

K.60

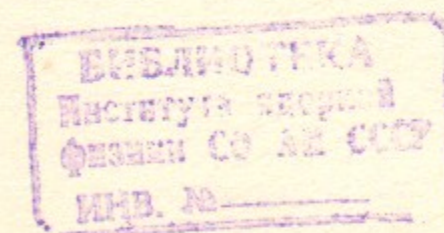
39

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

Г.М.Колачев

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
РАМ С УПОРАМИ

ПРЕПРИНТ 82-137



Новосибирск

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ  
РАМ С УПОРАМИ

Г. М. Колачев

Аннотация

Изложена методика расчета на прочность статически неопределимых прямоугольных рам с симметрично расположенными упорами, испытывающих равномерно распределенные нагрузки. Даны выражения, с помощью которых подбираются положение упоров и усилия на них, необходимые для обеспечения в допускаемых пределах нормальных и касательных напряжений в раме, возникающих от рабочих нагрузок. Приведены формулы для определения допустимых смещений упоров.

В детекторах элементарных частиц и магнитных системах ускорителей встречаются прямоугольные конструкции с нагрузками, равномерно распределенными по сторонам. К ним можно отнести, например, обмотки магнитов и рамки проволочных камер. Для удовлетворения специальных требований, предъявляемых к таким конструкциям, и обеспечения прочности приходится использовать упоры, расположенные по сторонам и ограничивающие деформации.

В данной работе рассмотрен метод расчета на прочность конструкций, схема которых может быть принята в виде прямоугольной рамы с упорами, представленной на рис.1. Нагрузки, действу-

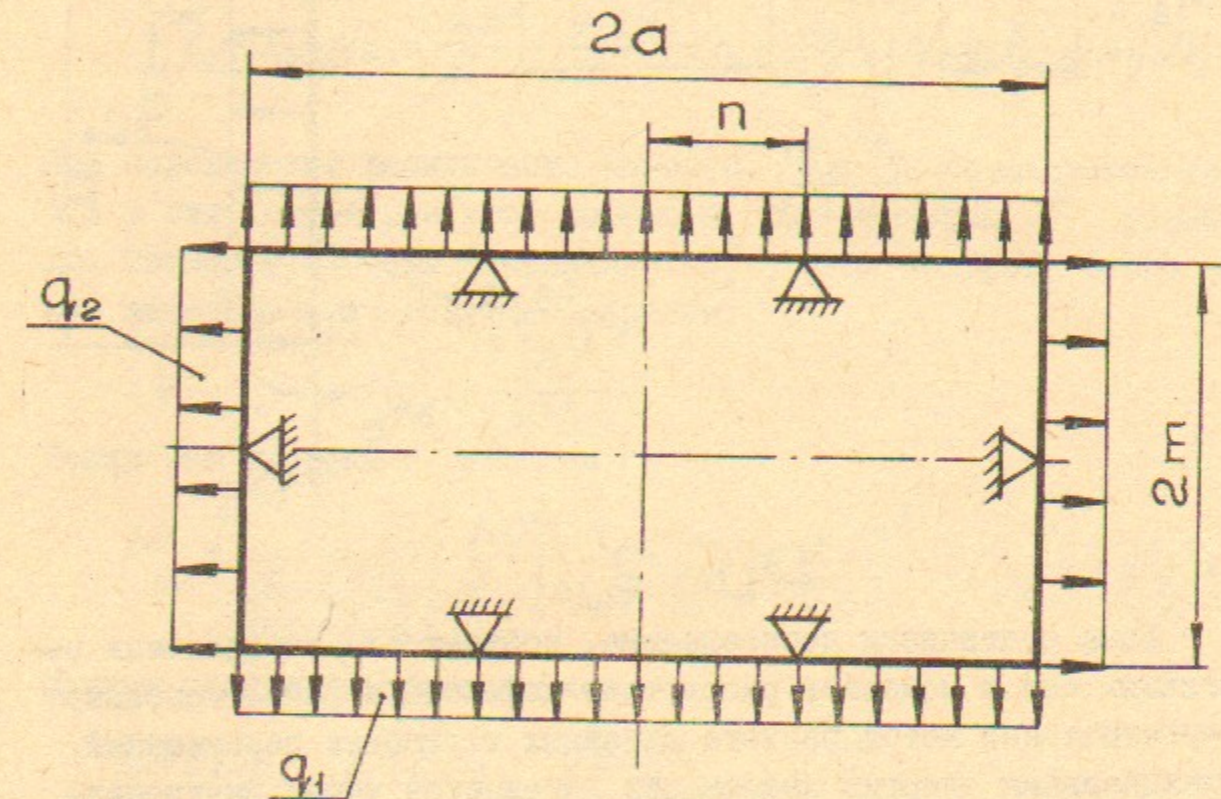


Рис.1

щие на раму, предполагаются попарно одинаковыми и равномерно распределенными вдоль сторон рамы.

