

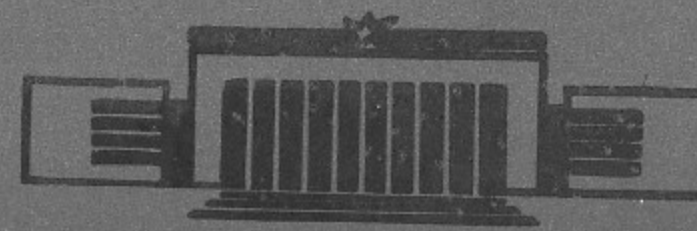
15

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Л.С.Пеккер, Г.В.Ступаков

ПОПЕРЕЧНЫЕ ПОТЕРИ ИОНОВ ЧЕРЕЗ
КРАЙНИЕ ПРОБКОТРОНЫ АМБИПОЛЯР-
НОЙ ЛОВУШКИ ПРИ РЕДКИХ
СТОЛКНОВЕНИЯХ

ПРЕПРИНТ 81 - 95



Новосибирск

1. Введение

Основными каналами потерь частиц из амбиполярной ловушки, определяющими время удержания плазмы в центральном пробкотроне, являются вылет частиц вдоль силовых линий на торцы установки и их диффузия поперек магнитного поля. Существует, однако, еще один специфический механизм потерь [1], который при определенных условиях может быть существенным. Он состоит в том, что ионы из центральной части ловушки, влетая в крайний пробкотрон, захватываются в него и начинают осциллировать между горбом амбиполярного потенциала и внутренней пробкой крайнего пробкотрона (см. рис.1). Радиальный дрейф в аксиально-несимметричном магнитном поле приводит к тому, что такие ионы (ниже они называются захваченными) могут покидать плазменный объем и гибнуть на стенке установки.

В работе [2] этот канал потерь подробно изучался для случая, когда захват "центральных" ионов в крайний пробкотрон происходит вследствие изменения их питч-угла при кулоновских рассеяниях в крайнем пробкотроне. Другой возможный механизм захвата заключается в том, что частица, влетающая в крайний пробкотрон с магнитным моментом μ чуть меньше критического значения ε/B_{\max} , $\mu < \varepsilon/B_{\max}$ (ε - кинетическая энергия, B_{\max} - максимальное значение магнитного поля на данной силовой линии), за время движения до амбиполярного барьера и обратно сдрейфовывает на силовую линию, где максимальное поле B'_{\max} больше чем B_{\max} настолько, что $\mu > \varepsilon/B'_{\max}$, и частица не может вылететь обратно в центральный пробкотрон^{ж)}. При малых частотах столкновений этот механизм захвата, который мы называем бесстолкновительным, является главным. Ниже мы вычислим скорость потерь из амбиполярной ловушки в случае бесстолкновительного захвата.

Точное вычисление потока ионов из крайнего пробкотрона требует знания формы дрейфовых оболочек захваченных ионов, в частности, ответа на вопрос, какие дрейфовые оболочки выходят на стенки установки, а какие нет. Такой анализ был проведен в рабо-

ж) Разумеется, возможен и обратный процесс, когда частица, дрейфуя в направлении уменьшения B_{\max} , переходит из захваченных в пролетные.

те [2] в предположении бесконечно узкого амбиполярного барьера и в пренебрежении электрическим дрейфом. Он показывает, что если магнитное поле не выбрано специальным образом, то дрейфовые оболочки могут быть сильно вытянутыми в направлении одной из плоскостей симметрии ловушки, или же вообще не замыкаться вокруг магнитной оси системы. Это означает, что все захваченные ионы (за исключением, может быть, находящихся в малой приосевой области) за характерное время дрейфа τ_d обязательно теряются из ловушки. Именно такой случай мы будем рассматривать в настоящей работе. Отметим сразу, что учет радиального электрического поля в крайнем пробкотроне, приводит, вообще говоря, к улучшению дрейфовых оболочек (см. [2]) и уменьшению радиальных потерь, так что наш результат в этом смысле дает верхнюю границу скорости потерь.

В следующем разделе приведены качественные оценки скорости потерь в режиме малых столкновений и указаны условия его применимости. Разделы III и IV посвящены выводу точных выражений для потока ионов из ловушки. Заключительный, пятый, раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

II. Качественное рассмотрение

Вследствие аксиальной несимметрии крайнего пробкотрона пролетный ион, как отмечалось во Введении, может захватиться в него бесстолкновительным образом (рис. I). Оценим, какого порядка должно быть отличие магнитного момента μ этого иона от ε/B_{\max} на данной силовой линии, чтобы захват мог произойти.

Обозначим через B_1, B_2 соответственно минимальное и максимальное значения B_{\max} на дрейфовой поверхности захваченного иона. Пусть за время t_{11} пролета концов ловушки туда и обратно этот ион смещается с исходной силовой линии, на которой максимальное магнитное поле равно B_{\max} , на силовую линию с максимальным полем $B_{\max} + \delta B_{\max}$. Тогда δB_{\max} может быть оценено как

$$\delta B_{\max} \sim \frac{B_2 - B_1}{\tau_d} t_{11} \quad (I)$$

Для того, чтобы ион захватился, отличие его магнитного момента μ от ε/B_{\max} , которое мы обозначим через $\delta\mu$, очевидно, должно быть меньше чем $\varepsilon \delta B_{\max} / B_{\max}^2$. По порядку величин

$$\delta\mu \sim \frac{\Delta\mu}{\tau_d} t_{11} \quad (I')$$

где $\Delta\mu = \varepsilon/B_1 - \varepsilon/B_2$. Отметим, что дрейфовые поверхности ионов, захваченных бесстолкновительным образом, почти совпадают с магнитными оболочками, для которых значение B_{\max} постоянно [2], поэтому в оценке (I) $\Delta\mu/\mu \ll 1$. В параксиальном приближении (когда L_p - длина крайнего пробкотрона много больше r - характерного радиуса плазмы в нем) это отношение равно:

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} \sim \frac{r^2}{L_p^2 \ln(L_p^2/r^2)} \quad (2)$$

(см. [2]).

Получим теперь условия, определяющие вид захвата ионов в торцевые пробкотроны. За время t_{11} магнитный момент пролетного иона μ изменяется в результате кулоновского рассеяния на величину $\delta\mu$, порядка

$$\frac{\delta\mu_0}{\mu} \sim \sqrt{t_{11} \nu} \ll 1, \quad (3)$$

где ν^{-1} - время ион-ионных столкновений. Неравенство $\delta\mu \gg \delta\mu_0$ или, что тоже самое,

$$\tau_d \nu \ll \sqrt{t_{11} \nu} \frac{\Delta\mu}{\mu}, \quad (4)$$

означает, что у пролетного иона за время движения до амбиполярного потенциала и обратно магнитный момент изменяется незначительно, и он может захватиться в торцевой пробкотрон только бесстолкновительным образом. Если же имеет место противоположное неравенство:

$$\tau_d \nu \gg \sqrt{t_{11} \nu} \frac{\Delta\mu}{\mu}, \quad (5)$$

то "центральный" ион захватывается в ловушку в результате столкновений. Таким образом неравенство (4) соответствует бесстолкновительному захвату, а (5) - столкновительному.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда все пролетные ионы, захваченные в торцевую ловушку тем или иным способом (за исключением может быть тех, которые захватились в малой окрестности приосевой области), через время τ_d достигают диафрагмы. Однако, если столкновения являются настолько частыми, что за время τ_d магнитный момент захваченного иона изменяется больше чем $\Delta\mu$, то часть захва-

ченых ионов может вылететь обратно в центральную ловушку, не достигнув стенок камеры. Поэтому мы ниже будем считать выполненным неравенство

$$\sqrt{\tau_D} < \left(\frac{\Delta\mu}{\mu}\right)^2, \quad (6)$$

которое соответствует случаю редких столкновений. Потери захваченных ионов, когда имеет место неравенство противоположное (6), детально изучены в работе [2]. Отметим, что в проектах термоядерных реакторов на основе амбиполярной ловушки [3] неравенство (6) выполняется с небольшим запасом.

