

24

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

М.С. Пеккер, В.Н. Худик

КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

ПРЕПРИНТ 82-109



Новосибирск

КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ФОККЕРА-ПЛАНКА

М.С.Пеккер, В.Н.Худик

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

В данной работе построены полностью консервативные, т.е. сохраняющие число частиц, энергию и импульс разностные схемы для трехмерного уравнения Фоккера-Планка. Рассмотрены также схемы, сохраняющие только энергию и число частиц. Построена полностью консервативная разностная схема, не нарушающая закона возрастания энтропии замкнутой системы, справедливого для уравнения Фоккера-Планка.

КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

М. С. Пеккер, В. Н. Худик

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений, описывающих изменение состояния физической системы, приводит, вообще говоря, к нарушению присущих этой системе физических законов сохранения. Энергия замкнутой системы, например, при использовании "небрежной" разностной схемы не остается постоянной и может в процессе счета существенно отклониться от начального значения. Схемы, которые не приводят к нарушению некоторого закона сохранения, называются консервативными по отношению к этому закону сохранения.

Физические законы можно с самого начала вполне корректно формулировать не на языке дифференциальных, а на языке разностных уравнений. Трудность в построении консервативных схем носит, в основном, формальный характер, и задачей здесь является построение оптимальных схем, наиболее соответствующих той или иной постановке физической задачи. Ниже, следуя Попову, Самарскому [1,2] будем называть разностные схемы полностью консервативными если для них выполняются все разностные аналоги законов сохранения, присущих аппроксимируемому дифференциальному уравнению.

Консервативные разностные схемы для одномерного уравнения Фоккера-Планка, описывающего систему заряженных частиц, были рассмотрены в работе [3]. В [4] была показана неудовлетворительность применения неконсервативных разностных схем при расчете параметров модифицированной магнитной ловушки. Консервативная разностная схема для двумерного уравнения Фоккера-Планка в приложении к задаче о магнитной ловушке была построена в [5] и с большей общностью в [6].

В данной работе нами построены полностью консервативные, т.е. сохраняющие число частиц, энергию и импульс разностные схемы для трехмерного уравнения Фоккера-Планка. Рассмотрены также схемы, сохраняющие только энергию и число частиц. Построена полностью консервативная разностная схема, не нарушающая закона возрастания энтропии замкнутой системы, справедливого

для уравнения Фоккера-Планка.

Имея цель построить полностью консервативную схему, удобно уравнение Фоккера-Планка выписать в прямоугольных координатах (в безразмерных переменных) в виде [7]:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left[-\frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} f \right) \right]$$

Здесь G и H - потенциалы Розенблута:

$$(2) \quad G = \int f(\vec{v}') |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}', \quad H = 2 \int f(\vec{v}') |\vec{v} - \vec{v}'|^{-1} d\vec{v}'$$

Во избежание громоздкости мы ограничились моделью однокомпонентной плазмы и считаем, что в пространстве скоростей отсутствуют внешние источники и области стока. Выпишем также в явном виде производные от G и H :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} = \int f(\vec{v}') \frac{\delta_{\alpha\beta} (\vec{v} - \vec{v}')^2 - (v_{\alpha} - v'_{\alpha})(v_{\beta} - v'_{\beta})}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} d\vec{v}'$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} = -2 \int f(\vec{v}') \frac{(v_{\alpha} - v'_{\alpha})}{|\vec{v} - \vec{v}'|^3} d\vec{v}'$$

и введем обозначение для вектора потока частиц в пространстве скоростей:

$$S_{\alpha} = - \left[-\frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} f + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial v_{\beta}} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} f \right) \right]$$

Во всех формулах каждый из индексов α, β, j пробегает значения x, y, z .

В данной работе мы рассматриваем только дивергентные формы записи уравнения Фоккера-Планка ($\partial f / \partial t = \text{div}_{\vec{v}} \vec{S}$); соответствующие этим формам разностные схемы всегда сохраняют число частиц.

Приведем несложные выкладки, посредством которых показывается сохранение энергии для уравнения Фоккера-Планка, записанного в форме (1).

