2

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Н.А.Винокуров

О КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ СООТНОШЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА МЕЖДУ СПОНТАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ, ВЫНУЖДЕННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

ПРЕПРИНТ 81 - 02

Новосибирск

Н.А.Винокуров

О КЛАССИЧЕСКОМ АНАЛОГЕ СООТНОШЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА МЕЖДУ СПОНТАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ, ВЫНУЖДЕННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ

А Н Н О Т А Ц И Я

Без привлечения квантовых представлений получено соотношение между спектральной интенсивностью спонтанного излучения произвольной гамильтоновой системы и коэффициентом поглощения (или усиления) этой системы. Обсуждается связь этого соотношения с флуктуационно-диссипативной теоремой.

ON THE CLASSICAL ANALOG OF THE EINSTEIN RELATIONS BETWEEN SPONTANEOUS EMISSION, STIMULATED EMISSION AND ABSORPTION

N.A.Vinokurov

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The relation between the spectral intensity of the spontaneous emission from an arbitrary hamiltonian system and its absorption (or reabsorption) coefficient is derived without attraction of any quantum concepts. The connection of this relation with the Nyquist theorem is discussed.

I. Как известно, соотношения Эйнштейна [I] связывают вероятности спонтанного излучения, вынужденного излучения и поглощения. С точки зрения квантовой электродинамики эти соотношения суть следствия коммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения фотонов, т.е. следствие того, что фотоны являются бозонами (см., например, [2]). Таким образом, как по форме, так и по содержанию соотношения Эйнштейна являются существенно квантовыми.

С другой стороны, как показано в [3] , для системы излучающих нелинейных осцилляторов механизм вынужденного излучения может быть описан в рамках классической механики и классической электродинамики. Кроме того, известно, что применение соотношений Эйнштейна для расчета классических систем приводит к ответам, в которых не содержится постоянная Планка (см., например, [4,5]). В данной работе соотношение между спектральной интенсивностью спонтанного излучения и коэффициентом поглощения (усиления) будет получено без привлечения квантовых представлений. Кроме того будет обсуждена связь этого соотношения с флуктуационно-диссипативной теоремой.

2. Рассмотрим сначала одномерную задачу, т.е. рассмотрим ансамбль излучателей в виде бесконечных плоскостей в трехмерном пространстве, в виде бесконечных прямых на плоскости или в виде точек на прямой. Сделаем следующие предположения:

а) Если $u(t)$ - величина, описывающая волну в фиксированной точке пространства (например, электрическое поле для случая электромагнитных волн), то поток энергии волны записывается в виде $\frac{1}{2}u^2(t)$. Другими словами, мы предполагаем линейность волны и отсутствие дисперсии (ниже будет видно, что учет дисперсии тривиален).

б) Излучатель включается в момент $t = 0$ и имеет в этот момент собственную энергию E_0. Излучатель испускает волновой пакет $u_i(t)$, причем $u_i(t)=0$ при $t<0$.

в) Пусть на излучатель падает волна $u_0(t)$. Действуя на излучатель, она изменяет испускаемый им волновой пакет. Считая это изменение линейным, имеем

$$u_i^{(1)}(t) = u_i(t) + \int_0^t K_i(t,t')u_0(t')dt' \qquad (I)$$

г) Излучатель является гамильтоновой системой.

В начальном состоянии ($t=0$) излучатели равномерно распределены на гиперповерхности $H(p_i,q_i,t)=E$ в фазовом пространстве своих переменных (микроканоническое распределение).

3. Изменение энергии излучателя имеет вид

$$\Delta E_i = -\int_0^t u_0(t')\int_0^{t'} K_i(t',t'')u_0(t'')dt''dt' - \int_0^t u_0(t')u_i(t')dt' \qquad (2)$$

Пусть $\langle u_i\rangle=0$ ($\langle\ \rangle$ - усреднение по ансамблю). Тогда

$$\langle \Delta E_i\rangle = -\int_0^t\int_0^{t'} G(t',t'')u_0(t')u_0(t'')dt'dt'' \qquad (3)$$

$$\langle(\Delta E_i)^2\rangle = \int_0^t\int_0^t B(t',t'')u_0(t')u_0(t'')dt'dt'' \qquad (4)$$