Для оценки скорости потерь мы будем считать, что всякий ион, захватившийся в крайний пробкотрон, теряется из ловушки. Неравенство (6) позволяет пренебречь изменением магнитного момента за время τ_D . Чтобы оценить плотность n_{tr} захваченных ионов, учтем, что через данную точку крайнего пробкотрона проходят дрейфовые оболочки частиц, магнитный момент которых лежит в интервале $\Delta\mu$, поэтому $n_{tr} \sim n \Delta\mu / \mu$, где n — плотность плазмы в центральном пробкотроне^{ж)}. Полное число "центральных" ионов, захваченных в торцевые ловушки, будет порядка $n_{tr} V_P$, где V_P — объем плазмы в крайнем пробкотроне, а их поток Q на диафрагму может быть оценен как

$$Q \sim \frac{n_{tr} V_P}{\tau_D}. \quad (7)$$

Определим теперь время τ_c удержания плазмы в амбиполярной ловушке относительно рассматриваемого механизма потерь

$$\tau_c = \frac{n V_s}{Q} \sim \tau_D \frac{V_s}{V_P} \frac{\mu}{\Delta\mu}, \quad (8)$$

где V_s — объем плазмы в центральном пробкотроне. В формуле (8) мы учли, что $V_s \gg V_P$. Если подставить $V_s = L_s \Gamma^2 R$ и $V_P = L_P \Gamma^2$, где R — пробочное отношение в центральной ловушке, L_s — длина центрального пробкотрона, и считать $\Gamma \ll L_P$ (парааксиальное приближение), то (8) можно представить в виде

$$\tau_c \sim \tau_D \frac{R L_s}{L_P} \frac{L_P^2 \ln(L_P^2 / r^2)}{\Gamma^2} \quad (9)$$

ж) Здесь мы учли, что пробочное отношение для торцевых пробкотронов $\sim 15 \div 2$.

Оценки времени удержания плазмы (8), (9), как видим, не зависят, является ли захват ионов в крайние ловушки столкновительным или бесстолкновительным.

III. Бесстолкновительный захват

В соответствии со сказанным во Введении, вычислим число ионов, которые захватываются в крайний пробкотрон в единицу времени.

Рассмотрим подробно процесс захвата. Введем криволинейные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 таким образом, что координатные линии ξ^3 совпадают с силовыми линиями, а величина ξ^3 представляет собой длину дуги, отмеряемой от некоторой поверхности (например, от медианной плоскости крайнего пробкотрона). Введем также функцию $B_{max}(\xi^1, \xi^2)$, которая задает максимальное значение магнитного поля, достигаемое во внутренней пробке на данной силовой линии. Пусть, влетая в крайний пробкотрон, в точке максимального поля ведущий центр частицы находился на силовой линии, характеризующейся координатами ξ^1, ξ^2 , а ее магнитный момент был меньше, чем $\epsilon / B_{max}(\xi^1, \xi^2)$. За время пролета пробкотрона туда и обратно за счет дрейфа координаты ξ^1 и ξ^2 ее ведущего центра изменятся на $\delta\xi^1$ и $\delta\xi^2$, соответственно, и он войдет в пробку в точке, где максимальное магнитное поле отличается от исходного на величину $\delta B_{max} = \frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^1} \delta\xi^1 + \frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^2} \delta\xi^2$. Если $B_{max} + \delta B_{max}$ окажется больше, чем ϵ / μ , то частица захватится (для этого, во всяком случае, необходимо, чтобы $\delta B_{max} > 0$). Таким образом, на рассматриваемой силовой линии будут захватываться частицы, влетающие в пробкотрон с магнитным моментом, лежащим в узком интервале ширины $\delta\mu = \delta B_{max} \epsilon / B_{max}^2$ в окрестности значения $\mu = \mu_0(\epsilon, \xi^1, \xi^2) = \epsilon / B_{max}$.

Перейдем теперь к вычислению δB_{max} . Для этого выразим смещения $\delta\xi^1$ и $\delta\xi^2$ через производные продольного адиабатического инварианта \mathcal{J} (см. [4]):

$$\delta\xi^1 = \frac{2mc}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi^2}, \quad \delta\xi^2 = -\frac{2mc}{eB} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \xi^1}, \quad (10)$$

где g_{ik} — метрический тензор, $g = \det \|g_{ik}\|$, а множитель 2 учитывает, что смещения (10) есть результат двойного пролета ловушки. Функция \mathcal{J} определяется следующим образом:

$$J(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu) = \int_a^b v_{||} d\xi^3, \quad (II)$$

где интегрирование ведется вдоль силовой линии от точки максимума магнитного поля a до правой точки поворота b (см. рис. I). Здесь необходимо отметить, что выражения (10), строго говоря, справедливы только для захваченных частиц [4], но если μ мало отличается от μ_0 , что мы предполагаем, то в точке a скорость частицы близка к нулю и с достаточной точностью можно пользоваться формулами (10). Вычисляя теперь $\delta\mu$, получаем

$$\delta\mu = \frac{2mc\varepsilon}{eB_{max}^2} \frac{1}{B} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \left(\frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^1} \frac{\partial J}{\partial \xi^2} - \frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^2} \frac{\partial J}{\partial \xi^1} \right). \quad (12)$$

Зная $\delta\mu$, легко найти поток частиц из центрального пробкотрона, переходящих в захваченные в крайних пробкотронах. Для этого будем считать, что время удержания плазмы в центральном пробкотроне много больше, чем обратная частота ион-ионных столкновений. Тогда функция распределения в интервале $\delta\mu$ является максвелловской:

$$f = f_M(\varepsilon, \xi^1, \xi^2) = \frac{n(\xi^1, \xi^2)}{\left[\frac{2\pi}{m} T(\xi^1, \xi^2) \right]^{3/2}} e^{-\varepsilon/T(\xi^1, \xi^2)} \quad (13)$$

и соответствующий поток Q равен:

$$Q = 2 \int v_{||} f_M d^3v d\varepsilon = \frac{4\pi}{m^2} \int_a^b d\varepsilon B \int_{\mu_0}^{\mu_0 + \delta\mu} d\mu f_M, \quad (14)$$

где $d\varepsilon$ - нормального площадь сечения элементарной силовой трубки, а интегрирование ведется по сечению плазменного шнура S . Множитель 2 учитывает, что потери идут через оба крайних пробкотрона амбиоплярной ловушки. Выполняя интегрирование по μ и расписывая выражение $d\varepsilon = [d\xi^1 \times d\xi^2] \vec{B}/B = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g/g_{33}}$, получаем:

$$Q = \sqrt{\frac{2}{\pi m_i}} \int_S B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} n T^{-3/2} d\xi^1 d\xi^2 \int_0^\infty d\varepsilon e^{-\varepsilon/T} \delta\mu = \frac{2^{3/2} m^{1/2} c}{\pi^{1/2} e} \iint n T^{-3/2} B^{-2} \left(\frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^1} \frac{\partial J}{\partial \xi^2} - \frac{\partial B_{max}}{\partial \xi^2} \frac{\partial J}{\partial \xi^1} \right) \cdot \varepsilon \exp(-\varepsilon/T) d\xi^1 d\xi^2 d\varepsilon \quad (15)$$

Напомним, что захват частиц происходит на тех силовых линиях, где δB_{max} (и, следовательно, $\delta\mu$) больше нуля, поэтому интегрирование в формуле (15) ведется по области, где подынтегральное выражение положительно.