В силу симметрии рассматривается лишь четверть рамы с заменой влияния отброшенных частей реактивными силами и моментами (рис.2). При этом в сечении А поперечная сила обращается в нуль [1].

Расчет выполнен при следующих предположениях:

а) напряжения и деформации связаны между собой законом Гука;

б) как для внутренних силовых факторов, так и для перемещений справедлив принцип суперпозиции.

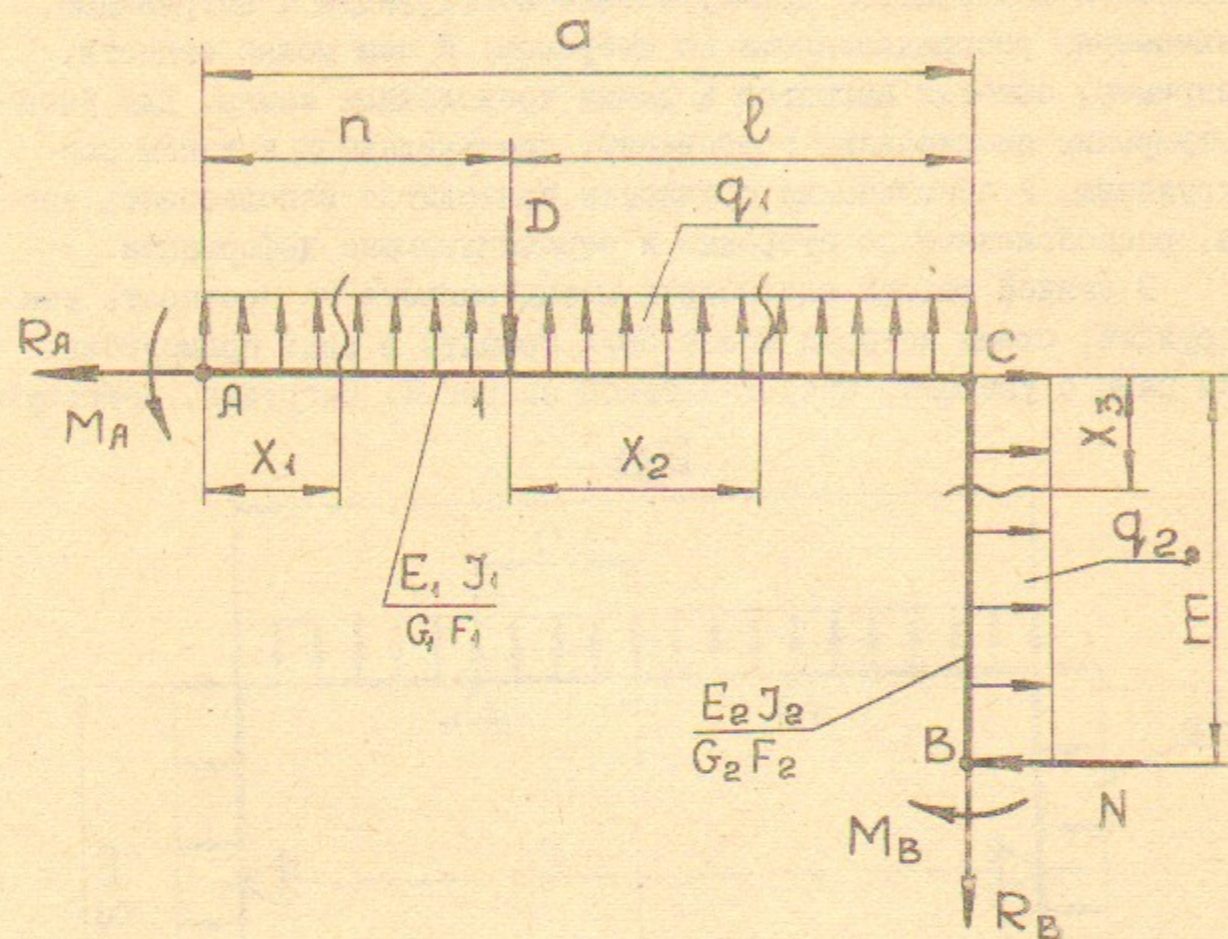


Рис. 2

Рама статически неопределима, поэтому для определения реактивных сил и моментов рассмотрим деформации рамы, используя энергетический метод расчета линейных и угловых перемещений. Потенциальная энергия деформации выражается через внутренние силовые факторы следующей зависимостью [2]:

$$U = \int_L \frac{M(x)^2 dx}{2EJ} + \kappa \int_L \frac{Q(x)^2 dx}{2GF}$$

где  $M(x), Q(x)$  - изгибающий момент и поперечная сила в сечении с координатой  $x$ ;  $E, G$  - модуль упругости и модуль сдвига материала рамы;  $J, F$  - момент инерции сечения рамы относительно нейтральной оси и площадь сечения рамы;

безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения, и для прямоугольного сечения, равный 1,2 [2].