где

$$G(t',t'') = \langle K_i(t',t'')\rangle \qquad (5)$$

$$B(t',t'') = \langle u_i(t')u_i(t'')\rangle \qquad (6)$$

Рассмотрим сначала для большей наглядности случай консервативной гамильтоновой системы. Как видно из (2), гиперповерхность в фазовом пространстве, на которой расположен наш ансамбль излучателей деформируется. Однако фазовый объем, ограниченный этой гиперповерхностью, в силу теоремы Лиувилля должен оставаться постоянным. Чтобы выразить это условие введем статистический вес $\rho(E)$ так, что $\rho(E)dE$ - фазовый объем области, заключенный между гиперповерхностями с энергиями E и $E+dE$ соответственно. Рассмотрим теперь случай, когда распределение излучателей по энергии задается функцией $f(E)$

Тогда мы можем написать уравнение, внешне похожее на уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial E}\left[\langle\Delta\dot{E}_i\rangle f - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial E}\left(\langle(\Delta\dot{E}_i)^2\rangle f\right)\right] \qquad (7)$$

Переходя к фазовой плотности $F(I)=f(E)/\rho(E)$ где $I\equiv\int_0^E\rho(E')dE'$ получим из (7)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial I}\left[\langle\Delta\dot{E}_i\rangle\rho F - \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial I}\left(\langle(\Delta\dot{E}_i)^2\rangle\rho F\right)\right] \qquad (8)$$

В случае постоянной фазовой плотности $F=const$ легко заметить, что теорема Лиувилля, требует, чтобы поток через гиперповерхность $I=const$ был нулевым, т.е. требует зануления величины, стоящей в квадратных скобках в (8). Таким образом, сохранение фазового объема приводит к условию

$$\langle\Delta E_i\rangle = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial E}\left(\rho\langle(\Delta E_i)^2\rangle\right) \qquad (9)$$

4. Приведенный выше вывод формулы (9) довольно нагляден, но не строг. Поэтому мы дадим другой вывод (9), не использующий кинетического уравнения. Рассмотрим систему с гамильтонианом $H_0(p_j, q_j, t)$ при наличии возмущения $H_1(p_j,q_j,t)$ Отметим, что теперь мы не требуем консервативности невозмущенной системы. Пусть известны решения невозмущенной системы $q_j=\varphi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t)$, $p_j=\psi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t)$, где $p_k^{(0)}$, $q_k^{(0)}$ - начальные условия, тогда, совершив каноническое преобразование к новым переменным $p_k^{(0)}$, $q_k^{(0)}$ (см., например, [6]), получим:

$$\dot{q}_k^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p_k^{(0)}}H_1\left(\psi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t),\varphi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t),t\right) \qquad (10)$$

$$\dot{p}_k^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial q_k^{(0)}}H_1\left(\psi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t),\varphi_j(p_k^{(0)},q_k^{(0)},t),t\right)$$

Изменение энергии системы (излучателя), связанное с действием возмущения, дается формулой

$$\frac{d\Delta E}{dt} = [H_0, H_1] \qquad (\text{I1})$$

где $[\,,\,]$ - скобки Пуассона. Учитывая, что в первом порядке по H_I $\Delta p_k^{(0)} \approx -\int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial q_k^{(0)}} dt'$, $\Delta q_k^{(0)} \approx \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial p_k^{(0)}} dt'$, получим из (I1):

$$\frac{d\Delta E}{dt} \approx [H_0, H_1] + \left[[H_0, H_1], \int_0^t H_1(t')dt'\right] \qquad (\text{I2})$$

причем в правой части (I2) $p_k^{(0)}$ и $q_k^{(0)}$ заменены их начальными значениями.

С другой стороны, изменение квадрата отклонения энергии от начальной запишется в виде:

$$\frac{d}{dt}(\Delta E)^2 \approx 2[H_0, H_1] \int_0^t [H_0, H_1(t')]\, dt' \qquad (\text{I3})$$

где в правой части тоже стоят $p_k^{(0)}(0)$ и $q_k^{(0)}(0)$ вместо $p_k^{(0)}(t)$, $q_k^{(0)}(t)$. Пусть при $t=0$ имелся микроканонический ансамбль с функцией распределения

$$f(p_k, q_k) = \frac{1}{\rho(E)} \delta\left(H_0(p_k, q_k, 0) - E\right) \qquad (\text{I4})$$

Из (I2), (I3), и (I4) легко получить

$$\frac{d}{dE}\left\langle \frac{d}{dt}(\Delta E)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}(\Delta E)^2 \right\rangle \frac{d\ln\rho}{dE} = 2\left\langle \frac{d\Delta E}{dt} \right\rangle \qquad (\text{I5})$$

Выражение (9) получается из (I5) интегрированием по времени.

