таким образом, чтобы полный лагранжиан L (3) был инвариантен относительно преобразований, образующих другое представление той же группы, что и преобразования (2). В ковариантных калибровках эти преобразования должны иметь форму (2) с другим зарядом. В нашем случае возможны преобразования

$$A_\mu^a \to A_\mu^a + \left(\partial_\mu + (\tilde{Z}_2-1)c_\mu \frac{(c\partial)}{c^2}\right)\omega^a + \tilde{Z}_1 g f^{abd}\omega^b A_\mu^d \qquad (21)$$

где $\tilde{Z}_{1,2}$ – некоторые константы, которые разлагаются в ряды по g^2 с нулевыми членами разложения равными I. Лагранжиан L, инвариантный относительно преобразований (2I), легко построить, заметив, что поля $A_\mu'^a$, связанные с A_μ^a соотношением

$$A_\mu'^a = Z_2^{1/2}\left[A_\mu^a - c_\mu \frac{(cA^a)}{c^2}\left(1-\tilde{Z}_2^{-1}\right)\right] \qquad (22)$$

где Z_2 имеет смысл константы перенормировки физических компонент поля A, при преобразовании (2I) меняются по закону (2) с заменой $A \to A'$, $g \to \tilde{Z}_1 Z_2^{-1/2} g$. Следовательно

$$L(A,g) = L_{YM}(A', g_0), \quad g_0 = \tilde{Z}_1 Z_2^{-\frac{1}{2}} g \qquad (23)$$

Следует отметить, что инвариантности относительно преобразований (2I) не противоречит наличие члена типа $(c_\mu G_{\mu\nu}'^a)^2$, однако контрчлены такого типа не возникают вследствие равенства нулю массы глюона. Независимость масс физических частиц от калибровки была доказана для широкого класса калибровок в работе /5/ ; приведенное там доказательство можно переформулировать и для рассматриваемого здесь случая.

Формулы (22),(23) находятся в соответствии с результатами работы /I5/, согласно которым голый и перенормированный лагранжиан связаны специальным "каноническим" преобразованием полей и источников, только, в отличии от /I5/, где использовалась ковариантная калибровка, это преобразование является матричным (см. (22)).

Таким образом, производящий функционал перенормированных функций Грина в планарной калибровке получается из (4) заменой $L_{YM}(A,g)$ на полный лагранжиан $L(A,g)$, определенный равенствами (22),(23). При этом константы Z_2, $\tilde{Z}_{1,2}$ должны быть разложены в ряд по степеням g^2 ; нулевые члены разложения дают $L_{YM}(A,g)$, а n-ые члены дают контрчлены в n-петлевом приближении. В следующем разделе будет доказано, что их можно выбрать так, что функции Грина останутся конечными при снятии регуляризации. В однопетлевом приближении возможность такого выбора следует из сравнения результатов предыдущего раздела с выражениями для обратного пропагатора и трех- и четырехглюонных вершин, которые получаются при учете одних только контрчленов:

$$G^{-1\,ab}_{\mu\nu}(k) = -i\delta^{ab}\Big\{Z_2\Big[-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu + \frac{(1-\tilde{Z}_2)}{\tilde{Z}_2 c^2}\Big(-2k^2 c_\mu c_\nu + (kc)(c_\mu k_\nu + k_\mu c_\nu)\Big) + \frac{(1-\tilde{Z}_2)^2}{\tilde{Z}_2^2}\frac{c_\mu c_\nu}{c^2}\Big(\frac{(kc)^2}{c^2} - k^2\Big)\Big] + \frac{c_\mu c_\nu}{c^2}k^2\Big\}, \qquad (24)$$

$$\Gamma^{abd}_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r) = -iZ_1 g f^{abd}\left[\gamma_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r) + \frac{(1-\tilde{Z}_2)}{\tilde{Z}_2}\gamma^{(1)}_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r) + \frac{(1-\tilde{Z}_2)}{\tilde{Z}_2}\gamma^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(p,q,r)\right]$$

$$\Gamma^{abdf}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -Z_1^2 Z_2^{-1} g^2\left[\gamma^{abdf}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{(1-\tilde{Z}_2^2)}{\tilde{Z}_2^2}\gamma^{abdf}_{\alpha\beta\gamma\delta}\right],$$

где

$$Z_1 \equiv Z_2 \tilde{Z}_1 \qquad (25)$$

а вершины γ приведены в (20). Сравнивая (24) с(I0),(I9) с учетом (7), получаем, что расходимости однопетлевого приближения устраняются, если

$$Z_2 = 1 + \frac{5}{3}\lambda,\ Z_1 = 1 + \frac{2}{3}\lambda,\ \tilde{Z}_2 = 1 - 2\lambda,\ \tilde{Z}_1 = 1 - \lambda \qquad (26)$$