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} f v^2 d\vec{v} = -\frac{1}{2} \int \vec{v}^2 \sum_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial v_{\alpha}} d\vec{v} = \sum_{\alpha} \int v_{\alpha} S_{\alpha} d\vec{v} -$$

$$-\frac{1}{2} \int \sum_{\alpha} \vec{v}^2 S_{\alpha} d\vec{v} = \int \left(\sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} + \frac{1}{2} \Delta G \right) f d\vec{v} -$$

$$-\frac{1}{2} \int \vec{v}^2 S_{\alpha} d\vec{v} - \frac{1}{2} \int \sum_{\alpha, \beta} f v_{\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} d\vec{v} = \int \left(\sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} + \frac{1}{2} H \right) f d\vec{v}$$

Здесь учтено равенство $\Delta G = H$ и равенство нулю интегралов по бесконечно удаленной поверхности Γ . В равенстве нулю последнего интеграла в цепочке (4) для произвольной функции f легко убедиться подстановкой значений H и $\partial H / \partial v_{\alpha}$ из (2) и (3).

Аналогично показывается сохранение импульса в произвольном направлении

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int f v_{\alpha} d\vec{v} = \int \frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} f d\vec{v} = 0$$

Разностная схема с постоянным шагом h , одним и тем же для переменных v_x, v_y, v_z , ($v_{\alpha}(i+1) = v_{\alpha}(i) + h$), и шагом τ по времени, прямо соответствующая форме уравнения (1) имеет вид:

$$(6) \quad (f)_t = \sum_{\alpha, \beta} \left(-\frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} f + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}} f \right)_{\beta} \right)_{\alpha}$$

где $(u)_h$ означает разностную производную u по скорости v_{α} , например:

$$(u)_x = (u(v_x + h, v_y, v_z) - u(v_x - h, v_y, v_z)) / (2h)$$

$(f)_t$ означает разностную производную по времени $(f)_t = (f(t+\tau) - f(t)) / \tau$

Будет ли эта схема консервативна зависит от того, каким образом мы определим производные $\partial H / \partial v_{\alpha}$ и $\partial^2 G / \partial v_{\alpha} \partial v_{\beta}$. В самом деле, проводя выкладки, аналогичные (4) и (5), получим выражения для изменения энергии и импульса во времени:

$$\left(\sum_{\vec{v}} \frac{1}{2} f v^2 h^3 \right)_t = \sum_{\vec{v}} \left(\sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} + \frac{1}{2} \Delta G \right) f h^3$$

$$\left(\sum_{\vec{v}} f v_{\alpha} h^3 \right)_t = \sum_{\vec{v}} \left(\frac{\partial H}{\partial v_{\alpha}} f h^3 \right)$$

Равенство нулю правых частей можно во всяком случае обеспечить, если вычислять производные $\frac{\partial H}{\partial v_\alpha}$ и $\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}$ как разностную аппроксимацию интегралов (3). При таком определении этих производных схема (6) будет полностью консервативной, т.е. сохраняющей число частиц, энергию и импульс.

Подобным же образом строятся консервативные разностные схемы и для других форм записи уравнений Фоккера-Планка. Повторяя для разностной схемы выкладки, которыми показывается сохранение энергии (импульса) для данной формы дифференциального уравнения, мы определяем такой способ вычисления потенциалов и их производных, который обеспечивает консервативность соответствующей схемы по отношению к энергии (импульсу).

Счет по любой разностной схеме, аппроксимирующей трехмерное уравнение Фоккера-Планка, требует значительного объема вычислений для нахождения значений трехмерных интегралов, определяющих потенциалы Розенблота (или их производные), в каждой точке разностной сетки V_x, V_y, V_z . Так, для схемы (6) число таких интегралов равно девяти. Простым видоизменением уравнения (I):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left[-\frac{\partial H}{\partial v_\alpha} f + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial v_\beta} (\delta_{\alpha\beta} H f) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} f - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \Delta G f \right) \right]$$

можно для соответствующей полностью консервативной разностной схемы уменьшить количество вычисляемых интегралов до пяти (для вычисления $G, H, \frac{\partial H}{\partial v_\alpha}$).