Для схемы, изображенной на рис. 2, выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$U = \frac{1}{2E_1J_1} \int_0^n \left( -M_A + \frac{q_1 x_1^2}{2} \right)^2 dx_1 + \frac{\kappa_1}{2G_1F_1} \int_0^n (q_1 x_1)^2 dx_1 + \frac{1}{2E_1J_1} \int_0^l \left[ -M_A - Dx_2 + \frac{q_1(n+x_2)^2}{2} \right]^2 dx_2 + \frac{\kappa_1}{2G_1F_1} \int_0^l [q_1(n+x_2) - D]^2 dx_2 + \frac{1}{2E_2J_2} \int_0^m \left( -M_A - D\ell - q_2 m x_3 + N x_3 + \frac{q_2 a^2}{2} + \frac{q_2 x_3^2}{2} \right)^2 dx_3 + \frac{\kappa_2}{2G_2F_2} \int_0^m (N + q_2 x_3 - q_2 m)^2 dx_3.$$

При определении реактивного момента  $M_A$  воспользуемся тем, что в силу симметрии угол поворота  $\theta_A$  сечения  $A$  равен нулю. Согласно теореме Кастилиано [3], угол поворота этого сечения записывается следующим образом:

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}.$$

Решив это уравнение, находим  $M_A$ .

$$M_A = \frac{1}{\frac{a}{E_1J_1} + \frac{m}{E_2J_2}} \left[ \frac{q_1 a^2}{2} \left( \frac{a}{3E_1J_1} + \frac{m}{E_2J_2} \right) - \frac{q_2 m^3}{3E_2J_2} - D\ell \left( \frac{\ell}{2E_1J_1} + \frac{m}{E_2J_2} \right) + \frac{Nm^2}{2E_2J_2} \right].$$

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = E_1J_1, \quad \beta = E_2J_2, \quad \gamma = \frac{q_2}{q_1}, \quad \delta = \frac{m}{a}, \quad \varepsilon = \frac{n}{a}.$$

Тогда для  $M_A$  получаем выражение:

$$M_A = \frac{a}{2(\alpha\delta + \beta)} \left\{ \frac{q_1 a (3\alpha\delta + \beta - 2\alpha\gamma\delta^3)}{3} - D(1-\varepsilon) [\beta(1-\varepsilon) + 2\alpha\delta] + N\alpha\delta^2 \right\} \quad (1)$$

Другие неизвестные реактивные силы и моменты (см. рис. 2) находятся из уравнений статики, после чего обычными методами строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, находятся их максимальные значения и определяются нормальные и касательные напряжения в опасных сечениях рамы [1+3]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad \text{и} \quad \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \delta'}{J_B},$$

где  $M_{max}, Q_{max}$  - максимальный изгибающий момент и максимальная поперечная сила;  $W$  - осевой момент сопротивления сечения;  $S$  - статический момент сопротивления сечения;  $b$  - ширина сечения.

При практическом конструировании часто встречается случай, когда положение упоров и усилия на них необходимо подобрать таким образом, чтобы максимальные напряжения в раме не превышали допустимых.

Для конструкций, прочность которых определяется напряжениями от изгиба, усилия  $D$  и  $N$  должны выбираться из условия, чтобы изгибающий момент  $M(x)$  в любом сечении рамы

$$M(x) \leq [\sigma]_u \cdot W,$$

где  $[\sigma]_u$  - допускаемое напряжение на изгиб для материала рамы.

В многослойных конструкциях (например, обмотки магнитов, залитые изоляционным компаундом) прочность, как правило, определяется касательными напряжениями на стыках слоев. В таких конструкциях определяющей является максимально допустимая поперечная сила.

Написав выражения поперечной силы на горизонтальном и вертикальном участках рамы, получаем для выбора усилий  $D$  и  $N$  в случае прямоугольного сечения рамы следующие зависимости:

$$q_1 a \varepsilon + \frac{2[\tau]_1 F_1}{3} > D > q_1 a - \frac{2[\tau]_1 F_1}{3},$$

$$\frac{2[\tau]_2 F_2}{3} > N > q_2 m - \frac{2[\tau]_2 F_2}{3},$$

где  $[\tau]_1$  и  $[\tau]_2$  - допускаемые напряжения на сдвиг для горизонтального и вертикального участков рамы;  $F_1$  и  $F_2$  - площадь сечения горизонтального и вертикального участков рамы; остальные обозначения см. рис.2. Выбрав усилия по этим критериям, необходимо проверить величину напряжений от изгибающих моментов в опасных сечениях, которые также не должны превышать допустимых. Очевидно, что для упрощения конструкции упоров усилия  $D$  и  $N$  целесообразно выбирать минимально возможными.