При этом, как следует из (23),(25),(26), голый заряд g_0 связан с перенормированным зарядом g обычным соотношением

$$g_0 = Z_1 Z_2^{-3/2} g = \left(1 - \frac{11}{6}\lambda\right) g \qquad (27)$$

4. Конечность функций Грина

Для доказательства того, что можно выбором постоянных Z_2, $\tilde{Z}_{1,2}$ устранить расходимости в любом порядке теории возмущений, рассмотрим функционал

$$W_R(\mathcal{J}) = \int dA\, d\chi\, d\chi^+ \exp\Big\{ i \int dx \Big[L(A,g) - \frac{1}{2c^2}(cA^a)\partial^2(cA^a) + \mathcal{J}^a_\mu A^a_\mu + i\chi^{+a}\big(\tilde{Z}_2 (c\partial)\delta^{ad} - \tilde{Z}_1 g f^{abd}(cA^b)\big)\chi^d \Big]\Big\} \qquad (28)$$

где мы ввели "духи" Фаддеева-Попова. Как известно /4/, "духовый" детерминант, получающийся интегрированием по χ, χ^+, не зависит от A, так что введение "духов" приводит к умножению W_R на несущественную константу. В то же время оно удобно для доказательства конечности перенормированных функций Грина. Из (28) ясен смысл констант $\tilde{Z}_2$ и $\tilde{Z}_1$: они являются константами перенормировки функции Грина "духов" и "дух"-"дух" - глюонной вершины. Так как "духовый" детерминант не зависит от A, то тождества Уорда, следующие из инвариантности $L(A,g)$ относительно преобразований (2I) имеют тот же вид, что и (II) с заменой $\mathcal{D}_\mu \to \Delta_\mu$, где

$$\Delta^{ad}_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}}\right) = \left(\partial_\mu + (\tilde{Z}_2 - 1)\frac{c_\mu (c\partial)}{c^2}\right)\delta^{ad} - \tilde{Z}_1 g f^{abd} \frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}^b_\mu} \qquad (29)$$

После умножения слева на $(c_\mu \Delta_\mu)^{-1}$ эти тождества приводятся к виду

$$\partial^2_x \frac{c_\mu}{c^2} \frac{\delta W_R(\mathcal{J})}{i\delta \mathcal{J}^a_\mu(x)} = \int dy\, \mathcal{J}^d_\mu(y) \Delta^{db}_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}(y)}\right) S^{ba}\left(y,x,\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}}\right) W_R \qquad (30)$$

где $S^{ab}(x,y,A)$ - "духовая" функция Грина в классическом поле A

$$c_\mu \Delta^{ad}_\mu(A(x)) S^{db}(x,y,A) = \delta^{ab}\delta(x-y) \qquad (31)$$

Разделив обе части (30) на W_R и действуя последовательно оператором $c_\nu \dfrac{\delta}{\delta \mathcal{J}^b_\nu}$ получаем при $\mathcal{J} = 0$

$$\frac{c_\mu c_\nu}{c^2} G_R{}^{ab}_{\mu\nu}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{k^2}, \qquad (32)$$

$$c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_n} G_R{}^{a_1 \cdots a_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n} = 0, \quad n > 2$$

где $G_R{}^{a_1 \cdots a_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ - перенормированная связная функция Грина:

$$G_R{}^{a_1 \cdots a_n}_{\mu_1 \cdots \mu_n} = \left.\frac{\delta \ln W_R}{i\delta \mathcal{J}^{a_1}_{\mu_1} \cdots i\delta \mathcal{J}^{a_n}_{\mu_n}}\right|_{\mathcal{J}=0} \qquad (33)$$

В дальнейшем мы будем работать только с перенормированными величинами и опускать индекс R.

Удобно перейти от тождеств (30) к тождествам Уорда для одночастично неприводимых вершин. После соответствующих преобразований (см./I6/) получаем

$$\int dx \frac{\delta \tilde{\Gamma}(A)}{\delta A^a_\mu(x)} L^{ab}_\mu(x,y,A) = 0 \qquad (33)$$

где

$$L^{ab}_\mu(x,y,A) = \left[\left(\partial^x_\mu + (\tilde{Z}_2 - 1) c_\mu \frac{(c\partial^x)}{c^2}\right)\delta^{ab} - \tilde{Z}_1 g f^{aeb} A^e_\mu(x)\right]\delta(x-y) + M^{ab}_\mu(x,y,A),$$

$$M^{ab}_\mu(x,y,A) = \tilde{Z}_1 g f^{aed} \int dz\, dz'\, G^{ek}_{\mu\rho}(x,z,A)\, G^{df}(x,z',A) \frac{\delta G^{-1fb}(z',y,A)}{\delta A^k_\rho(z)} \qquad (34)$$

$$\tilde{\Gamma}(A) = \Gamma(A) + \frac{1}{2c^2}\int dx\, (cA^a)\partial^2(cA^a)$$