Вычислим Q , например, для случая, когда диафрагма с внутренним радиусом r_d расположена вблизи медианной плоскости крайнего пробкотрона, а магнитное поле рассматривается в параксиальном приближении. Сечение дрейфовых поверхностей захваченных ионов плоскостью, перпендикулярной к оси ловушки, представляет собой в этом приближении либо семейство эллипсов, либо гипербол, причем для рассматриваемых нами ионов близких к границе захвата форму сечения можно считать не зависящими от ε, μ (см. Приложение). Мы здесь для краткости остановимся только на случае эллиптических сечений.

На рисунке 2 представлены возможные пересечения дрейфовой поверхности $J = const$ с магнитными оболочками $B_{max} = const$, отнесенные к медианной плоскости крайнего пробкотрона. Сечение в этой плоскости поверхностей $B_{max} = const$ также является семейством эллипсов [2]. В точках α "центральные" ионы захватываются в торцевой пробкотрон, а точках β - возвращаются обратно в центральную ловушку. Диафрагма на этом рисунке представляет собой окружность, ограничивающую объем плазмы. В ситуации, изображенной на рис. 2б, захваченные ионы не выходят из объема плазменного шнура, и рассматриваемых потерь нет, а на рисунке 2а дрейфовые поверхности пересекают диафрагму, и потери есть. Вычислим Q в этом случае.

В соответствии с рисунком 2а, вдоль дрейфа захваченных ионов B_{max} увеличивается в квадрантах I, III и уменьшается - в II, IV. Поэтому в квадрантах II, IV захваченных ионов нет. Ионы, захваченные в заштрихованной области, не достигают диафрагмы, т.к. их дрейфовые поверхности недостаточно вытянуты в поперечном направлении. Таким образом, интегрирование по переменным ξ^1, ξ^2 в (15) должно проводиться в квадрантах I, III вне заштрихованного эллипса. Подставляя в формулу для потока захваченных ионов Q выражения для B_{max} и J из (14), (16) и проводя интегрирование по

энергии, получим:

$$Q = \frac{24c}{eB_0(L)} (\bar{\eta} - \delta\eta) \int n(r_0, \psi_0) T(r_0, \psi_0) \sin(2\psi_0) r_0^3 dr_0 d\psi_0, \quad (16)$$

где в качестве ξ^1, ξ^2 взяты полярные координаты (r_0, ψ_0) в медианной плоскости крайнего пробкотрона, коэффициенты $\eta, \bar{\eta}, \delta, \delta$ приведены в Приложении, а $B_0(L)$ — максимальное значение магнитного поля по оси системы. Из того, что плотность и температура плазмы в центральном соленоиде не зависят от азимутального угла, а также, что окружность в медианной плоскости крайнего пробкотрона проектируется вдоль силовых линий в окружность в медианной плоскости центральной ловушки, следует, что n и T в (16) не зависят от ψ_0 . Это позволяет провести интегрирование по углу в (16). Полученное при этом выражение для Q оказывается весьма громоздким и поэтому приводится в Приложении.

IV. Столкновительный захват

Для вычисления потерь в случае столкновительного захвата мы воспользуемся кинетическим уравнением для функции распределения захваченных ионов, усредненного вдоль силовых линий. Оно имеет следующий вид

$$\dot{\xi}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \dot{\xi}^2 \frac{\partial f}{\partial \xi^2} = \langle st f \rangle, \quad (17)$$

где $f = f(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu)$ — функция распределения захваченных ионов, $\langle st f \rangle$ — усредненный столкновительный член,

$$\langle st f \rangle = \frac{1}{t_{||}} \oint st f \frac{ds}{v_{||}}, \quad (18)$$

$t_{||} = t_{||}(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu)$ — период продольных колебаний захваченных частиц, а $\dot{\xi}^1$ и $\dot{\xi}^2$ даются следующими выражениями (см. [4]):

$$\dot{\xi}^1 = \frac{2mc}{et_{||}} \frac{1}{B} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J}{\partial \xi^2}, \quad \dot{\xi}^2 = -\frac{2mc}{et_{||}} \frac{1}{B} \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} \frac{\partial J}{\partial \xi^1} \quad (19)$$

Рассмотрим теперь, как зависит функция f на данной силовой линии ξ^1, ξ^2 от ε и μ (см. рис.В). Области $\varepsilon > \mu B_{\max}(\xi^1, \xi^2)$ соответствуют пролетные частицы, здесь функция распределения является максвелловской функцией вида (13). Область $\varepsilon < \mu B_{\max}$ может заселена захваченными частицами. Как обсуждалось в разделе II, ее характерная ширина $\Delta\mu/\mu$ мала по сравнению с единицей, соответственно, градиент функции распределения здесь велик. Если перейти от переменных ε, μ к переменным ε, χ , где

$$\chi(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu) = \frac{\mu B_{\max}(\xi^1, \xi^2)}{\varepsilon} - 1, \quad (20)$$

то значениям $\chi > 0$ соответствуют захваченные, а $\chi < 0$ — пролетные частицы, причем функция $f(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \chi)$ плавно зависит от первых трех аргументов и резко меняется при малых изменениях χ вблизи значения $\chi = 0$. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить столкновительный член, выписав его в переменных ε и χ и удержав только вторую производную f по χ (см., например, [5]):

$$\langle st f \rangle = \nu^*(\xi^1, \xi^2, \varepsilon) \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}$$

Выражение для усредненной вдоль силовой линии частоты столкновений ν^* можно найти, например, в [5]; для наших целей точное значение ν^* несущественно.

Для того чтобы упростить левую часть уравнения (17), удобно вместо одной из криволинейных координат, например ξ^2 , ввести адиабатический инвариант J (так что полным набором независимых переменных становятся $\xi^1, J, \varepsilon, \chi$). Тогда кинетическое уравнение принимает окончательный вид:

$$\dot{\xi}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \dot{J} \frac{\partial f}{\partial J} = \nu^* \frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2} \quad (21)$$

(при переходе к переменной J в столкновительном члене надо пренебречь членами, пропорциональными $\partial f/\partial J$ и $\partial^2 f/\partial J^2$, по сравнению с $\partial^2 f/\partial \chi^2$). Входящая в (21) скорость изменения χ равна:

$$\dot{\chi} = \frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial B_{\max}}{\partial \xi^1} \dot{\xi}^1 + \frac{\partial B_{\max}}{\partial \xi^2} \dot{\xi}^2 \right) \quad (22)$$

Ввиду того, что решение ищется в узком интервале x в функциях ξ^1 , \dot{x} и \dot{y} можно положить $x = 0$, так что они зависят только от ξ^1 , y и ε .