Для решения задач, в которых физически важным является сохранение только энергии и числа частиц, можно построить более экономичную разностную схему. Придадим уравнению (I) следующую форму:

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left[-\frac{v_\alpha}{v^2} \left(v_\beta \frac{\partial H}{\partial v_\beta} + \frac{1}{2} H \right) f + \frac{1}{2} \frac{v_\alpha}{v^2} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} v_\gamma f \right) + \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} \frac{\partial f}{\partial v_\gamma} - \frac{\partial^3 G}{\partial v_\beta \partial v_\gamma^2} f \right) \right]$$

При написании этого уравнения мы представили \vec{S} в виде суммы

$\vec{S} = \vec{S}_{||} + \vec{S}_\perp$, где $\vec{S}_{||} = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{S})/v^2$, $\vec{S}_\perp = \vec{S} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{S})/v^2$. В $\vec{S}_{||}$ мы в явном виде выделили член, стоящий под знаком последнего интеграла в (4). Введя обозначение:

$$(8) \quad \tilde{H} = \sum_{\beta} v_\beta \frac{\partial H}{\partial v_\beta} + \frac{1}{2} H = \int (v^2 - v'^2) / |\vec{v} - \vec{v}'|^3 f(\vec{v}') d\vec{v}'$$

напишем, например, такую, соответствующую уравнению (7), разностную схему \ddagger)

$$(9) \quad (f)_t = \sum_{\alpha\beta\gamma} \left(-\frac{v_\alpha}{v^2} \tilde{H} f + \frac{1}{2} \frac{v_\alpha}{v^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\beta \partial v_\gamma} v_\delta f \right)_\beta + \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{v^2} \right) \times \left(\frac{\partial^2 G}{\partial v_\beta \partial v_\gamma} (f)_\gamma - \frac{\partial^3 G}{\partial v_\beta \partial v_\gamma^2} f \right) \right)_\alpha$$

Для того, чтобы схема (9) сохраняла энергию, достаточно, чтобы функция \tilde{H} вычислялась как разностная аппроксимация интеграла (8). Все производные потенциала G в (9) можно вычислять как разностные производные G , так как способ их вычисления не влияет на консервативность этой схемы. Таким образом, при счете по схеме (9) требуется вычисление лишь двух трехмерных интегралов: G и \tilde{H} .

Уравнение (7) удобно для построения консервативной разностной схемы в криволинейных координатах X^1, X^2, X^3 . Перепишав это уравнение в ковариантных обозначениях, выпишем разностную схему, сохраняющую энергию и число частиц, аналогичную схеме (9):

$$(10) \quad (f)_t = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \left(-\frac{v^\alpha}{v} \sigma \tilde{H} f + \frac{1}{2} \frac{v^\alpha}{v} \sigma \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} G_{,\beta}^{\alpha\delta} v^{\gamma\beta} f \right)_\gamma + \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta} - v^{\alpha\gamma} v^{\beta\gamma} \sigma^\beta \right) \left(G_{,\beta}^{\alpha\delta} (f)_\gamma - G_{,\gamma,\beta}^{\alpha\delta} f \right) \right) \right)_\alpha$$

\ddagger) Схема (9) в каждом направлении α ($\alpha = X, Y, Z$) зацепляет значение f в пяти точках $i+2, i+1, i, i-1, i-2$. Нетрудно написать трехточечную консервативную схему; при ее получении следует использовать и полуцелые точки сетки. Ввиду громоздкости мы эту схему не приводим.

Здесь множители

$$\sigma = 2V / \left(\sum_{\alpha} (V^2)_{\alpha} V^{\alpha} \right), \quad \sigma^{\beta} = \left(\sum_{\alpha} (V^2)_{\alpha} g^{\alpha\beta} \right) / \left(\sum_{\alpha} (V^2)_{\alpha} V^{\alpha} V^{\beta} \right)$$

отличающиеся от единицы на величину порядка h^2 , являются перенормировочными (они точно равны единице в прямоугольной системе координат); $g^{\alpha\beta}$ - контравариантный метрический тензор, соответствующий данным криволинейным координатам, запятая с индексом снизу, как обычно, означает ковариантное, а сверху - контравариантное дифференцирование; скобка с индексом $()_{\alpha}$ - разностную производную по X^{α} . Функции V^{α} и коэффициенты связности в контра- и ковариантных производных вычисляются аналитически, дифференцирование потенциала G производится разностным способом.

Описанные разностные схемы являются явными, однако не представляет труда перейти к неявным схемам. В этом случае использование метода дробных шагов [8] в совокупности с итерационной процедурой вычисления коэффициентов уравнения обеспечивает полную консервативность разностной схемы и, таким образом позволяет эффективно решать многомерные уравнения Фоккера-Планка.