Г(A) определено в (I3), $G^{ab}(x,y,A)$ - функция Грина "духов" в присутствии источников

$$G^{ab}(x,y,A) = W^{-1} S^{ab}\left(x,y,\frac{\delta}{i\delta \mathcal{J}}\right) W \qquad (35)$$

$G^{-1}(x,y,A)$ является производящим функционалом одночастично неприводимых вершин с двумя "духовыми" линиями, причем

$$G^{-1ab}(x,y,A) = C_\mu L^{ab}_\mu(x,y,A) \tag{36}$$

Тождества, получающиеся однократным и двукратным дифференцированием (33) по А при А = 0 в импульсном представлении имеют вид

$$\tilde{\Gamma}^{da}_{\nu\mu}(p)\, L^{ab}_\mu(p) = 0$$

$$\tilde{\Gamma}^{fda}_{\rho\nu\mu}(z,q,p)\, L^{ab}_\mu(p) + \left[\tilde{\Gamma}^{da}_{\nu\mu}(-q)\, L^{ab,f}_{\mu,\rho}(-q,p;z) + \begin{pmatrix} d\leftrightarrow f \\ \nu\leftrightarrow\rho \\ q\leftrightarrow z \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{37}$$

$$L^{ab,f}_{\mu,\rho} = \left.\frac{\delta L^{ab}_\mu}{\delta A^f_\rho}\right|_{A=0}$$

Причем

$$L^{ab}_\mu(p) = \frac{c_\mu}{c^2}\, G^{-1ab}(p) - i\left(p_\mu - c_\mu \frac{(cp)}{c^2}\right)\delta^{ab}$$

$$C_\mu L^{ab,f}_{\mu,\rho}(-q,p;z) = \Gamma^{ab,f}_\rho(-q,p;z) \tag{38}$$

где $\Gamma^{ab,f}_\rho(-q,p;z)$ – "дух"-"дух" – глюонная вершина. Соотношения (38) следуют из (36),(34) с учетом того, что $M^{ab}_\mu(p)$, как видно из диаграмного разложения, зависит от p только через комбинацию (cp).

Покажем, что выбором констант Z_2, $\tilde{Z}_{1,2}$ можно сделать конечными $\tilde{\Gamma}(A)$ и $L^{ab}_\mu(x,y,A)$. Схема доказательства та же, что и в /I7/. Доказательство проводится по индукции. Предположим, что утверждение справедливо в $(n-1)$ – петлевом приближении (для n = I это очевидно) и докажем, что тогда можно устранить расходимости в n -петлевом приближении.

Расходимости могут быть только в $\tilde{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}$, $\tilde{\Gamma}^{abd}_{\mu\nu\rho}$, $\tilde{\Gamma}^{abdf}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $L^{ab}_\mu(p)$, $L^{ab,f}_{\mu,\rho}$, причем в силу сделанных предположений и соотношений (38) расходимости их подграфов отсутствуют.

Рассмотрим равенства (37) в n -петлевом приближении. Расходимости возможны только тогда, когда один из сомножителей берется в n -петлевом, а второй – в древесном приближении. Используя то, что

$$\left[L^{ab}_\mu(p)\right]_0 = -ip_\mu\delta^{ab}, \quad \left[\tilde{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}(p)\right]_0 = (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2)\,\delta^{ab} \tag{39}$$

получаем

$$ip_\nu\left[\tilde{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}(p)\right]_{div} = (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2)\left[L^{ab}_\nu(p)\right]_{div} \tag{40}$$

Из (38) следует, что устранение расходимости в "духовом" пропагаторе (которое производится выбором константы $\tilde{Z}_2$) делает конечным и $L^{ab}_\nu(p)$. Из (40) вытекает тогда конечность $p_\nu\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}(p)$. Расходимость поперечной части $\tilde{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}$ вследствие безмассовости глюона (см. замечание после (23)) устраняется выбором константы Z_2.