Уравнение (21) следует решать с граничным условием в точке $x = 0$:

$$f|_{x=0} = f_M(\xi^1, y, \varepsilon, x=0), \quad (23)$$

которое просто означает, что на границе захвата функция распределения сливается с максвелловской функцией пролетных частиц. Кроме того, имеется еще одно условие, состоящее в том, что на границе плазмы Γ (которая определяется формой диафрагмы) функция распределения захваченных частиц должна обращаться в нуль:

$$f|_{\Gamma} = 0, \quad x > 0. \quad (24)$$

Проанализируем сначала качественно, как меняется функция f вдоль траектории частицы $y = \text{const}$. Для конкретности мы будем апеллировать к траектории, лежащей в квадрантах IV, I на рис. 2а. Как видно, на первой половине траектории величина B_{max} убывает, что означает, что $\dot{x} < 0$. После пересечения оси ординат \dot{x} меняет знак и становится больше нуля.

Построим сначала решение уравнения (21) в пренебрежении столкновительным членом. Будем считать, что координата ξ^1 выбрана так, чтобы $\dot{\xi}^1$ было положительным на рассматриваемой траектории. Интегрирование уравнения

$$\dot{\xi}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

вдоль характеристик с граничными условиями (23), (24) показывает, что в квадранте IV, где $\dot{x} < 0$, $f = 0$ при $x > 0$ (но, напомним, $f = f_M$ при $x \leq 0$), а в квадранте I функция f отлична от нуля в некотором интервале $0 < x < x_{\text{max}}(\xi^1, y, \varepsilon)$ (см. рис. 4). Теперь ясно, что учет столкновений приведет прежде всего к размытию резких фронтов, как показано на рис. 4 (а также небольшому изменению функции f в области $0 < x < x_{\text{max}}$). Нетрудно оценить, что вклад фронтов в плотность захваченных

частиц мал по параметру $(\tau_D \nu) / (\Delta \mu / \mu_0)^2$ и, следовательно, им можно пренебречь. Таким образом, мы приходим к важному заключению, что, хотя в рассматриваемом режиме захват частиц в крайний пробокстрон осуществляется вследствие столкновений, для вычисления скорости потерь достаточно решать кинетическое уравнение без столкновительного члена. Более того, как будет сейчас показано, поток частиц Q здесь в точности совпадает с выражением (16) из бесстолкновительного режима.

Запишем поток захваченных частиц на диафрагму в следующем виде

$$Q = \frac{8\pi c}{me} \int d\varepsilon d\mu \int_{\Gamma} f(\xi^1, \xi^2, \varepsilon, \mu) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi^2} d\xi^2 - \frac{\partial y}{\partial \xi^1} d\xi^1 \right). \quad (26)$$

Подынтегральное выражение в правой стороне представляет собой усредненное вдоль силовых линий произведение функции распределения на перпендикулярную к границе Γ скорость частиц, а интегрирование во внутреннем интеграле ведется по границе Γ . Переходя к интегрированию по сечению плазменного шнура, которое мы обозначим через S , получаем

$$Q = \frac{8\pi c}{me} \int d\varepsilon d\mu \int_S d\xi^1 d\xi^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \xi^1} \right). \quad (27)$$

Теперь заметим, что вклад в этот интеграл вносят только области, где $\dot{x} > 0$; как было показано выше, при $\dot{x} < 0$ функция распределения захваченных частиц тождественно равняется нулю. При $\dot{x} > 0$ уравнение (25) можно записать в виде, который автоматически учитывает граничное условие (23):

$$\dot{\xi}^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} = \dot{x} \delta(x) f_M$$

Вспомнивая теперь, что левая часть этого уравнения совпадает с левой частью (17), которая, по существу, входит в подынтегральное выражение в (27), получаем

$$Q = \frac{2\pi}{m^2} \int d\varepsilon d\mu \int d\xi^1 d\xi^2 t_{\perp} B \sqrt{\frac{g}{g_{33}}} \dot{x} \delta(x) f_M = \\ = \frac{2\pi c}{me} \int \varepsilon d\varepsilon \int d\xi^1 d\xi^2 f_M \frac{1}{B_{\text{max}}^2} \left(\frac{\partial B_{\text{max}}}{\partial \xi^1} \frac{\partial y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial B_{\text{max}}}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \xi^1} \right) \quad (28)$$

Интегрирование здесь ведется по области, где выполняется условие $\dot{\chi} > 0$, которое совпадает с условием $\delta B_{\max} > 0$ (ср. формулы (12) и (22)). Сравнивая (28) с (15), видим, что они совпадают. Таким образом, поток частиц из ловушки в рассматриваемом режиме может вычисляться по формулам, выведенным в предыдущем разделе.

У. Обсуждение

При малых частотах столкновений время удержания плазмы относительно поперечных потерь ионов через концевые пробкотроны не зависит от ν и задается выражением (8). С увеличением ν неравенство (6) переходит в противоположное, и τ_c меняется по закону [1]:

$$\tau_c \sim \sqrt{\frac{\tau_D}{\nu}} \cdot \frac{V_s}{V_p} \quad (29)$$

(смотри также [2]). Формулами (8) и (29) для оценки времени удержания плазмы можно пользоваться, если τ_c , вычисленное по ним, оказывается больше ν^{-1} . Если это не так, то время удержания будет порядка ν^{-1} . Легко видеть, что если

$$\frac{V_p}{V_s} > \left(\frac{\Delta\mu}{\mu} \right), \quad (30)$$

то в области частот столкновений, где выполняется неравенство (6), время удержания, вычисленное по формуле (8), автоматически оказывается меньше ν^{-1} . Поэтому изученный в настоящей работе режим потерь реализуется, когда справедливо неравенство противоположное (30). Зависимость времени удержания плазмы от частоты столкновений в этом случае представлена на рисунке 5. Тонкой сплошной линией на этом рисунке обозначена зависимость τ_c по формулам (8), (29), штриховой — $\tau_c = \nu^{-1}$, и жирной сплошной линией — результирующий график времени удержания от ν .

В заключение подчеркнем, что наши оценки в режиме слабых столкновений основаны на предположении о том, что, захватываясь в крайний пробкотрон, ион обязательно попадает на стенку ловушки. В этом случае время удержания снижается до неприемлемо малых значений, сравнимых, вообще говоря, с временем ион-ионных

столкновений. Для подавления таких потерь необходимо изменить геометрию магнитного поля в крайнем пробкотроне, чтобы дрейфовые оболочки захваченных ионов не выходили за границы плазмы.

Авторы благодарны Д.Д.Рятову за полезные обсуждения.

Приложение

В рамках модели, предложенной в работе [2], найдем поток захваченных ионов на диафрагму в случае бесстолкновительного захвата. В этой модели предполагается следующее: 1) считается выполненным условие параксиальности, т.е. размер плазмы Γ в поперечном направлении мал по сравнению с длиной крайнего пробкотрона L_p ; 2) горб амбиполярного потенциала предполагается очень узким, так что захваченные ионы отражаются от него как от "стенки"; 3) при расчете дрейфовых оболочек пренебрегается электрическим полем. Последнее предположение не является тривиальным и подробно обсуждается в той же работе.