При конструировании недостаточно знать усилия на упорах. Необходимо определять деформации упоров от этих усилий. Чтобы

получить выражения для деформаций рамы в точках I и B, воспользуемся снова теоремой Кастилиано, согласно которой перемещение  $\Delta$  в направлении действия силы P

$$\Delta_p = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Для перемещений точки I в направлении силы D и точки B в направлении силы N получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{1D} = & \frac{a^3(1-\varepsilon)}{4(\alpha\delta+\beta)} \left\{ q_1 a \frac{(1+\varepsilon)[4\alpha\gamma\delta^3(\alpha\delta+\beta) - \alpha\delta(5\alpha\delta+6\beta) - \beta^2 + \varepsilon^2(\alpha\delta+\beta)^2]}{6\alpha(\alpha\delta+\beta)} + \right. \\ & + D \frac{(1-\varepsilon)[(1+2\varepsilon)(4\alpha^2\delta^2+5\alpha\beta\delta+\beta^2) - 3\beta\varepsilon^2(\alpha\delta+\beta)]}{3\alpha(\alpha\delta+\beta)} - N\delta^2(1+\varepsilon) \left. \right\} + \\ & + \frac{a\kappa_1(1-\varepsilon)}{\zeta} \left[ D - \frac{q_1 a(1+\varepsilon)}{2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{BN} = & \frac{a^3\delta^2}{4(\alpha\delta+\beta)} \left\{ q_1 a \frac{[4\beta(\alpha\delta+\beta) - \gamma\delta^2(\alpha\delta^2+6\alpha\beta\delta+5\beta^2)]}{6\beta(\alpha\delta+\beta)} - D(1-\varepsilon^2) + \right. \\ & + N \frac{\delta(\alpha\delta^2+5\alpha\beta\delta+4\beta^2)}{3\beta(\alpha\delta+\beta)} \left. \right\} + \frac{a\delta\kappa_2}{\eta} \left( N - \frac{q_1 a\gamma\delta}{2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\zeta = G_1 F_1$ ,  $\eta = G_2 F_2$ , остальные обозначения см. стр. 5.

Необходимо подчеркнуть, что перемещение  $\Delta$  получается положительным, если оно совпадает с направлением действия сил D и N. В противном случае оно имеет отрицательный знак. Последний член в этих выражениях характеризует влияние поперечных сил на деформации и, т.к. обычно это влияние мало, в приближенных расчетах им можно пренебречь.

Примем дополнительно следующие обозначения:

$$\frac{(1+\varepsilon)[4\alpha\gamma\delta^3(\alpha\delta+\beta) - \alpha\delta(5\alpha\delta+6\beta) - \beta^2 + \varepsilon^2(\alpha\delta+\beta)^2]}{6\alpha(\alpha\delta+\beta)} = \lambda,$$

$$\frac{(1-\varepsilon)[(1+2\varepsilon)(4\alpha^2\delta^2+5\alpha\beta\delta+\beta^2) - 3\beta\varepsilon^2(\alpha\delta+\beta)]}{3\alpha(\alpha\delta+\beta)} = \nu,$$

$$\frac{4\beta(\alpha\delta+\beta)-\gamma\delta^2(\alpha^2\delta^2+6\alpha\beta\delta+5\beta^2)}{5\beta(\alpha\delta+\beta)} = \mu, \quad \frac{\delta(\alpha^2\delta^2+5\alpha\beta\delta+4\beta^2)}{3\beta(\alpha\delta+\beta)} = \psi.$$

Тогда выражения для перемещений точек I и B принимают вид

$$\Delta_{1D} = \frac{a^3(1-\varepsilon)}{4(\alpha\delta+\beta)} \left[ q_1 a \lambda + D \nu - N \delta^2(1+\varepsilon) \right] + \frac{a k_1(1-\varepsilon)}{\xi} \left[ D - \frac{q_1 a(1+\varepsilon)}{2} \right], \quad (4)$$

$$\Delta_{BN} = \frac{a^3 \delta^2}{4(\alpha\delta+\beta)} \left[ q_1 a \mu - D(1-\varepsilon^2) + N \psi \right] + \frac{a k_2 \delta}{\eta} \left( N - \frac{q_1 a \gamma \delta}{2} \right). \quad (5)$$

Следует отметить, что в тех случаях, когда перемещения  $\Delta_{1D}$  и  $\Delta_{BN}$  заданы, совместное решение уравнений (4), (5) позволяет определять требуемые усилия  $D$  и  $N$ . В остальном порядок расчета остается прежним.

Рассмотрим несколько частных задач.

I. Прямоугольная рама постоянного сечения, нагруженная внутренним давлением. При этом  $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$ ,  $G_1 F_1 = G_2 F_2 = GF$ ,

$q_1 = q_2 = q$ ,  $k_1 = k_2 = k$ . В этом случае

$$M_{A1} = \frac{a}{2(1+\delta)} \left[ q a \frac{(1+3\delta-2\delta^3)}{3} - D(1-\varepsilon)(1+2\delta-\varepsilon) + N \delta^2 \right],$$

$$\Delta_{1D} = \frac{a^3(1-\varepsilon)}{4EJ(1+\delta)} \left[ q a \lambda_1 + D \nu_1 - N \delta^2(1+\varepsilon) \right] + \frac{a k(1-\varepsilon)}{GF} \left[ D - \frac{q a(1+\varepsilon)}{2} \right],$$

$$\Delta_{BN} = \frac{a^3 \delta^2}{4EJ(1+\delta)} \left[ q a \mu_1 - D(1-\varepsilon^2) + N \psi_1 \right] + \frac{a k \delta}{GF} \left( N - \frac{q a \delta}{2} \right),$$