5. Подставляя (3) и (4) в (9) и учитывая произвольность $u_0(t)$, получим

$$G(t,t') = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial E}\left(\rho B(t,t')\right) \qquad (\text{I6})$$

при $t > t'$.

Рассмотрим теперь стационарный случай, когда различные излучатели начинают взаимодействовать с волной в различные "случайные" моменты времени со средней частотой ν раз в секунду. Кроме того без ограничения общности мы можем считать u_0 гармоническим: $u_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$. Ясно, что усреднение по моментам "включения" излучателей эквивалентно усреднению по φ . Тогда из (4) получим:

$$\left\langle (\Delta E_i)^2 \right\rangle\Big|_{t\to\infty} = \frac{1}{2} A^2 \left\langle |u_i(\omega)|^2 \right\rangle \qquad (\text{I7})$$

Подставив (I7) в (9), имеем

$$\left\langle \Delta E_i \right\rangle\Big|_{t\to\infty} = \frac{A^2}{4\rho} \frac{d}{dE}\left(\rho \left\langle |u_i(\omega)|^2 \right\rangle\right) . \qquad (\text{I8})$$

Учитывая, что $\frac{A^2}{4}$ есть средняя мощность падающей волны, $\nu\langle \Delta E_i \rangle$ - мощность, поглощаемая (выделяемая) излучателями, $P(\omega) = \frac{1}{2}\nu\langle |u_i(\omega)|^2\rangle$ - спектральная интенсивность спонтанного излучения, представим (I8) в виде:

$$G(\omega) \equiv -\frac{\nu\langle \Delta E_i \rangle}{A^2/4} = -2\frac{dP(\omega)}{dE} - 2P(\omega)\frac{d\ln\rho}{dE} \qquad (\text{I9})$$

где $G(\omega)$ - коэффициент усиления. Выражение (I9) и есть искомая связь между спонтанным излучением, усилением (вынужденным излучением) и поглощением. В отличии от квантового случая, вынужденное излучение и поглощение входят в (I9) только в виде их разности, описываемой величиной $G(\omega)$.

С другой стороны, так как спонтанное излучение можно рассматривать как следствие флуктуаций фазовой плотности, можно рассматривать (I9) как аналог флуктуационно-диссипативной теоремы для случая когда система (излучатель) находится не в состоянии термодинамического равновесия, а в состоянии с заданной энергией Е. Учитывая, что в термодинамически равновесном состоянии вероятность нахождения системы с заданной энергией пропорциональна $\rho(E)e^{-E/T}$, из (I9) получим одно из выражений обычной флуктуационно-диссипативной теоремы:

$$\int_0^\infty G(\omega)\, e^{-E/T'}\rho(E)\,dE = -\frac{2}{T'}\int_0^\infty P(\omega)\, e^{-E/T'}\rho(E)\,dE \qquad (20)$$

Отметим, что правая часть (20) всегда отрицательна, т.е., как и следовало ожидать, в термодинамически равновесной системе (с положительной температурой) возможно только поглощение. Отметим, что при переходе от (I9) к (20) мы фактически совершили преобразование Лапласа по Е. Следовательно, совершив обратное преобразование по $\frac{1}{T'}$ мы из (20) получим (I9), т.е. две эти формулы являются выражением одной и той же связи в двух разных представлениях ("Е – представлении" и "$\beta=\frac{1}{T'}$ – представлении").

6. В правой части формулы (I9) есть два члена. Обсудим их физический смысл. В начальный момент времени половина излучателей отбирает энергию у волны, а другая половина отдает ровно столько же. При этом энергия поглощающих излучателей растет, а отдающих – падает, вследствие чего изменяется мощность излучения и, в зависимости от знака $\frac{dP(\omega)}{dE}$, возрастает вклад отдающих и уменьшается вклад поглощающих или наоборот. Таков смысл первого члена.

Второй член можно рассматривать как чисто геометрическое следствие сохранения фазового объема, ограниченного гиперповерхностью в фазовом пространстве, на которой расположены излучатели. Более наглядно его смысл можно пояснить на двух следующих примерах.

а) Рассмотрим излучатель, число внутренних степеней свободы которого N велико. Тогда наиболее вероятное макросостояние такой системы соответствует термодинамически равновесному с $T'=E/N$. Наиболее вероятное значение $\ln\rho$ есть энтропия S, но $\frac{dS}{dE}=\frac{1}{T'}$ и, учитывая малость первого члена в правой части (I9), мы снова получаем (20).