Поле магнитной пробки в параксиальном приближении задается двумя функциями $B_0(z)$ и $b_0(z)$, изображенными на рис.6:

$$B_z = B_0 - \frac{1}{4} \Gamma^2 B_0'' - \Gamma^2 b_0' \cos(2\psi) \quad (п.1)$$

$$B_r = -2\Gamma b_0 \cos(2\psi) - \frac{1}{2} \Gamma B_0' \quad (п.1)$$

$$B_\psi = 2\Gamma b_0 \sin(2\psi)$$

Здесь используется цилиндрическая система координат Γ, ψ, z с осью z , направленной вдоль оси ловушки; $z=0$ соответствует medianной плоскости крайнего пробкотрона. С помощью интегрирования получим выражение для силовой линии, проходящей при $z=0$ через точку (Γ_0, ψ_0) [6]:

$$\Gamma(\Gamma_0, \psi_0, z) = \Gamma_0 \left[\left(\frac{B_0(0)}{B_0(z)} \right) \left(e^{\psi \sin^2 \psi_0} + e^{-\psi \cos^2 \psi_0} \right) \right]^{1/2} \quad (п.2)$$

$$\psi(\Gamma_0, \psi_0, z) = a z \operatorname{ctg} (e^{\psi} \operatorname{tg} \psi_0) \quad (п.2)$$

$$\Phi(z) = 4 \int_0^z \frac{b_0(z')}{B_0(z')} dz'$$

Нетрудно также получить из (п.1) выражения для модуля магнитного поля $B(\Gamma, \psi, z) = B_0(z) + \delta B(\Gamma, \psi, z)$:

$$\delta B(\Gamma, \psi, z) = \Gamma^2 \left[\left(\frac{B_0''}{8B_0} + \frac{2B_0'}{B_0} - \frac{B_0'''}{4} \right) + \cos(2\psi) \left(\frac{b_0 B_0'}{B_0} - b_0' \right) \right] \quad (п.3)$$

Учитывая, что максимальное значение магнитного поля на данной силовой линии достигается при $z=L$ [2], из (п.3) следует,

что уравнение сечения магнитной поверхности $B_{\max} = \text{const}$ плоскостью $z=0$ имеет вид [2]:

$$B_{\max}(\Gamma_0, \psi_0) = B_0(L) \left[1 + (\eta + \gamma) \Gamma_0^2 (1 + \xi \cos(2\psi_0)) \right] = \text{const} \quad (п.4)$$

где

$$\eta = \frac{B_0(0)}{B_0(L)} \exp(-\Phi(L)) \left(\frac{b_0^2(L)}{B_0^2(L)} - \frac{B_0''(L)}{8B_0(L)} - \frac{b_0'(L)}{2B_0(L)} \right) \quad (п.5)$$

$$\gamma = \frac{B_0(0)}{B_0(L)} \exp(\Phi(L)) \left(\frac{b_0^2(L)}{B_0^2(L)} - \frac{B_0''(L)}{8B_0(L)} + \frac{b_0'(L)}{2B_0(L)} \right)$$

и является семейством эллипсов или гипербол, соответственно, при $|\xi| < 1$ и $|\xi| > 1$ [2]. Случай $|\xi| = 1$ является вырожденным и не рассматривается.

Рассмотрим теперь подробнее, чем это было сделано в [2], дрейфовые поверхности захваченных ионов с μ , близким к ϵ/B_{\max} . Для наших целей в выражении для продольного адиабатического инварианта J из [2]:

$$J = J_0 + J_1 + J_2 \quad (п.6)$$

$$J_0 = \int_0^{z_2} \sqrt{\frac{z}{m} (\epsilon - \mu B_0(z))} dz \quad (п.7)$$

$$J_1 = \sqrt{\frac{z}{m}} \int_0^{z_2} \left(\sqrt{\epsilon - \mu B_0(z)} \frac{B_\psi^2 + B_r^2}{2B_0^2} - \mu \frac{(\delta B(\Gamma, \psi, z) - \delta B(\Gamma, \psi, L))}{2\sqrt{\epsilon - \mu B_0(z)}} \right) dz + J_0 \quad (п.8)$$

$$J_2 = - \frac{\mu \delta B(\Gamma, \psi, L)}{\epsilon} \sqrt{\frac{z}{m}} L F \left(\frac{\mu - \mu_1}{\mu_1}, \frac{\mu \delta B(\Gamma, \psi, L)}{\epsilon} \right), \quad (п.9)$$

где

$$J_{10} = \sqrt{\frac{z}{m} (\epsilon - \mu B_0(0))} \Gamma_0^2 \cos(2\psi_0) \left(\frac{2b_0(0)}{B_0(0)} - \frac{b_0''(0)}{B_0(0)} - \frac{8b_0^3(0)}{B_0^2(0)B_0''(0)} \right), \quad (п.8')$$

а Γ, ψ задаются формулами (п.2), можно положить μ равным $\mu_1 = \epsilon/B_0(L)$, z_2 равным L , а F - константе $\Lambda_0 \sim \ln(L^2/r^2) \gg 1$ (см. [2]), так что дрейфовые поверхности захваченных ионов не будут зависеть от ϵ и μ . Заметим, что J_0 не

зависит от γ , ψ и не влияет поэтому на форму магнитных поверхностей $J = \text{const}$. Подставляя в (п.9), (п.10) выражения для магнитного поля (п.1), (п.4) и выражая γ , ψ через γ_0, ψ_0 , получим

$$J_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} r_0^2 (\bar{\eta} + \bar{\gamma}) (1 + \bar{\xi} \cos(2\psi_0)) \sim \sigma L \frac{r_0^2}{L^2} \quad (\text{п.10})$$

$$J_2 = -\Lambda_0 \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} L r_0^2 (\eta + \gamma) (1 + \xi \cos(2\psi_0)) \sim \Lambda_0 \sigma L \frac{r_0^2}{L^2}, \quad (\text{п.11})$$

где η, γ, ξ задаются формулами (п.5), а

$$\bar{\eta} = \frac{B_0(0)}{B_0(L)} \int_0^L \frac{dz}{(1 - \frac{B_0(z)}{B_0(L)})^{1/2}} \left\{ (F_1(z) - F_3(z)) e^{-\Phi(z)} + F_3(L) e^{-\Phi(L)} \right\} + \delta \quad (\text{п.12})$$

$$\bar{\gamma} = \frac{B_0(0)}{B_0(L)} \int_0^L \frac{dz}{(1 - \frac{B_0(z)}{B_0(L)})^{1/2}} \left\{ (F_2(z) - F_4(z)) e^{\Phi(z)} + F_4(L) e^{\Phi(L)} \right\} - \delta$$

$$\delta = \left(1 - \frac{B_0(0)}{B_0(L)}\right)^{1/2} \left(\frac{b_0(0)}{B_0(0)} - \frac{b_0''(0)}{2B_0(0)} - \frac{4b_0^3(0)}{B_0^3(0)B_0''(0)} \right) \quad (\text{п.13})$$

$$F_1(z) = \left(\frac{B_0(L)}{B_0(z)} - 1 \right) \left(\frac{b_0^2(z)}{B_0^2(z)} + \frac{B_0'(z)}{16B_0^2(z)} + \frac{b_0(z)B_0'(z)}{2B_0^2(z)} \right)$$

$$F_2(z) = \left(\frac{B_0(L)}{B_0(z)} - 1 \right) \left(\frac{b_0^2(z)}{B_0^2(z)} + \frac{B_0'(z)}{16B_0^2(z)} - \frac{b_0(z)B_0'(z)}{2B_0^2(z)} \right) \quad (\text{п.14})$$

$$F_3(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{B_0'(z)}{8B_0^2(z)} + \frac{2b_0^2(z)}{B_0^2(z)} - \frac{B_0''(z)}{4B_0(z)} + \frac{b_0(z)B_0'(z)}{B_0^2(z)} - \frac{b_0'(z)}{B_0(z)} \right)$$

$$F_4(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{B_0'(z)}{8B_0^2(z)} + \frac{2b_0^2(z)}{B_0^2(z)} - \frac{B_0''(z)}{4B_0(z)} - \frac{b_0(z)B_0'(z)}{B_0^2(z)} + \frac{b_0'(z)}{B_0(z)} \right)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{\eta} - \bar{\gamma}}{\bar{\eta} + \bar{\gamma}} \quad (\text{п.15})$$

Сравнивая J_1 и J_2 из (п.10), (п.11) с (п.4) видим, что дрейфовые оболочки захваченных ионов с точностью до членов порядка Λ_0^{-1} совпадают с магнитными поверхностями $B_{\text{max}} = \text{const}$ (что было качественно показано также в работе [2]). Учитывая теперь в $J = J_1 + J_2$ члены порядка Λ_0^{-1} , получим

$$J = -\Lambda_0 \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} L r_0^2 (\eta + \gamma) (1 + \xi \cos(2\psi_0)) = \text{const}, \quad (\text{п.16})$$

где

$$\xi_0 = \xi \left(1 + \frac{2\alpha}{\Lambda_0}\right), \quad \alpha = \frac{\bar{\gamma}\eta - \bar{\gamma}\bar{\eta}}{(\eta^2 - \gamma^2)L} \quad (\text{п.17})$$

Из анализа соотношений между ξ_0 и ξ следует, что форма пересечений магнитных поверхностей $J = \text{const}$ и $B_{\text{max}} = \text{const}$ такова, что если $|\xi| < 1, \alpha > 0$ (см.рис.3а) или $|\xi| > 1, \alpha \xi > 0$, то дрейфовые поверхности захваченных ионов пересекают диафрагму, а если $|\xi| < 1, \alpha < 0$ (см.рис.3б) или $|\xi| > 1, \alpha \xi < 0$, то не пересекают ее.

Вычислим поток захваченных ионов на диафрагму Q для случая, изображенного на рисунке 3а. Т.к. окружность радиуса r в соленоидальной части центральной ловушки, спроектированная вдоль силовых линий в медианную плоскость концевой пробкотрона, переходит в окружность радиуса $r \cdot (B_0(z_1)/B_0(0))^{1/2}$ (см.рис.6), то n и T в (16) имеют вид:

$$n(r, \psi_0) = n\left(r_0 \sqrt{\frac{B_0(0)}{B_0(z_1)}}\right), \quad T(r, \psi_0) = T\left(r_0 \sqrt{\frac{B_0(0)}{B_0(z_1)}}\right) \quad (\text{п.18})$$

Дрейфовая поверхность захваченных ионов, ограничивающая область, из которой захваченные ионы не достигают диафрагмы (сечение этой поверхности медианной плоскостью крайнего пробкотрона представляет собой заштрихованный эллипс на рис.3а), можно для удобства вычислений отождествить с магнитной оболочкой $B_{\text{max}} = \text{const}$, которая касается диафрагмы. Тогда интегрирование в (16) по ψ_0 приводит к

$$Q = \frac{48c}{e B_0(L)} (\gamma \bar{\eta} - \bar{\gamma} \eta) \frac{n}{\eta - \gamma} \cdot \int_{\Gamma_d \frac{\gamma}{\eta}}^{\Gamma_d} n\left(r_0 \sqrt{\frac{B_0(0)}{B_0(z_1)}}\right) T\left(r_0 \sqrt{\frac{B_0(0)}{B_0(z_1)}}\right) \left(1 - \frac{\Gamma_d^2 \gamma}{r_0^2 \eta}\right) r_0^3 dr_0. \quad (\text{п.19})$$

Мы здесь предполагали, что $\eta > \gamma$. Не представляет труда, очевидно, получить аналогичное выражение для Q в случае разомкнутых дрейфовых траекторий захваченных частиц.

Л и т е р а т у р а

1. D.D. Ryutov. Proc. of the 1979 Varenna School on Plasma Physics., V.1, p. 80 (1980).
2. Л.С.Пеккер. Препринт ИЯФ СО АН СССР 81-44 (1981).
3. Г.И.Димов, Г.В.Росляков. Препринт ИЯФ СО АН СССР 80-152 (1980).
4. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев. В сборнике "Вопросы теории плазмы", вып.2 (1976).
5. Д.Д.Рютов. Физика плазмы, 5, № 6 (1979).
6. Д.Д.Рютов, Г.В.Стулаков. Физика плазмы, 4, 501 (1978).

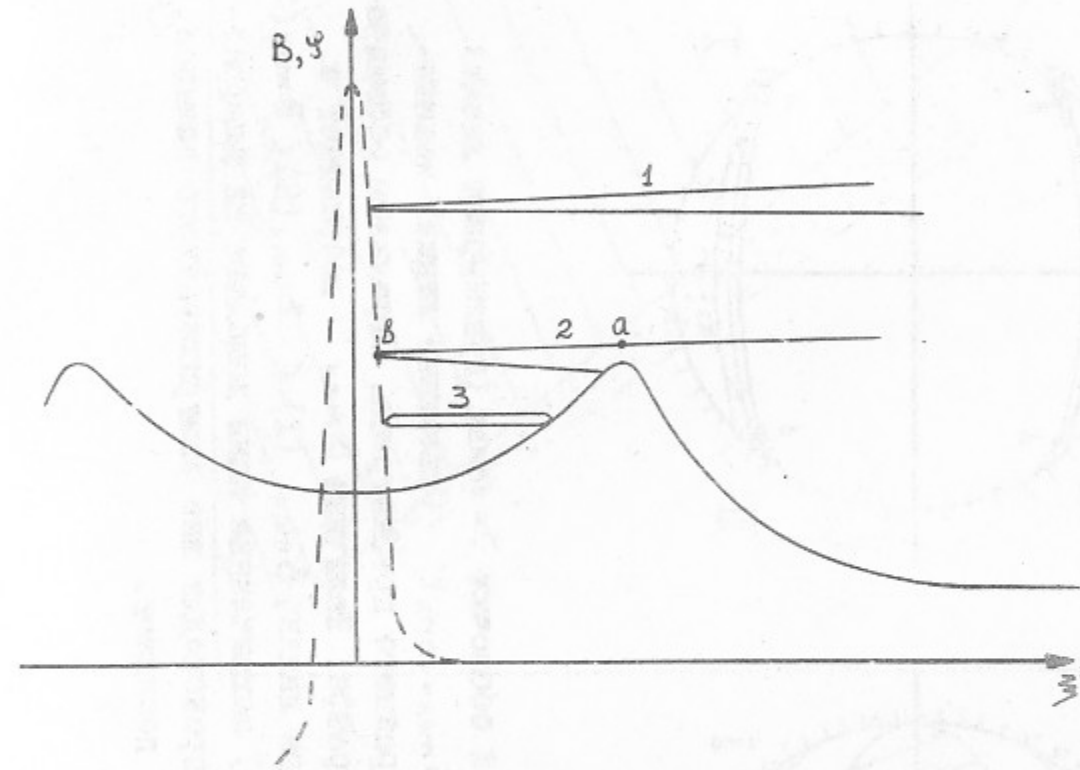


Рис. I. Зависимость магнитного поля (сплошная линия) и потенциала (пунктирная линия) вдоль силовой линии амбиполярной ловушки. Траектория I показывает движение пролетного, а траектория 3 - захваченного иона. Траектория 2 иллюстрирует бесстолкновительный захват.

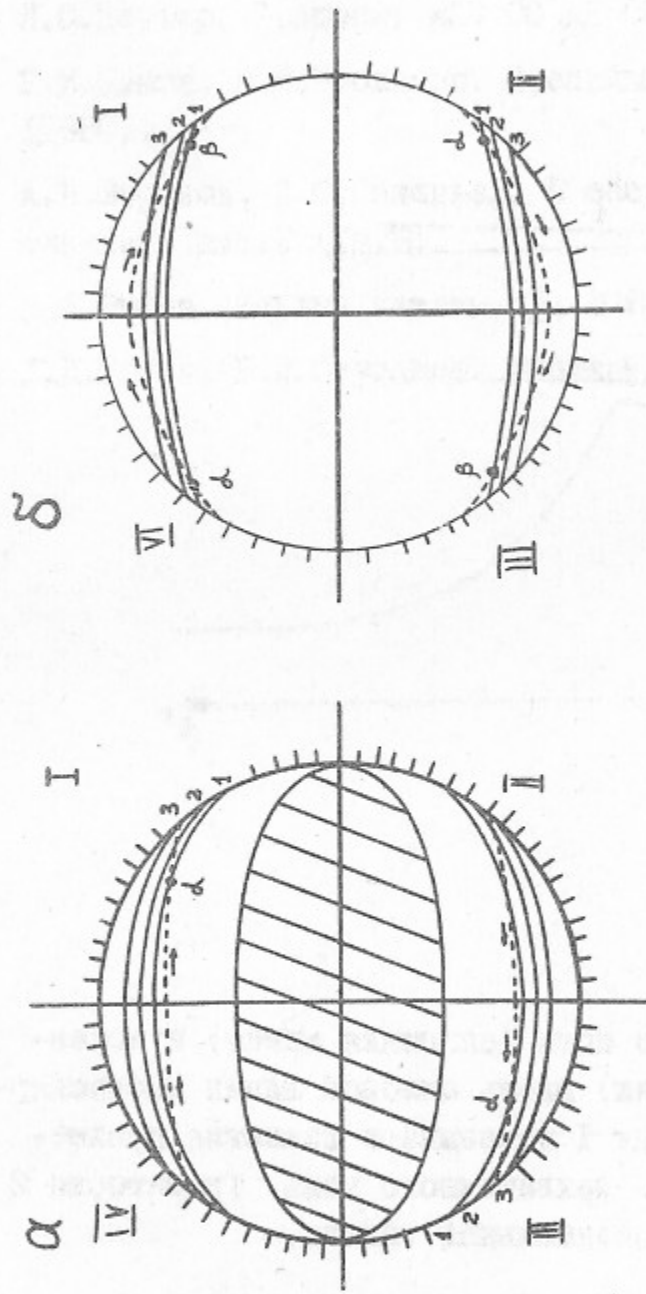


Рис.2. Сечения дрейфовой оболочки $\dot{J} = \text{const}$ (пунктирная линия) и поверхностей $V_{\text{max}} = \text{const}$ (сплошные линии) meridionalной плоскости крайнего прожектрона. Стрелками обозначены направления дрейфа. Величина V_{max} возрастает с увеличением номера линии, $V_{\text{max}}(1) < V_{\text{max}}(2) < V_{\text{max}}(3)$. В случае а) захваченные ионы попадают за диафрагму, если захват происходит вне заштрихованного эллипса, в случае б) - не попадают.

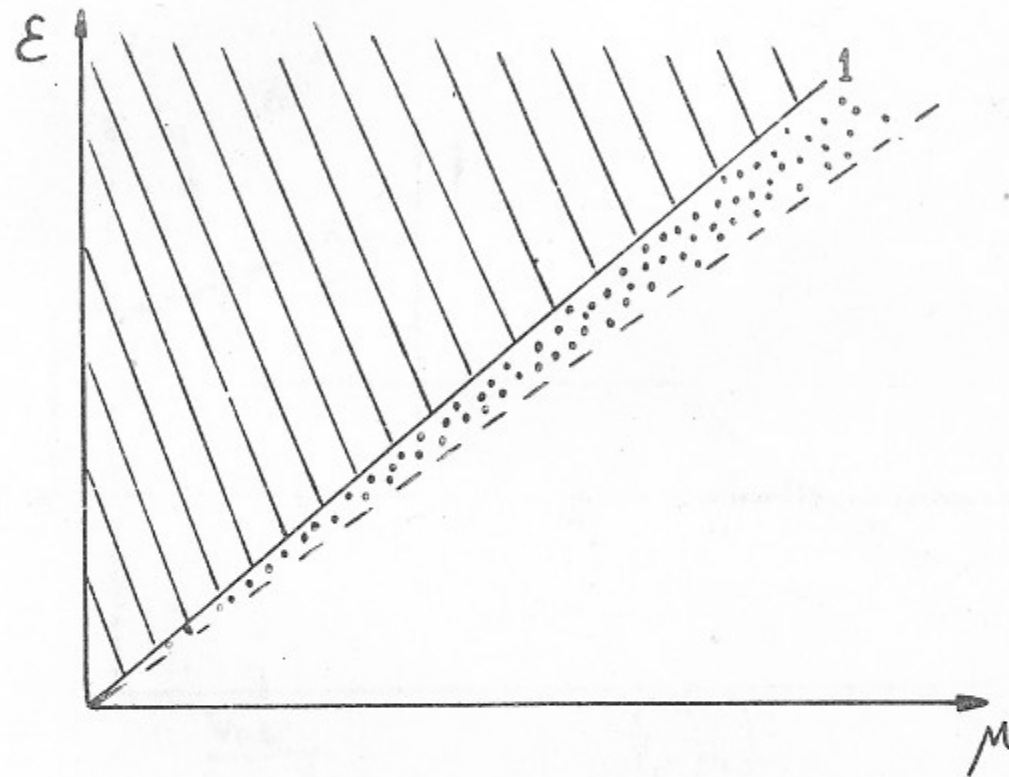


Рис.3. Фазовая плоскость в переменных ϵ, μ . Прямая I - граница захвата $\epsilon = \mu V_{\text{max}}$, выше нее находятся пролетные частицы (заштрихованная область). Область захваченных частиц помечена точками.