В аксиально-симметричном случае в переменных V, μ, φ ($\mu = \cos(\theta)$, зависимость от φ отсутствует) уравнение (7) принимает форму, которая была получена ранее в работах [5], [6]:

$$(II) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial V} W + \frac{1}{V^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[A \frac{\partial f}{\partial \mu} + B \frac{\partial f}{\partial V} + C f \right]$$

Здесь

$$W = -V \tilde{H} f + \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial V^2} V^3 f \right)$$

$$A = \frac{1-\mu^2}{2} \left[\frac{1}{V} \frac{\partial G}{\partial V} - \frac{\mu}{V^2} \frac{\partial G}{\partial \mu} + \frac{1-\mu^2}{V^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \mu^2} \right]$$

$$B = V(1-\mu^2) \frac{\partial^2}{\partial V \partial \mu} \left(\frac{G}{V} \right), \quad C = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial V} - \frac{(1-\mu^2)}{2} \frac{\partial H}{\partial \mu}$$

Функции G и H определяются двумерными интегралами по формулам (2), (8), в которых после перехода к сферическим переменным проводится аналитическое интегрирование по циклической переменной φ , подобно тому как это сделано в [5]. Соответ-

ствующая уравнению (II) разностная схема сохраняет энергию и число частиц, импульс же вдоль оси симметрии при счете по этой схеме, вообще говоря, не сохраняется^{ж)}. (Вопроса о сохранении компонент импульса, перпендикулярных оси симметрии, не возникает; они тождественно равны нулю).

Функции G и H можно также вычислять, используя их разложение в ряд по полиномам Лежандра $P_{\ell}(\mu)$. Разложение H имеет вид:

$$(I2) \quad \tilde{H}(V, \mu) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[V^{\ell} \int_V^{\infty} f_{\ell}(V') V'^{1-\ell} dV' - V^{-(\ell-2)} \int_0^V f_{\ell}(V') V'^{2+\ell} dV' \right]$$

$$\text{Здесь: } f_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 f(V, \mu) P_{\ell}(\mu) d\mu$$

Разложение $G(V, \mu)$ по полиномам Лежандра см., например, в [7]. Вместо рядов, определяющих функции G и H , будем рассматривать их приближения конечными суммами G_L и H_L (L - число удерживаемых членов в соответствующих разложениях). При подстановке G_L и H_L в дифференциальное уравнение (II) получится приближенное дифференциальное уравнение, которое также сохраняет энергию и число частиц. Это приближенное уравнение является исходным при построении разностной схемы. Для консервативности схемы нужно интегралы, входящие в коэффициенты разложения функции H заменить на суммы.

При расчетах число удерживаемых членов в разложении не должно превосходить числа точек сетки по μ ($L \leq \pi/h_{\mu}$, h_{μ} - шаг сетки по μ). Однако, при решении конкретных физических задач^{жж)} нередка ситуация, когда для хорошей точности в вычислениях функции распределения f достаточно удержать лишь несколько первых членов ($L = 2, 4$) в разложении G и H . В этом случае

ж) Авторами работ [5], [6] предложенные ими схемы названы полностью консервативными, они, однако, в общем случае таковыми не являются. В этих схемах импульс вдоль оси симметрии сохраняется только, если функция распределения f является четной функцией μ : $f(V, \mu) = f(V, -\mu)$ (импульс в этом случае равен нулю).

жж) Метод вычисления G и H разложением в ряд по полиномам Лежандра применялся в работе [9] при расчете параметров плазмы в магнитной ловушке.

нахождение функций G и \tilde{H} методом разложения по полиномам Лежандра существенно эффективнее их вычисления через двумерные интегралы.

До сих пор мы рассматривали разностные схемы с точки зрения их консервативности. Ниже мы приведем разностную схему, которая, являясь полностью консервативной, вместе с тем не нарушает закона возрастания энтропии замкнутой системы, справедливого для уравнения Фоккера-Планка.

Будем исходить из уравнения Фоккера-Планка в форме Ландау отличающегося от уравнения (I) формой записи вектора потока частиц [7]:

$$(I3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \int \left(\frac{\partial f(\vec{v}')}{\partial v_{\beta}} f(\vec{v}') - \frac{\partial f(\vec{v})}{\partial v_{\beta}'} f(\vec{v}) \right) \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{(v_{\alpha} - v_{\alpha}')(v_{\beta} - v_{\beta}')}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2} \right) d\vec{v}'$$

Производя в этом уравнении замену $\frac{\partial f(\vec{v})}{\partial v_{\beta}} \rightarrow f(\vec{v}) \frac{\partial \ln f(\vec{v})}{\partial v_{\beta}}$ и выпишем искомую разностную схему:

$$(I4) \quad (f)_t = \sum_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_{\vec{v}} \left[\left(\frac{\partial \ln f(\vec{v})}{\partial v_{\beta}} \right) - \left(\frac{\partial \ln f(\vec{v}')}{\partial v_{\beta}'} \right) \right] f(\vec{v}) f(\vec{v}') / |\vec{v} - \vec{v}'| \cdot \left(\delta_{\alpha\beta} - (v_{\alpha} - v_{\alpha}')(v_{\beta} - v_{\beta}') / |\vec{v} - \vec{v}'|^2 \right) \right\} h^3$$

Схема (I4) является полностью консервативной, и при достаточно малом шаге по времени τ ($(f)_t \cdot \tau < f$) вычисленная для этой схемы разностная производная энтропии неотрицательна:

$$(S)_t = - \left(\sum_{\vec{v}} (f \ln f) h^3 \right)_t \geq 0$$

Прямой проверкой легко убедиться, что максимизирующая энтропию S максвелловская функция является точным стационарным решением разностного уравнения (I4).

Отметим, что в реальном вычислительном процессе область фазового пространства всегда ограничена некоторым размером.

* Заметим, что при построении различных консервативных разностных схем можно наравне с уравнением (I) в качестве исходного использовать уравнение (I3). Например, на основе этого уравнения в аксиально-симметричном случае можно построить полностью консервативную (сохраняющую и импульс вдоль оси симметрии) разностную схему (см. Приложение).

Учет этого обстоятельства приводит к экспоненциально малым потокам частиц, энергии и импульса через границы области. Замкнутость рассматриваемой системы можно однако восстановить формальным введением обрезающих функций. Достаточно, например, подинтегральное выражение (I3) домножить на функцию $\varphi(v) \cdot \varphi(v')$: $\varphi(v)$ всюду равна единице внутри области и плавно изменяется от единицы до нуля на ее границе.

В заключение мы хотим поблагодарить Н.Н. Яненко за полезные обсуждения и поддержку при выполнении этой работы.

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
ДЛЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

При построении полностью консервативной разностной схемы для аксиально симметричной задачи, т.е. схемы сохраняющей число частиц, энергию и импульс вдоль оси Z , будем исходить из уравнения (I3). В переменных V, μ, φ имеем (зависимость от аксиального угла φ отсутствует):

$$\frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [v(\vec{S} \cdot \vec{v})] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} [v S_z - \mu(\vec{S} \cdot \vec{v})], \quad (\text{II.1})$$

где

$$(\vec{S} \cdot \vec{v}) = \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial v f(\vec{v}, t)}{\partial v} - f(\vec{v}, t) \right) A(\vec{v}, \vec{v}') + \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial \mu} B(\vec{v}, \vec{v}') \right] f(\vec{v}', t) - \right.$$

$$\left. \left[\left(\frac{\partial v f(\vec{v}, t)}{\partial v} - f(\vec{v}, t) \right) A(\vec{v}, \vec{v}') + \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial \mu} B(\vec{v}, \vec{v}') \right] f(\vec{v}, t) \right\} v'^2 dv' d\mu' d\varphi',$$

$$S_z = \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial v f(\vec{v}, t)}{\partial v} - f(\vec{v}, t) \right) C(\vec{v}, \vec{v}') + \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial \mu} D(\vec{v}, \vec{v}') \right] f(\vec{v}', t) - \right. \quad (\text{II.2})$$

$$\left. \left[\left(\frac{\partial v f(\vec{v}, t)}{\partial v} - f(\vec{v}, t) \right) C(\vec{v}, \vec{v}') + \frac{\partial f(\vec{v}, t)}{\partial \mu} D(\vec{v}, \vec{v}') \right] f(\vec{v}, t) \right\} v'^2 dv' d\mu' d\varphi'$$

а $A(\vec{v}, \vec{v}')$, $B(\vec{v}, \vec{v}')$, $C(\vec{v}, \vec{v}')$, $D(\vec{v}, \vec{v}')$ соответственно равна:

$$A(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{v^2 v'^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}')^2}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2 v^2}, \quad B(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{[v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}')][v^2 v' \mu' - (\vec{v} \cdot \vec{v}') \mu v]}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2 v^3}$$

$$C(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\mu v v'^2 + \mu' v' v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}')(\mu v + \mu' v')}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2 v^2}$$

$$D(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{v^2 |\vec{v} - \vec{v}'|^2 (1 - \mu^2) - v^2 (\mu v - \mu' v')^2 + \mu v (\mu v - \mu' v') \cdot (v^2 - (\vec{v} \cdot \vec{v}'))}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2 v^3}$$

После проведения в (II.2) интегрирования по циклической переменной φ' величины $(\vec{S} \cdot \vec{v})$ и S_z будут определяться уже двумерными интегралами отличающимися от интегралов (II.2) заменой $A(\vec{v}, \vec{v}')$, $B(\vec{v}, \vec{v}')$, $C(\vec{v}, \vec{v}')$, $D(\vec{v}, \vec{v}')$ на $\tilde{A}(v, \mu; v', \mu')$, $\tilde{B}(v, \mu; v', \mu')$, $\tilde{C}(v, \mu; v', \mu')$, $\tilde{D}(v, \mu; v', \mu')$.

$$(\vec{S} \cdot \vec{v}) = \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial (v f(v, \mu, t))}{\partial v} - f(v, \mu, t) \right) \tilde{A}(v, \mu; v', \mu') + \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\left. + \frac{\partial f(v, \mu, t)}{\partial \mu} \tilde{B}(v, \mu; v', \mu') \right] f(v', \mu', t) - \left[\left(\frac{\partial (v' f(v', \mu', t))}{\partial v'} - f(v', \mu', t) \right) \tilde{A}(v', \mu'; v, \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(v', \mu', t)}{\partial \mu'} \tilde{B}(v', \mu'; v, \mu) \right] f(v, \mu, t) \right\} v'^2 dv' d\mu'$$

$$S_z = \int_0^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial (v f(v, \mu, t))}{\partial v} - f(v, \mu, t) \right) \tilde{C}(v, \mu; v', \mu') + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(v, \mu, t)}{\partial \mu} \tilde{D}(v, \mu; v', \mu') \right] f(v', \mu', t) - \left[\left(\frac{\partial (v' f(v', \mu', t))}{\partial v'} - f(v', \mu', t) \right) \tilde{C}(v', \mu'; v, \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(v', \mu', t)}{\partial \mu'} \tilde{D}(v', \mu'; v, \mu) \right] f(v, \mu, t) \right\} v'^2 dv' d\mu'$$

где

$$\tilde{A}(v, \mu; v', \mu') = \frac{2(v^2 v'^2)}{\delta v^2} K(x) - \frac{(v^2 - v'^2)^2 + \delta^4 (1 - x^2)}{\delta^3 (1 - x^2) v^2} E(x), \quad (\text{II.4})$$

$$\tilde{B}(v, \mu; v', \mu') = \frac{(v^2 - v'^2)(2vv'\mu' - \mu(v^2 + v'^2)) + \mu \delta^4 (1 - x^2)}{\delta^3 (1 - x^2) v^3} E(x) +$$

$$+ \frac{2(vv'\mu' - v'^2 \mu)}{\delta v^3} K(x),$$

$$\tilde{C}(v, \mu; v', \mu') = \frac{2(v^2 - v'^2)(v'\mu' - v\mu)}{\delta^3 (1 - x^2) v^2} E(x) + \frac{2(v\mu + v'\mu')}{\delta v^2} K(x),$$

$$\tilde{D}(v, \mu; v', \mu') = \frac{2(v\mu - v'\mu')(2vv'\mu' - (v^2 + v'^2)\mu)}{\delta^3 (1 - x^2) v^2} E(x) + \frac{2(2v - \mu(\mu v + \mu' v'))}{\delta v^2} K(x),$$

$$\chi^2 = 4VV'(1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}/\delta^2$$

$$\delta^2 = V^2 + V'^2 - 2VV'(\mu\mu' - (1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}),$$

$E(\chi), K(\chi)$ - эллиптические интегралы.

Отметим, что для $(\vec{S} \cdot \vec{v})$ и S_z вследствие антисимметричной зависимости подинтегральных выражений в (П.3) от V, μ и V', μ' справедливы равенства:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\tau} (\vec{S} \cdot \vec{v}) v^2 d\mu dv = 0 \quad (\text{П.5})$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\tau} S_z v^2 d\mu dv = 0$$

Искомая разностная схема легко получается аппроксимацией (П.1) и (П.3).

Введем равномерную разностную сетку по V, μ, t

$$(0 \leq V \leq V_0, -1 \leq \mu \leq 1, t \geq 0): v_{i+1/2} = (i+1/2)h_v, i=0,1,2,\dots,I-1;$$

$$\mu_j = j h_\mu, j = -J, -J+1, \dots, J-1, J; t_n = n \tau, n=0,1,2,\dots$$

Обозначая для упрощения записи $v(\vec{S} \cdot \vec{v})$ через R , а $v S_z - \mu(\vec{S} \cdot \vec{v})$ через P , определим на сетке сеточные функции $f_{i+1/2,j}^n, R_{i+1/2,j}^n, P_{i+1/2,j}^n$ как значения функций f, R, P в узлах сетки. Определяя вспомогательные функции

$$R_{i,j}^n = 1/2 (R_{i+1/2,j}^n + R_{i-1/2,j}^n) \text{ при } i \geq 1, R_{0,j} = 0,$$

$$P_{i+1/2,j+1/2}^n = 1/2 (P_{i+1/2,j}^n + P_{i+1/2,j+1}^n) \text{ при } |j| \leq J-1$$

будем иметь для внутренних точек ($|j| \leq J-1$)

$$\frac{f_{i+1/2,j}^{n+1} - f_{i+1/2,j}^n}{\tau} = \frac{1}{v_{i+1/2}^2} \left(\frac{R_{i+1/2,j}^n - R_{i,j}^n}{h_v} + \frac{P_{i+1/2,j+1/2}^n - P_{i+1/2,j-1/2}^n}{h_\mu} \right) \quad (\text{П.6})$$

для граничных точек

$$\frac{f_{i+1/2,\pm J}^{n+1} - f_{i+1/2,\pm J}^n}{\tau} = \frac{1}{v_{i+1/2}^2} \left(\frac{R_{i+1/2,\pm J}^n - R_{i,\pm J}^n}{h_v} + 2 \frac{P_{i+1/2,\pm(J-1/2)}^n}{h_\mu} \right) \quad (\text{П.7})$$

Закон сохранения числа частиц для нашей схемы выполняется автоматически^{*)}

$$\frac{\Delta N}{\tau} = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j \left(\frac{f_{i+1/2,j}^{n+1} - f_{i+1/2,j}^n}{\tau} \right) v_{i+1/2}^2 h_v h_\mu \quad (\text{П.8})$$

Введением функции

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{при } |j| \leq J-1 \\ 1/2 & \text{при } j = \pm J \end{cases} \quad (\text{П.9})$$

учтено то обстоятельство, что значения функции распределения при $j = \pm J$ входят в аппроксимацию двумерных интегралов с половинным весом.

Проверим выполнение закона сохранения энергии:

$$\frac{\Delta E}{\tau} = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j \left(\frac{f_{i+1/2,j}^{n+1} - f_{i+1/2,j}^n}{\tau} \right) v_{i+1/2}^4 h_v h_\mu = \quad (\text{П.10})$$

$$= -2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j R_{i,j}^n v_i h_v h_\mu = -2 \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j R_{i+1/2,j}^n v_{i+1/2} h_v h_\mu.$$

Последняя сумма будучи аппроксимацией первого интеграла в (П.5) равна нулю.

Проверим выполнение закона сохранения импульса:

$$\frac{\Delta P_z}{\tau} = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j \left(\frac{f_{i+1/2,j}^{n+1} - f_{i+1/2,j}^n}{\tau} \right) v_{i+1/2}^3 \mu_j h_v h_\mu = \quad (\text{П.11})$$

$$= - \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j R_{i,j}^n \mu_j h_v h_\mu - \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J P_{i+1/2,j+1/2}^n v_{i+1/2} h_v h_\mu$$

*) Здесь и ниже мы не следим за потоками на достаточно удаленной по модулю скорости границе. Мы считаем, что эти потоки равны нулю.

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j R_{i+1/2, j}^n M_j h_v h_m - \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j S_{2^{i+1/2}, j}^n V_{i+1/2}^2 h_v h_m$$

Последняя сумма в (П.11) является аппроксимацией второго интеграла в (П.9) равна нулю, а первая является величиной по крайней мере третьего порядка малости. Отличие первой суммы от нуля связано с тем, что $V = 0$ есть особая точка уравнения (П.1) и аппроксимация уравнения вблизи этой точки является "плохой".

Отметим, что введением источника импульса в разностное уравнение (П.6,7) вблизи $V = 0$ не нарушающего порядка аппроксимации легко добиться точного равенства нулю правой части (П.11).

Выпишем значения сеточных функций $S_{2^{i+1/2}, j}^n$, $R_{i+1/2, j}^n$, $P_{i+1/2, j}^n$:

$$S_{2^{i+1/2}, j}^n = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j \left\{ \left[\tilde{C}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{V_{i+1} f_{i+1, j}^n - V_i f_{i, j}^n}{h_v} - f_{i+1/2, j}^n \right) + \tilde{D}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{f_{i+1/2, j+1/2}^n - f_{i+1/2, j-1/2}^n}{h_m} \right) \right] f_{i+1/2, j}^n - \left[\tilde{C}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{V_{i+1} f_{i+1, j}^n - V_i f_{i, j}^n}{h_v} - f_{i+1/2, j}^n \right) + \tilde{D}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{f_{i+1/2, j+1/2}^n - f_{i+1/2, j-1/2}^n}{h_m} \right) \right] f_{i+1/2, j}^n \right\} V_{i+1/2}^2 h_v h_m,$$

$$R_{i+1/2, j}^n = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=-J}^J \varepsilon_j \left\{ \left[\tilde{A}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{V_{i+1} f_{i+1, j}^n - V_i f_{i, j}^n}{h_v} - f_{i+1/2, j}^n \right) + \tilde{B}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{f_{i+1/2, j+1/2}^n - f_{i+1/2, j-1/2}^n}{h_m} \right) \right] f_{i+1/2, j}^n - \left[\tilde{A}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{V_{i+1} f_{i+1, j}^n - V_i f_{i, j}^n}{h_v} - f_{i+1/2, j}^n \right) + \tilde{B}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} \left(\frac{f_{i+1/2, j+1/2}^n - f_{i+1/2, j-1/2}^n}{h_m} \right) \right] f_{i+1/2, j}^n \right\} V_{i+1/2}^2 h_v h_m,$$

$$P_{i+1/2, j}^n = V_{i+1/2} S_{0+1/2, j}^n - M_j R_{i+1/2, j}^n$$

Здесь $\tilde{A}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'} = \tilde{A}(V_{i+1/2}, M_j; V_{i+1/2}, M_{j'})$, аналогично определяются $\tilde{B}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'}$, $\tilde{C}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'}$, $\tilde{D}_{i+1/2, j}^{i+1/2, j'}$, $f_{i, j}^n = \frac{1}{2}(f_{i+1/2, j}^n + f_{i-1/2, j}^n)$

при $i \geq 1$; $f_{i+1/2, j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{i+1/2, j}^n + f_{i+1/2, j+1}^n)$

при $|j| \leq J-1$.

Отметим, что в граничных точках $\tilde{B}_{i+1/2, \pm J}^{i+1/2, j'}$, $\tilde{D}_{i+1/2, \pm J}^{i+1/2, j'}$ равны нулю.

Л и т е р а т у р а :

1. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, 9, № 4, 953-958.
2. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Разностные схемы газовой динамики, М., "Наука", 1975.
3. А.В.Бобылев, В.В.Чуянов. О численном решении кинетического уравнения Ландау. Ж. вычисл. матем. и математ. физики. 1976, 16, 407.
4. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. О точности численных расчетов потерь плазмы из открытых магнитных ловушек. В сб. "Численные методы механ. сплош. среды", 10, вып.1, 45, Новосибирск, Наука, 1979.
5. М.С.Пеккер. Полностью консервативная разностная схема для двумерного уравнения Фоккера-Планка. Препринт ИЯФ, 80-38.
6. Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Чуянов В.А. Законы сохранения и полностью консервативные схемы для кинетического уравнения типа Ландау (Фоккера-Планка). ДАН, 256, 1348, 1980.
7. Rosenbluth M. N., Mac-Donald W. M., Judd D. L. Fokker-Plank equation for an inverse-square force. Phys. Rev., 107, 1, 1957.
8. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", 1967.
9. V. I. Volosov, M. S. Pekker. Longitudinal plasma confinement in a centrifugal trap. Nucl. Fus., vol. 21, 1275, 1981.
10. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Физическая кинетика, стр.207, 1979.

М.С.Пеккер, В.Н.Худик

КОНСЕРВАТИВНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ФОККЕРА-ПЛАНКА

Препринт
№62-109

Работа поступила - 10 декабря 1981 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 9.09-1982 г. МН 17238
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл:1,1 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 109.

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90