где

$$\lambda_1 = \frac{(1+\varepsilon)[4\delta^3(1+\delta) - \delta(6+5\delta) + \varepsilon^2(1+\delta)^2 - 1]}{6(1+\delta)},$$

$$\nu_1 = \frac{(1-\varepsilon)[(1+2\varepsilon)(1+5\delta+4\delta^2) - 3\varepsilon^2(1+\delta)]}{3(1+\delta)},$$

$$\mu_1 = \frac{4(1+\delta) - \delta^2(5+6\delta+\delta^2)}{6(1+\delta)}, \quad \psi_1 = \frac{\delta(4+5\delta+\delta^2)}{3(1+\delta)}.$$

Графики для определения этих коэффициентов приведены на рисунках 3+6.

2. Прямоугольная рама постоянного сечения, нагруженная внутренним давлением, оба упора расположены по серединам сторон, т.е. в дополнение к условиям предыдущей задачи  $\varepsilon = 0$ . Тогда

$$M_{A2} = \frac{a}{2(1+\delta)} \left[ q a \frac{(1+3\delta-2\delta^3)}{3} - D(1+2\delta) + N \delta^2 \right],$$

$$\Delta_{1D2} = \frac{a^3}{4EJ(1+\delta)} \left( q a \lambda_2 + D \nu_2 - N \delta^2 \right) + \frac{a k}{GF} \left( D - \frac{q a}{2} \right),$$

$$\Delta_{BN2} = \frac{a^3 \delta^2}{4EJ(1+\delta)} \left( q a \mu_1 - D + N \psi_1 \right) + \frac{a k \delta}{GF} \left( N - \frac{q a \delta}{2} \right),$$

где коэффициенты  $\lambda_2 = -\frac{1+\delta(6+5\delta)-4\delta^3(1+\delta)}{6(1+\delta)}$  и

$\nu_2 = \frac{1+\delta(5+4\delta)}{3(1+\delta)}$  определяются из рисунков 3,4 при  $\varepsilon = 0$ .

3. Квадратная рама постоянного сечения, нагруженная внутренним давлением, оба упора расположены по серединам сторон, т.е. в дополнение к условиям предыдущей задачи  $\delta = 1$ . Получаем

$$M_{A3} = \frac{a}{4} \left( \frac{2q a}{3} - 3D + N \right),$$

$$\Delta_{1D3} = \frac{a^3}{8EJ} \left( -\frac{q a}{3} + \frac{5D}{3} - N \right) + \frac{a k}{GF} \left( D - \frac{q a}{2} \right),$$

$$\Delta_{BN3} = \frac{a^3}{8EJ} \left( -\frac{q a}{3} - D + \frac{5N}{3} \right) + \frac{a k}{GF} \left( N - \frac{q a}{2} \right).$$

В заключение следует подчеркнуть, что выражения (I)+(3) можно использовать для решения большого числа других задач, в том числе задач по расчету на прочность рам, испытывающих наружные нагрузки, принимая распределенные нагрузки  $q$  с отрицательным знаком, и рам без упоров по сторонам [4], приняв усилия  $D$  и  $N$  равными нулю.

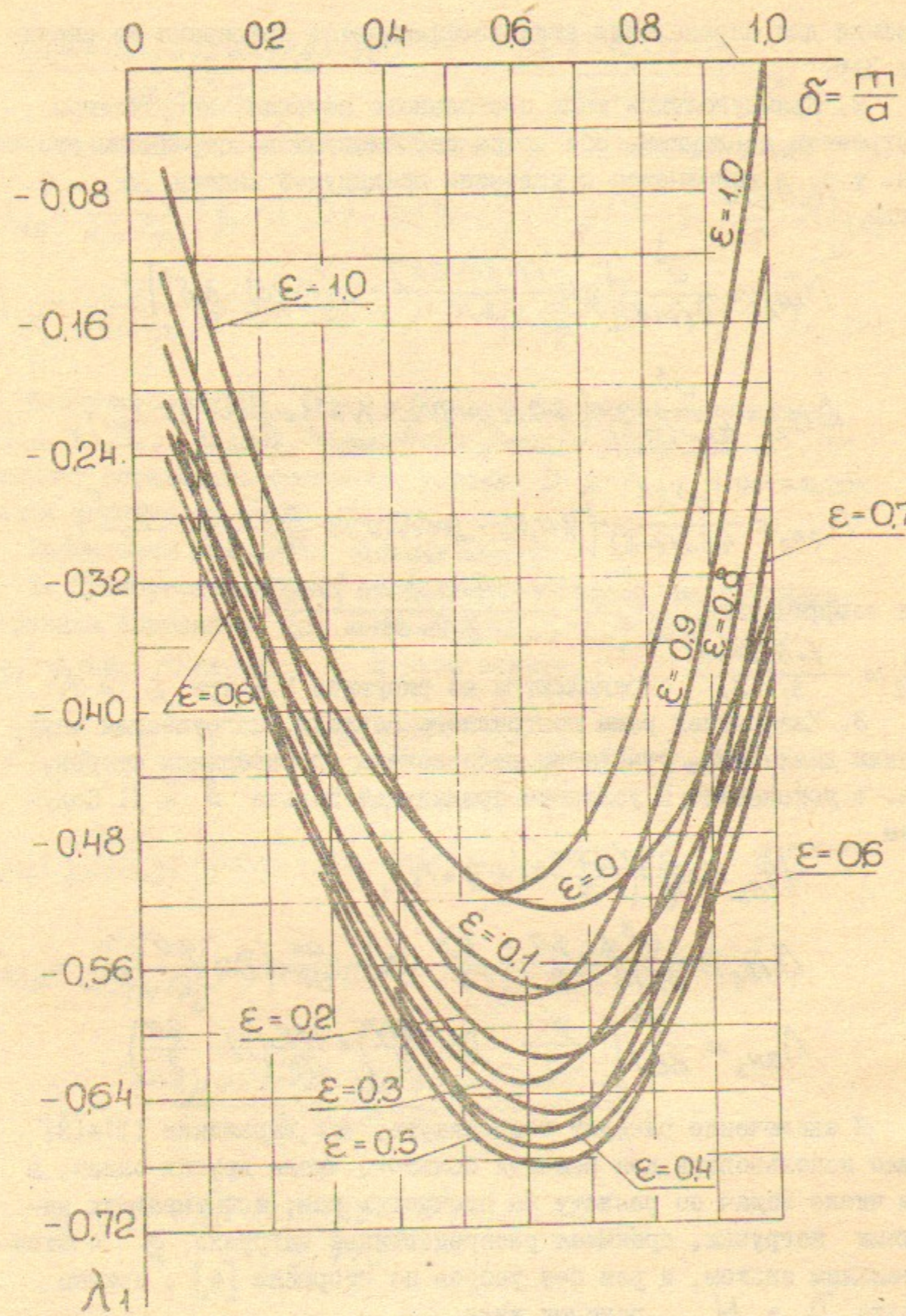


Рис.3

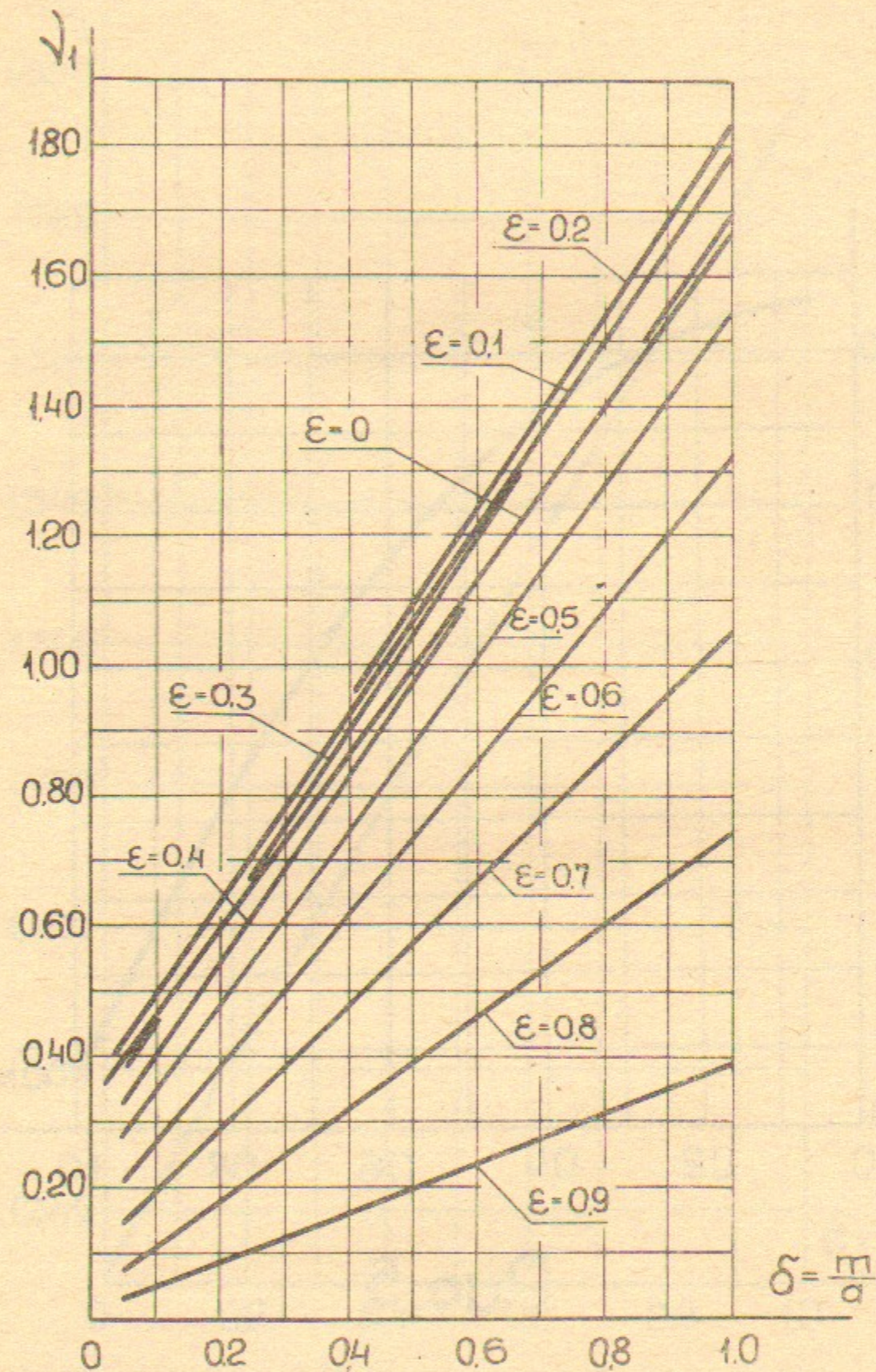


Рис.4

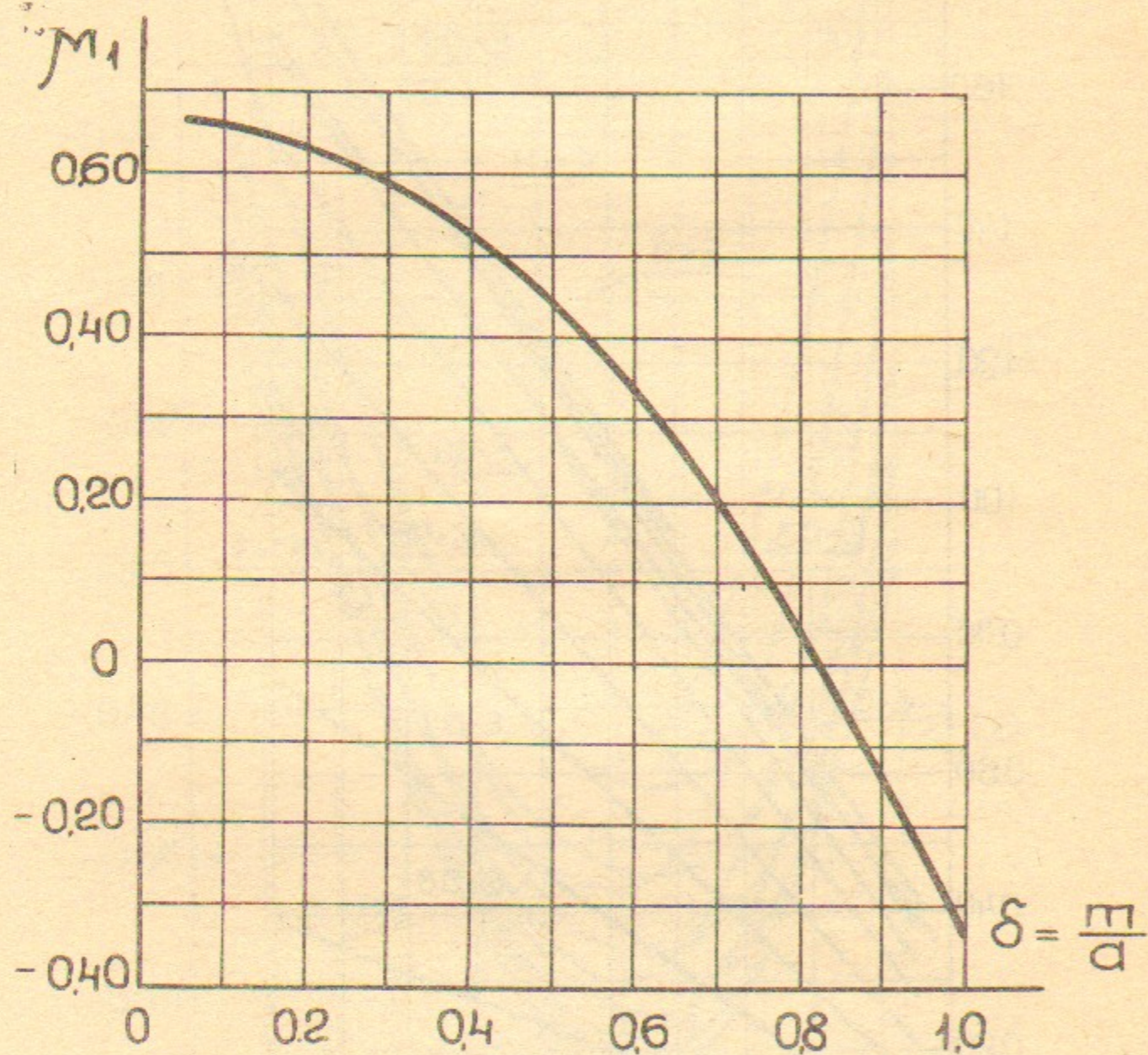


Рис. 5

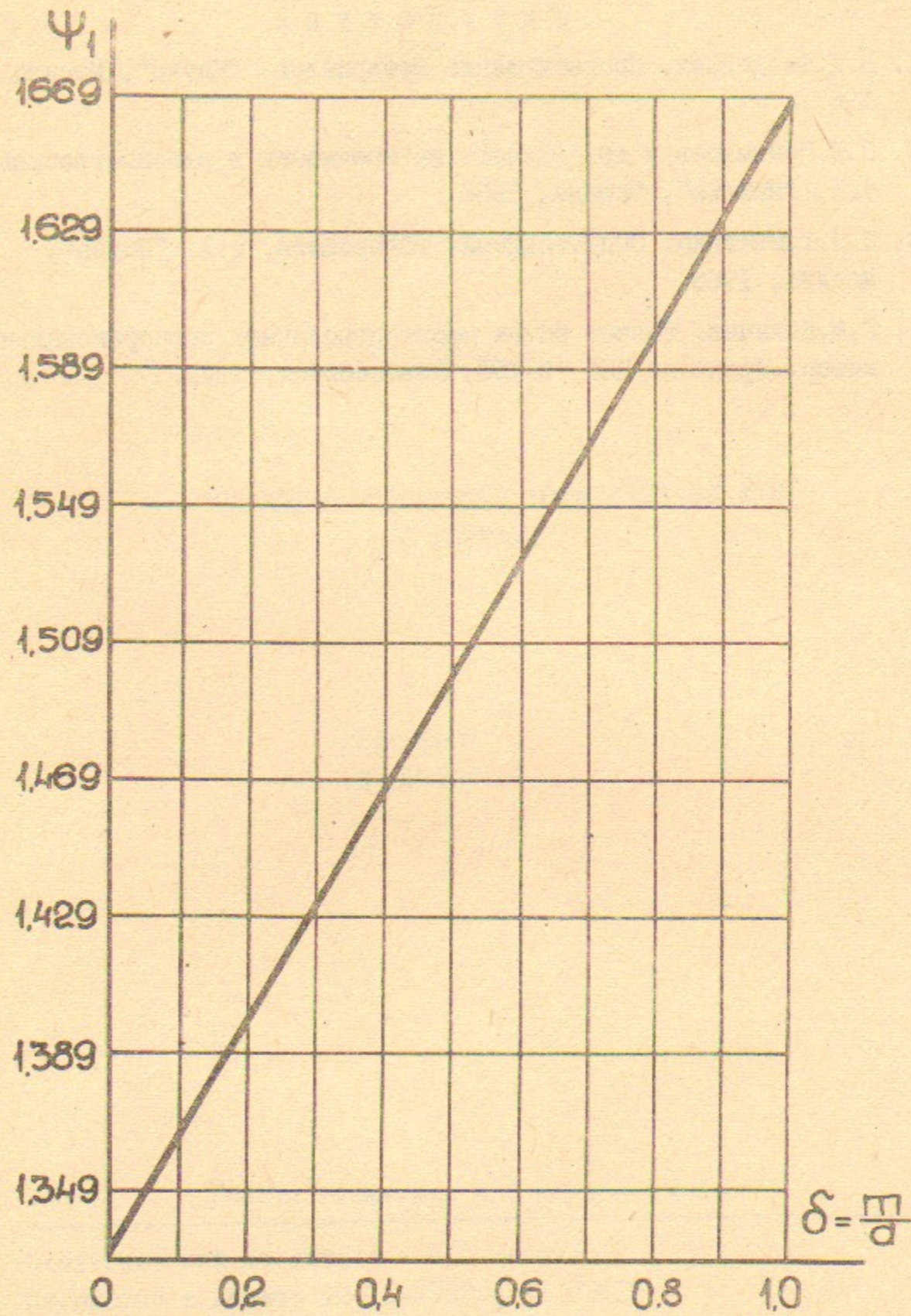


Рис. 6



### Л и т е р а т у р а

1. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов. "Наука", Москва, 1967.
2. С.Д.Пономарев и др. Расчеты на прочность в машиностроении. т. I, "Машгиз", Москва, 1956.
3. С.П.Тимошенко. Сопротивление материалов. т. I. "Наука", Москва, 1965.
4. Г.М.Колачев. Расчет рамок многопроволочных пропорциональных камер. Препринт ИЯФ 79-150, Новосибирск, 1979.

Г.М.Колачев

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РАМ  
С УПОРАМИ

Препринт  
№ 82-137

Работа поступила - 2 ноября 1982 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов  
Подписано к печати 19.II-1982г. МН 03619  
Формат бумаги 60x90 1/16 Усл.0,8 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.  
Тираж 290 экз. Бесплатно. Заказ № 137.

---

Ротапринт ИЯФ СО АН СССР, г.Новосибирск, 90