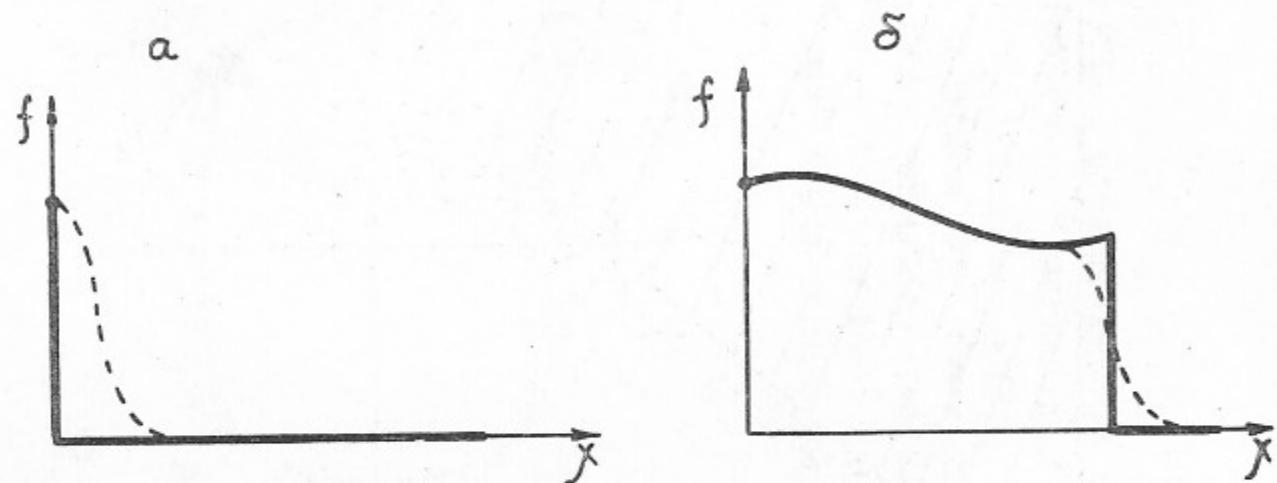


Рис.4. Зависимость f от x при фиксированных значениях ξ^1 , η , ε . Сплошная линия - решение уравнения (25), пунктир показывает, как изменится решение при учете столкновений. Рис. а) соответствует $\dot{x} < 0$, б) $-\dot{x} > 0$

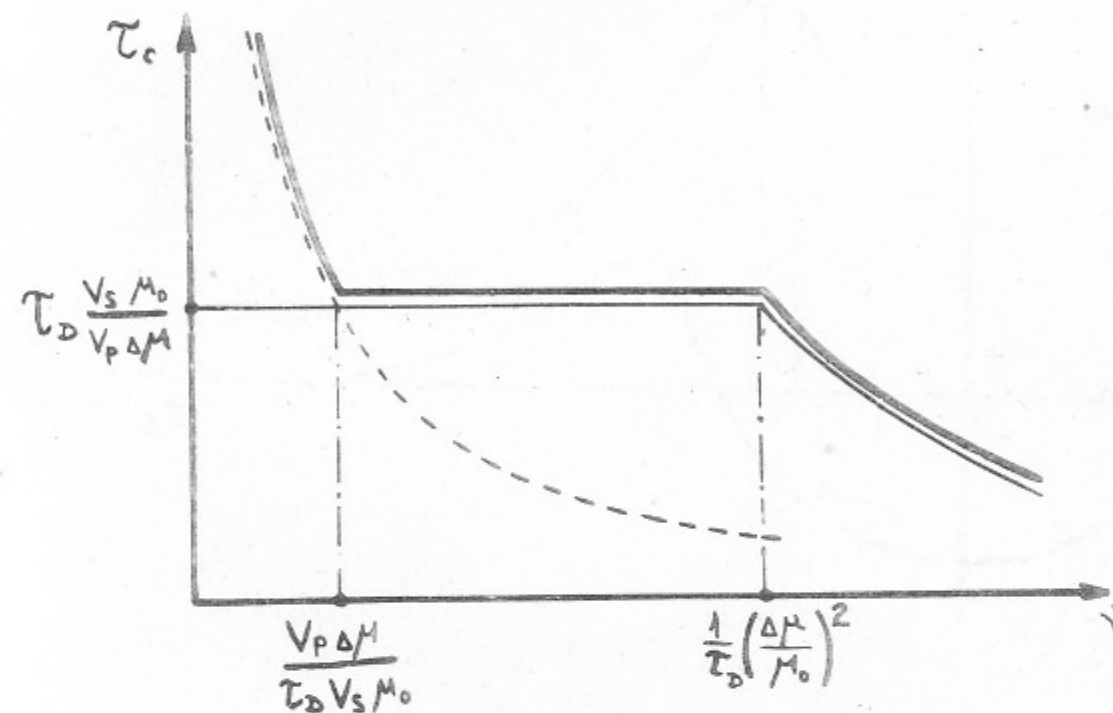


Рис.5. Качественная зависимость времени удержания плазмы от частоты столкновений. Тонкая сплошная линия соответствует формулам (8) и (29), пунктир - $\tau_c = 1/\nu$ и сплошная жирная линия - результирующему графику $\tau_c(\nu)$.

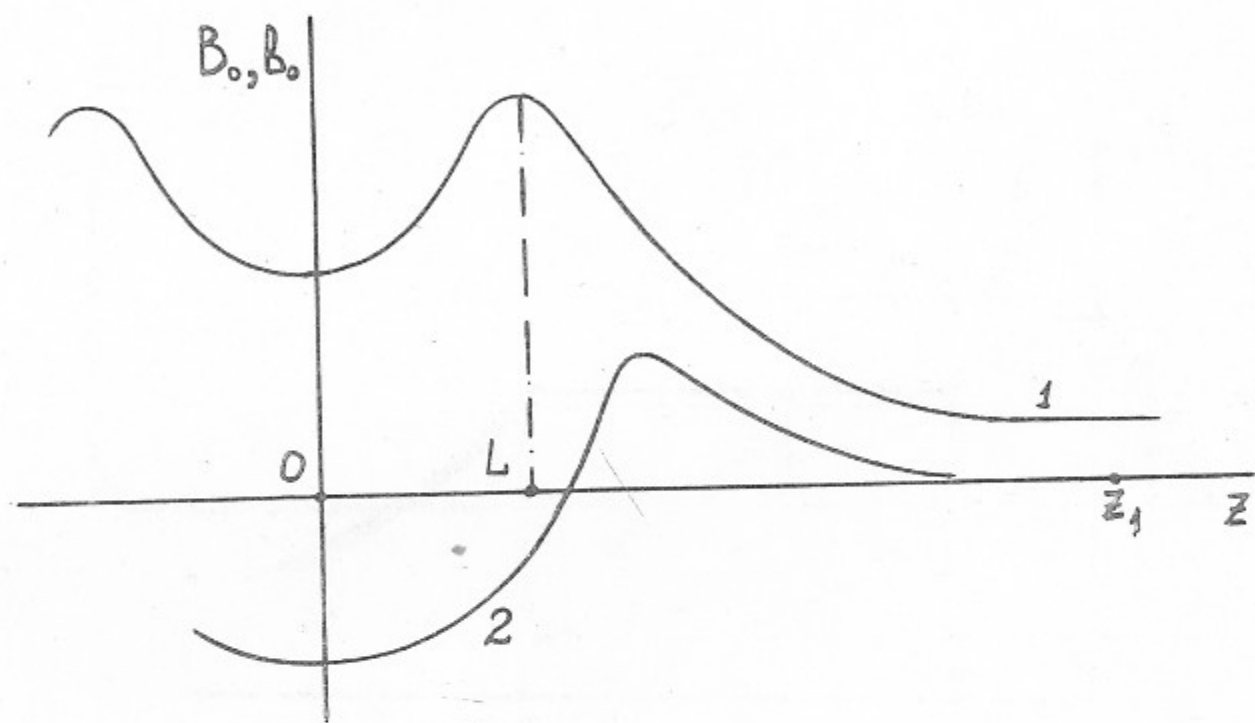


Рис. 6. Качественная зависимость B_0 (кривая 1) и V_0 (кривая 2) от z . $2L=L_p$ - длина крайнего пробкотрона.