б) Рассмотрим излучатель с одной степенью свободы. Пусть невозмущенный гамильтониан в переменных действие-угол имеет вид $H_0=\int_0^I \Omega(I')dI'$. Тогда $\rho=\frac{1}{\Omega}$ и (I9) переходит в

$$G=-2\frac{dP}{dE}+2P\frac{d\ln\Omega}{dE} \qquad (2I)$$

Пусть излучение происходит только при $0<t<T$ (при $t>T$ излучатель "выключается"). При $0<t<T$ спонтанное излучение $u_i(t)$ периодично с периодом $2\pi/\Omega$. Тогда спектр излучения состоит из полос с центральными частотами $n\Omega$ и ширинами порядка T^{-1}. Легко видеть, что при $\Omega T\gg 1$ вблизи собственных частот системы ($\omega\approx n\Omega$) первый член в (2I) существенно (на множитель порядка $n\Omega T$) больше второго. Таким образом, когда спектр спонтанного излучения имеет ярко выраженные собственные частоты вблизи этих частот можно пользоваться приближенным соотношением

$$G\approx -2\frac{dP}{dE}, \qquad (22)$$

которое не требует знания устройства излучателя.

7. Так как поглощение и вынужденное излучение являются следствием "синхронизации" излучателей, плоский излучатель в трехмерном пространстве можно заменить системой излучателей конечных размеров, расположенных с поверхностной плотностью η на плоскости, параллельной плоскостям постоянной фазы падающей волны. Считая излучатели одинаковыми и одинаково ориентированными имеем (см. [7])

$$P(\omega)=\eta^2\lambda^2\frac{dI(\omega,\theta=0)}{do} \qquad (23)$$

где λ – длина волны (мы считаем среду, в которой распространяется волна изотропной), $\frac{dI}{do}(\omega,\theta=0)$ – спектральная интенсивность спонтанного излучения в направлении падающей волны. Полагая $G=-\eta\sigma_a$ можно ввести сечение поглощения (или вынужденного излучения):

$$\sigma_a=2\lambda^2\left[\frac{d}{dE}\,\frac{dI(\omega,\theta=0)}{do}+\frac{dI(\omega,\theta=0)}{do}\,\frac{d\ln\rho}{dE}\right] \qquad (24)$$

При выводе (I9) мы предполагали, что вследствие спонтанного излучения энергия излучателя меняется достаточно мало. Из этого предположения следует, что $\frac{d}{dE}\int\frac{dI(\omega)}{do}do\ll 1$ и $\frac{1}{E}\int\frac{dI(\omega)}{do}do\ll 1$, откуда получаем ограничение на σ_a:

$$\sigma_a\ll\lambda^2/o$$

где $\mathcal{O}$ – характерный телесный угол, в который идет бо́льшая часть излучения.

Отметим, что в случае двумерных волн (например, поверхностных волн на воде), используя рассуждения, аналогичные проведенным выше, можно получить аналог (24) для "ширины" поглощения. Для векторных и тензорных полей (например электромагнитного, гравитационного) (24) остается справедливым для каждой заданной поляризации.

8. Автор благодарен Г.Н.Кулипанову, В.Н.Литвиненко, Е.А. Переведенцеву, Е.Л.Салдину и А.Н.Скринскому за ценные обсуждения вопросов, затронутых в данной работе.

Литература:

1. А.Эйнштейн. Собрание трудов в 4-х томах. Т. 3. М., "Наука", 1966.
2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория. Часть I. М., "Наука", 1968.
3. А.В.Гапонов. ЖЭТФ, т. 39, вып. 2 (8), стр. 326 (1960); А.В.Гапонов, М.И.Петелин, В.К.Юлпатов. "Изв.вузов", Радиофизика, т.10, № 9-10, стр.1414 (1967).
4. В.В.Железняков. Электромагнитные волны в космической плазме. М., "Наука", 1977.
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Труды X Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. Серпухов, 1977, т.2, стр.446.
6. Ф.Р.Гантмахер. Лекции по аналитической механике. М., "Наука", 1966.
7. Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 3. М., "Мир", 1967.

Работа поступила - I7 ноября I980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 5.I-I98I г. МН I3678
Усл. 0,6 печ.л., 0,5 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 2.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР