

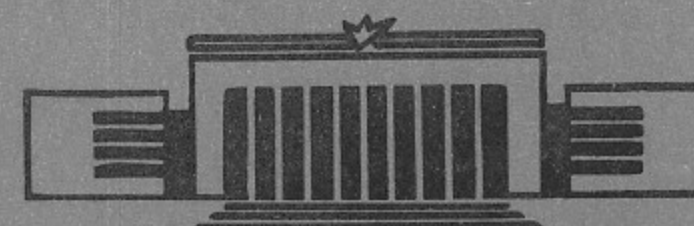
7

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

Г.Э.Дагман, М.С.Пеккер

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ПС-2000 ДЛЯ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-  
ПЛАНКА, ОПИСЫВАЮЩЕГО УДЕР-  
ЖАНИЕ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ  
МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

ПРЕПРИНТ 81 - 81



Новосибирск

Одним из возможных решений проблемы термоядерного синтеза является создание открытых магнитных ловушек. В настоящее время открытые магнитные ловушки можно разделить на короткие магнитные ловушки, начало которым положила пионерская работа Будкера [1], и длинные ловушки, которые были предложены в Институте ядерной физики СО АН СССР [2,3] и в США [4] в последнее десятилетие.

В коротких ловушках длина свободного пробега частиц плазмы  $\lambda$  много больше длины ловушки  $L$ , поэтому можно считать, что функция распределения частиц зависит лишь от модуля скорости  $X$  и угла  $\theta$  между направлением скорости частиц и магнитным полем в центре ловушки и не зависит от координаты  $Z$  вдоль оси ловушки (рис.1). В этих ловушках часть частиц, влетающих в область сильного магнитного поля (пробку), отражается от магнитного потенциала и возвращается обратно в ловушку, а часть частиц уходит из системы. На рис.2 показана область удержания частиц плазмы для ионов в классической ловушке Будкера. Раствор конуса потерь (угол  $\theta_0$ ) определяется пробочным отношением  $R = H_k/H_0$  ( $\theta_0 = \arcsin \sqrt{1/R}$ ). Время удержания плазмы в ловушке Будкера определяется временем диффузии частиц в конус потерь вследствие кулоновских столкновений; т.е., как только угол  $\theta$  для иона плазмы становится равным  $\theta_0$ , ион мгновенно уходит из ловушки. Таким образом, функция распределения частиц в конусе потерь равна нулю. В последнее время предложены несколько модификаций этой ловушки, в которых за счет создания потенциального барьера, удерживающего ионы плазмы, предполагается существенно увеличить время жизни частиц в открытых магнитных ловушках [5,6,7]. На рисунке 2 штриховой линией показана деформация конуса потерь при наличии потенциального барьера.

В длинных ловушках длина свободного пробега сравнима с длиной ловушки и функция распределения частиц в этом случае будет существенно зависеть от координаты  $Z$  вдоль оси ловушки. На рисунке 1 схематично показана газодинамическая ловушка (ГДЛ), которая представляет собой длинную классическую ловушку (длиной порядка 5-10 км) с большим пробочным отношением ( $R = 20-30$ ).

Увеличение времени удержания в этой ловушке связано с медленным газодинамическим вытеканием плазмы через магнитную пробку (оценка времени удержания приведена в [3]).

Фазовое пространство для ГДЛ представляет собой параллелепипед (рис.3), в точке  $Z=0$  граничные условия обусловлены уходом частиц в левую пробку, что приводит к соответствующему поведению функции распределения в фазовом пространстве  $X, \theta$  (рис.3). В точке  $Z=L/2$  функция распределения симметрична относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ .

Одной из важнейших задач исследования открытых магнитных ловушек является вычисление времени удержания частиц в ловушках и определение эффективности термоядерного реактора на их основе. Под эффективностью термоядерного реактора понимается отношение энергии, выделенной в результате синтеза, к вложенной в плазму энергии. Вычисление времени удержания проводится на основе решения уравнения Фоккера-Планка (УФП), представляющего собой интегро-дифференциальное нелинейное уравнение в частных производных относительно функции распределения частиц в ловушке.

Существующие методы решения УФП на ЭВМ требуют значительных затрат процессорного времени и большого объема оперативной памяти. Понятно, что расчет ГДЛ требует в  $N^2$  раз больше процессорного времени и оперативной памяти ЭВМ, чем расчет короткой ловушки при тех же размерностях сетки по  $X$  и  $\theta$  ( $N^2$  - количество точек разностной сетки вдоль оси ловушки). Большое значение в данной ситуации приобретает использование для расчетов ЭВМ высокой производительности, позволяющих получать физически интересные результаты за приемлемое время.

Ниже будет приведено описание алгоритма решения УФП для ГДЛ на многопроцессорной ЭВМ ПК-2000 и сравнительные результаты расчета одного из вариантов на ЭВМ БЭСМ-6 и ЭВМ ПК-2000.

#### Разностная схема для УФП и принципы распараллеливания численного алгоритма

I. Уравнение Фоккера-Планка, описывающее удержание плазмы в ГДЛ в приближении изотропных потенциалов Розенблата [8] имеет вид:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + x \cos \theta \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} = \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [A_\alpha f_\alpha + B_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}] + \frac{C_\alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta} \right\} + S_\alpha \quad (I)$$

4

где  $f_\alpha$  - функция распределения частиц сорта  $\alpha$  ;  
 $S_\alpha$  - функция источника;

$$A_\alpha = \sum_\beta \Gamma_\alpha \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2} \ln \Lambda_{\alpha\beta} N_\beta \frac{m_\alpha}{m_\beta}$$

$$B_\alpha = \sum_\beta \Gamma_\alpha \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{3x} E_\beta + \frac{x^2}{3} M_\beta \right)$$

$$C_\alpha = \sum_\beta \Gamma_\alpha \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2x} N_\beta - E_\beta \frac{1}{6x^3} + \frac{x}{3} M_\beta \right)$$

$$N_\alpha = \int_0^x f_\alpha dx', \quad E_\alpha = \int_0^x f_\alpha x'^2 dx', \quad M_\alpha = \int_x^\infty f_\alpha x'^{-1} dx',$$

$$\Gamma_\alpha = 4\pi e^4 \frac{z_\alpha^4}{m_\alpha^2}$$

$\ln \Lambda_{\alpha\beta}$  - кулоновский логарифм.

Далее будем рассматривать один сорт частиц, полагая  $M, z, \ln \Lambda, \Gamma = 1$ .

Граничные условия в точке  $Z=0$  (рис.3):

$$f(x, \theta, 0) = f(x, \pi - \theta, 0) \quad \text{при} \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$f(x, \theta, 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta < \theta_0$$

в точке  $Z=L/2$

$$f(x, \theta, L/2) = f(x, \pi - \theta, L/2)$$

и при  $0 \leq z \leq L/2$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \theta = \pi.$$

Для решения УФП, как показано в работах [9,10], необходимо применять полностью консервативную разностную (ПКР) схему [11,12]. Применяя метод стабилизированной поправки [13]:

$$\begin{cases} \frac{f^{1/2} - f^0}{\tau} = \Lambda_{11} f^{1/2} + \Lambda_{22} f^0 \\ \frac{f^1 - f^{1/2}}{\tau} = \Lambda_{22} (f^1 - f^0) \end{cases} \quad (2)$$

и вводя равномерную сетку по  $X, \theta$  и  $Z$ , такую, что  $X_i = i \cdot \delta X, \theta_k = k \cdot \delta \theta, Z_j = j \cdot \delta Z$  ПКР схему можно записать в

вице:

$$\begin{aligned} \frac{f_{ikj}^{1/2} - f_{ikj}}{\tau} = & \frac{1}{x_i^2} \left[ \frac{A_{ij} (f_{in+1j}^{1/2} - f_{in+1j})}{\delta x^2} - \frac{A_{i-1j} (f_{ikj}^{1/2} - f_{i-1kj})}{\delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{P_{ij} (f_{in+1j} \cdot x_{in+1} + f_{ikj} \cdot x_i)}{\delta x} - \frac{P_{i-1j} (f_{ikj} \cdot x_i + f_{i-1kj} \cdot x_{i-1})}{\delta x} \right] + \\ & + \frac{\bar{A}_{ij}}{x_i^2 \sin \theta_k} \left[ \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) \frac{f_{ik+1j} - f_{ikj}}{\delta \theta^2} - \right. \\ & \left. - \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \frac{f_{ikj} - f_{ik-1j}}{\delta \theta^2} \right] - \frac{x_i \cos \theta_k}{2} \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{(f_{ik+1j} - f_{ikj})}{\delta z} (1 - \text{sign}(\cos \theta_k)) + \right. \\ & \left. + \frac{(f_{ikj} - f_{ik-1j})}{\delta z} (1 + \text{sign}(\cos \theta_k)) \right] + S_{ikj} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{ikj}^{1/2} - f_{ikj}}{\tau} = & \frac{\bar{A}_{ij}}{x_i^2 \sin \theta_k} \left[ \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left( \frac{f_{ik+1j} - f_{ikj}}{\delta \theta^2} - \frac{f_{ik+1j} - f_{ikj}}{\delta \theta^2} \right) - \\ & \left. - \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \cdot \left( \frac{f_{ikj} - f_{ik-1j}}{\delta \theta^2} - \frac{f_{ikj} - f_{ik-1j}}{\delta \theta^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A_{ij} = \frac{2 \sum_{n=0}^i x_n^2 M_{nj} \delta x}{(x_i + x_{i+1})}$$

$$P_{ij} = \sum_{n=0}^i \frac{x_n^2 F_{nj} \delta x}{(x_i + x_{i+1})}$$

$$\bar{A}_{ij} = \frac{1}{6} (2 M_{ij} - E_{ij} x_i^{-3} + 3 N_{ij} x_i^{-1})$$

$$F_{nj} = \sum_{k=0}^{N\theta} \sin \theta_k f_{*kj} \delta \theta$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^i (x_n^4 F_{nj} + x_{n-1}^4 F_{n-1j}) \delta x$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^i (x_n^2 F_{nj} + x_{n-1}^2 F_{n-1j}) \delta x$$

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=i}^{N\theta-1} (x_n F_{nj} + x_{n+1} F_{n+1j}) \delta x$$

Уравнения (3) и (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{f_{in+1j}^{1/2} - f_{in+1j}}{\delta x^2} - \frac{f_{ikj}^{1/2} - f_{ikj}}{\delta x^2} \left( x_i^2 + \frac{(A_{ij} + A_{i-1j}) \tau}{\delta x^2} \right) + \\ + \frac{f_{i-1kj} - f_{i-1kj}}{\delta x^2} = G_{ikj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ik+1j} \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2} - f_{ikj} \left( x_i^2 \sin \theta_k + \right. \\ \left. + \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2} (\sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) + \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right)) \right) + \\ + f_{ik-1j} \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2} = \bar{G}_{ikj} \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G_{ikj} = - \frac{P_{ij} (f_{ikj} x_{i+1} + f_{ikj} x_i)}{\delta x} \tau +$$

$$+ \frac{P_{i-1j} (f_{ikj} x_i + f_{i-1kj} x_{i-1})}{\delta x} \tau -$$

$$- \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\sin \theta_k} \left( \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) \frac{f_{ikj} - f_{ikj-1}}{\delta z} - \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \cdot \right.$$

$$\cdot \left. \frac{f_{ikj} - f_{ikj-1}}{\delta \theta^2} \right) + \frac{x_i \cos \theta_k \tau}{2} \left[ \frac{(f_{ikj+1} - f_{ikj})}{\delta z} \cdot \right.$$

$$\cdot \left. (1 - \text{sign}(\cos \theta_k)) + \frac{f_{ikj} - f_{ikj-1}}{\delta z} (1 + \text{sign}(\cos \theta_k)) \right] -$$

$$- S_{ikj} \tau x_i^2 - f_{ikj} x_i^2 ;$$

$$\bar{G}_{ikj} = - f_{ikj} x_i^2 \sin \theta_k + f_{ikj} \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) \cdot \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2} -$$

$$- f_{ikj} \left( x_i^2 \sin \theta_k + \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2} \left( \sin \left( \theta_k + \frac{\delta \theta}{2} \right) + \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \right) \right) +$$

$$+ f_{ikj} \sin \left( \theta_k - \frac{\delta \theta}{2} \right) \cdot \frac{\bar{A}_{ij} \tau}{\delta \theta^2}$$

Таким образом на каждом слое по  $Z$  мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_{ij} f_{ikj}^{1/2} + B_{ij} f_{ikj}^{1/2} + C_{ij} f_{i-1kj}^{1/2} = G_{ikj} \\ \bar{A}_{ij} f_{ikj}^1 + \bar{B}_{ij} f_{ikj}^1 + \bar{C}_{ij} f_{i-1kj}^1 = \bar{G}_{ikj} \end{cases} \quad (5)$$

которые решаются прогонкой соответственно по  $X$  и  $\theta$ . Коэффициенты  $A, B, \bar{A}, \bar{B}, C, \bar{C}, G, \bar{G}$  легко получить из (3) и (4).

2. Принцип возможного распараллеливания вытекает из формул (6). Действительно, коэффициенты  $A, \bar{A}, B, \bar{B}, C, \bar{C}, G, \bar{G}$  можно вычислять для всех точек по  $Z$  <sup>параллельно</sup>, так как для вычислений в точке  $Z_j$  необходимо знать функцию распределения с предыдущего шага по времени в точках  $Z_{j-1}, Z_j, Z_{j+1}$ . Информация о функции распределения в точках  $Z_{j-1}$  и  $Z_{j+1}$  нужна лишь для учета члена  $\partial^2/\partial z^2$ . Очевидно, что и решение уравнений (6) можно проводить параллельно для всех точек по  $Z$ .

Единственной нерегулярной процедурой в процессе решения УФП является учет граничных условий, которая занимает пренебрежимо малую часть времени счета каждого шага по времени.

#### Использование ПК-2000 для решения УФП

Решение УФП, как следует из вышерассмотренных принципов распараллеливания, удобно проводить на мультипроцессорной машине типа ОКМД [14].

1. Архитектура ПК-2000 [15], относящейся к классу ОКМД, позволяет в полном объеме реализовать параллельное вычисление всех коэффициентов в системе уравнений (6) и решение этих уравнений одновременно для всех точек по  $Z$ .

Действительно, пусть в каждом процессорном элементе (ПЭ) находятся массивы, которые не меняются в процессе вычислений, а также функция распределения в точке  $Z_j$ . Тогда все коэффициенты системы (6) могут быть вычислены (без учета членов  $\partial^2/\partial z^2$ ) одновременно по одному алгоритму. Затем, подготовив значение  $f_{ikj}$  для  $k \geq N\theta/2$ , пересылаем его в  $(j-1)$ -ый процессорный элемент и производим полное вычисление  $G$  для  $k \geq N\theta/2$ . Для вычисления  $G$  при  $k \leq N\theta/2$  значение функции  $f_{ikj}$  пересылаем в  $(j+1)$ -ый процессорный элемент. Эти пересылки по регулярному каналу и вычисление полного значения  $G$  производятся регулярно во всех процессорных элементах, что позволяет эффективно использовать возможности, заложенные в архитектуре ПК-2000.

2. Нами была написана программа на мнемокоде ЭВМ ПС-2000, реализующая описанный алгоритм решения УФП для одного сорта частиц (ионов). В силу ограничений конкретной конфигурации ПС-2000 (8ПЭ по 4К слов памяти в каждом ПЭ) был выбран следующий контрольный вариант: пробочное отношение  $R = 2$ ; параметры сетки -  $NX = 41$  (число точек по  $X$ ),  $N\theta = 25$  (число точек по  $\theta$ ),  $NZ = 8$  (число точек по  $Z$ ). Счет этого варианта (1440 итераций по времени) занял 3.75 минуты.

Этот же вариант был просчитан на ЭВМ БЭСМ-6 (программа на языке АЛФА-6 с оптимизированной трансляцией). Счет на БЭСМ-6 занимает 51.2 минуты без учета процессорного времени, затраченного на обработку обмена с дисками. Отметим, что использование внешней дисковой памяти при счете на БЭСМ-6 неизбежно в силу ограничений на внутреннюю память ЭВМ БЭСМ-6. В нашем случае это увеличило реально затраченное процессорное время почти в 2 раза.

В заключение мы хотим отметить, что использование многопроцессорных вычислительных систем позволяет перейти на качественно новую ступень в решении задач математической физики; становится возможным переход к трехмерным задачам, которые в настоящее время практически недоступны вследствие ограничений быстродействия и размера оперативной памяти традиционных ЭВМ.

Авторы выражают благодарность сотрудникам нашего Института Тодеру Л.Б., Хайло Л.Ф. за помощь в кодировании и отладки программы, сотрудникам Института проблем управления (автоматики и телемеханики) Виленкину С.Я., Медведеву И.Л., Мазуровой Г.Г., Сухову Е.Г. за содействие в освоении ПС-2000, а также Шерстюку А.Н. за дружескую поддержку и интерес к работе.

## Л и т е р а т у р а

1. Будкер Г.И. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в электрическую. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. 1958, 3,3.
2. Г.И.Будкер, В.В.Мирнов, Д.Д.Рытов. Влияние гофрировки на расширение и остывание плазмы. Письма в ЖЭТФ, 14, 320, 1971 г.
3. В.В.Мирнов, Д.Д.Рытов. Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы. "Письма в ЖЭТФ", 1979, т.5, с. 678.
4. B.G. Logan, I.G. Brown, M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg, EXPERIMENTAL EVIDENCE OF Multi-Mirror plasma Confinement, Phys. Rev. Letters, v.29, p.1435, 1972
5. Димов Г.И., Закайдаков В.В., Кишиневский М.Е. Термоядерная ловушка с двойными пробками. Физика плазмы 2, 597 (1976). Fowler T.K., B.G. Logan, The Tandem Mirror Reactor, Comments on Plasma Physics and Contr. Fusion, 2, 167 (1977)
6. Lehnert B. Rotating Plasmas, Nucl. Fusion, 11, 485, 1977  
Bekhtenev A.A., Volosov V.I., Pal'chikov V.E., Yudin Yu. N., Pekker M.S., Problems of a thermonuclear reactor with a rotating plasma, Nucl. Fusion, V20, N5, 579 (1980)
7. Лаврентьев О.А. Исследование электромагнитной ловушки. Сб. Магнитные ловушки, вып.3. Киев, "Наукова Думка", 1968, стр. 77.
8. M.N. Rosenbluth, W.M. Mac-Donald, D.L. Judd, Fokker-Plank Equation for an Inverse-Square Force, Phys. Rev., 107, 1 (1957)
9. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. О точности численных расчетов потерь плазмы из открытых магнитных ловушек. Сб. "Численные методы механ. сплош. среды" т.10, № 1, 45, 1979
10. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. О численных методах решения двумерной задачи для уравнения Фоккера-Планка. Журнал вычисл. матем. и матем. физики. т.20, № 5, 1341, (1980)

11. М.С. Пеккер. Полностью консервативная разностная схема для двумерного уравнения Фоккера-Планка. Препринт ИЯФ № 38 (1980).
12. И.Ф. Потапенко, В.А. Чуянов. Полностью консервативная схема для двумерного уравнения Ландау. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. 20, № 2, 513 (1980).
13. Н.Н. Яненко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", АН СССР Сиб. отделение, 1967.
14. Б.А. Головкин. Параллельные вычислительные системы. 1980.
15. В.А. Трапезников, И.В. Прангшвили, А.А. Новохатний, В.В. Резанов. Экспедиционные геофизические вычислительные комплексы на базе ЭВМ ПС-2000. Прибор и системы управления № 2, 1981.

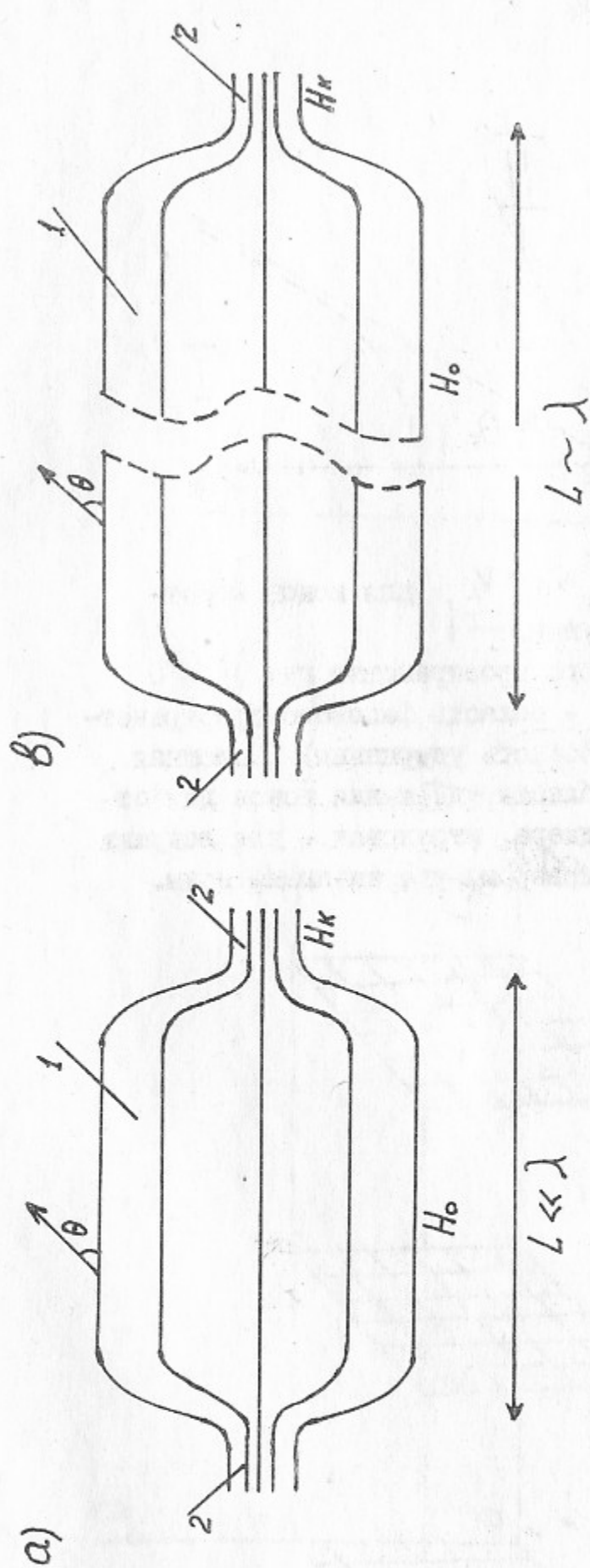


Рис. 1. Схематический вид открытых магнитных ловушек.

а) классическая открытая ловушка Бункера;

б) газодинамическая ловушка.

1 - силовые линии магнитного поля, 2 - области максимального магнитного поля (магнитные пробки),  $H_0$  - значение магнитного поля в центре ловушки,  $H_k$  - на краях ловушки,  $\theta$  - угол между направлением скорости частицы и магнитным полем в центре ловушки.

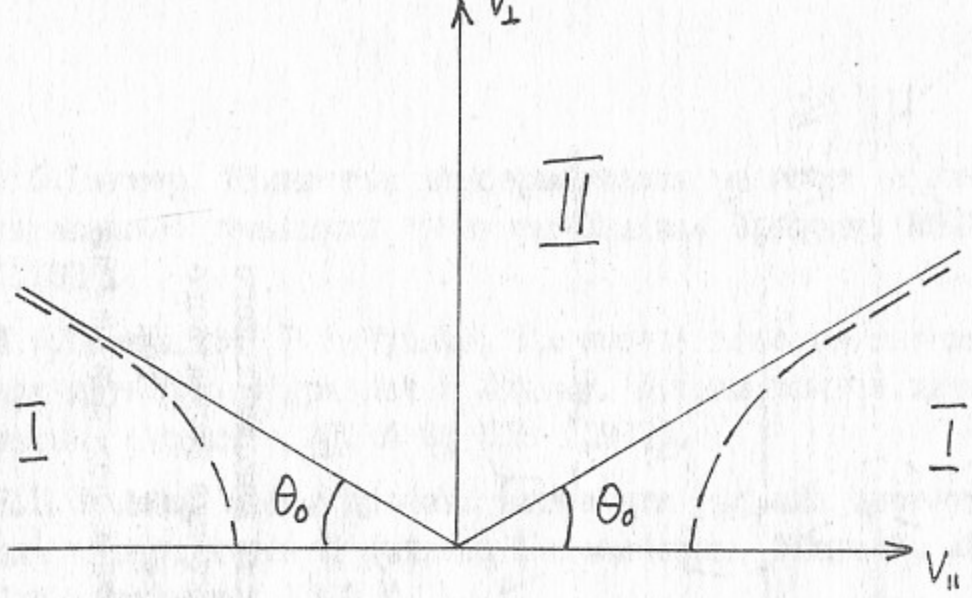


Рис.2. Фазовая плоскость  $V_{\parallel}$ ,  $V_{\perp}$  для ионов короткой магнитной ловушки.  
 I - области фазового пространства где  $f = 0$  (конус потерь), II - область фазового пространства где  $f \neq 0$  (область удержания). Сплошная линия - граница области удержания ионов для открытой ловушки Будкера, штриховая - для ловушки с потенциальным барьером, удерживающим ионы.

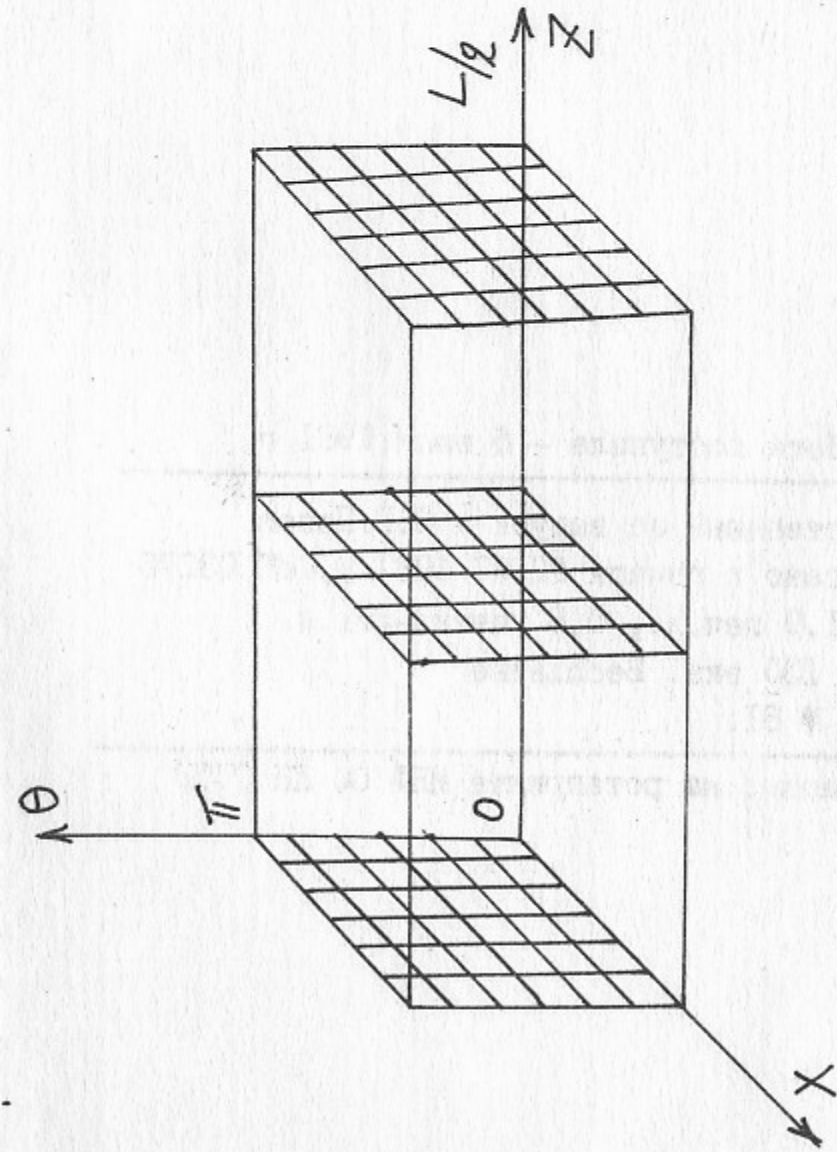


Рис.3. Область интегрирования УФДЛ для ГДЛ. Фазовая плоскость  $V_{\parallel}$ ,  $V_{\perp}$  - для ионов в точке  $Z = 0$ .  
 I - область фазового пространства, где  $f = 0$ ; II - область удержания ионов,  $f \neq 0$ .