Используя доказанную конечность $\tilde{\Gamma}^{ab}_{\mu\nu}(p)$, $L^{ab}_\mu(p)$, из второго соотношения (37) имеем

$$ip_\mu\left[\tilde{\Gamma}^{adb}_{\rho\nu\mu}(z,q,p)\right]_{div} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\left[L^{db,a}_{\mu,\rho}(-q,p;z)\right]_{div} + \begin{pmatrix} d\leftrightarrow a \\ \nu\leftrightarrow\rho \\ q\leftrightarrow z \end{pmatrix} \tag{41}$$

Подставляя в (4I) все возможные структуры с учетом бозе-статистики, видим, что групповая и лоренцева структура $\left[\tilde{\Gamma}^{adb}_{\rho\nu\mu}\right]_{div}$ должна иметь вид $f^{adb}\gamma_{\rho\nu\mu}$ (γ см. в (20)), а $\left[L^{db,a}_{\mu,\rho}\right]_{div}$ $\sim f^{dba}g_{\mu\rho}$. Используя (34),(38), отсюда заключаем, что расходимость в $L^{db,a}_{\mu,\rho}$ устраняется выбором константы $\tilde{Z}_1$ одновременно с расходимостью в $\Gamma^{db,a}_\rho$. Соотношение (4I) обеспечивает тогда конечность $\tilde{\Gamma}^{adb}_{\rho\nu\mu}$.

Тождество Уорда, которое получается трехкратным дифференцированием (33) по А при А = 0, с учетом доказанного дает

$$p_\mu\left[\tilde{\Gamma}^{abcd}_{\mu\nu\rho\sigma}\right]_{div} = 0 \tag{42}$$

Отсюда следует конечность четырехглюонной вершины.

Таким образом, доказана конечность $\tilde{\Gamma}(A)$, что с учетом связи $\tilde{\Gamma}(A)$ и $\Gamma(A)$ (см.(34)) обеспечивает конечность всех функций Грина.

5. Заключение

В предыдущих разделах обсуждалась чистая глюодинамика. Полученные результаты легко обобщаются на случай присутствия фермионов. При этом к глюонной части полного лагранжиана (23) следует добавить фермионную часть, имеющую следующий вид

$$Z_{2\psi}\bar{\psi}\left(i\hat{\partial}-m-\delta m-\tilde{Z}_1 g\left(\hat{A}^a-\frac{\hat{c}(cA^a)}{c^2}\left(1-\tilde{Z}_2^{-1}\right)\right)t^a\right)\psi \qquad (43)$$

Следует обратить внимание на появление новой структуры в вершине глюон-фермионного взаимодействия.

Отметим, что проведенное нами рассмотрение остается справедливым и для случая "обобщенной планарной калибровки", в которой фиксирующий калибровку член в (4),(28) содержит произвольный множитель.

Как известно, S – матрица в теории с безмассовыми глюонами не может быть определена из-за проблемы инфракрасных расходимостей. Если отвлечься от этой проблемы, то формальное доказательство эквивалентности S -матриц в планарной и ковариантной калибровках может быть проведено точно так же, как оно проводилось в /5,I0/ для другого класса калибровок. При этом надо учитывать, что физические вектора поляризации $e_\mu(k)$ в планарной калибровке удовлетворяют соотношениям (ср./4,5,7/)

$$e_\mu(k)k_\mu = e_\mu(k)c_\mu = 0 \qquad (44)$$

В заключении авторы выражают благодарность В.Н.Байеру за интерес к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. R.L.Arnowitt,S.I.Fickler,Phys.Rev.127,1821(1962)
J.Shwinger,Phys.Rev.130,402(1963)
E.S.Fradkin,I.V.Tyutin,Phys.Rev.D2,2841(1970)
E.Tomboulis,Phys.Rev.D8,2736(1973)

2. R.Delbourgo,A.Salam,J.Strathdee,Nuovo Cim.23A,237(1974)

3. Yu.L.Dokshitzer,D.I.Dyakonov,S.I.Troyan,Phys.Reports 58,269(1980)

4. J.Frenkel,Phys.Rev.D13,2325(1976)

5. Р.Э.Каллош,И.В.Тютин,ЯФ I7,I90(I973)

6. W.Kummer,Acta Phys.Austriaca 41,315(1975)

7. W.Konetschny,W.Kummer,Nucl.Phys.B100,106(1975);B108,397(1976); B124,145(1977)

8. G.t'Hooft,M.Veltman,Nucl.Phys.B44,189(1972)

9. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва, "Наука", I976 г.

I0. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, Москва, "Наука", I978 г.

II. Дж.Тэйлор, Калибровочные теории слабых взаимодействий, Москва, "Мир", I978 г.

I2. J.A.Dixon,J.C.Taylor,Nucl.Phys.B78,552(1974)

I3. G.Jona-Lazinio,Nuovo Cimento,34,1790(1964)

I4. C.Becchi,A.Rouet,R.Stora,Phys.Lett.52B,344(1974),Com.Math.Phys. 42, I27 (I975).

I5. J.A.Dixon,Nucl.Phys.B99,420(1975)

I6. B.W.Lee,Phys.Lett.46B,216(1973)

I7. B.W.Lee,Phys.Rev.D9,933(1974)