

14

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Б.Н. Брейзман, М.С. Пеккер, Ю.М. Розенраух

**МОДУЛЯЦИОННАЯ
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ШИРОКОГО
СПЕКТРА ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН
В ПЛАЗМЕ С КОНЕЧНОЙ
ТЕМПЕРАТУРОЙ ИОНОВ**

ПРЕПРИНТ 82 - 19



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

Препринт

Б.Н.Брейзман, М.С.Пеккер, Ю.М.Розенраух

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ШИРОКОГО СПЕКТРА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С КОНЕЧНОЙ
ТЕМПЕРАТУРОЙ ИОНОВ

ПРЕПРИНТ 82-019

Новосибирск
1982

MODULATIONAL INSTABILITY OF A BROAD
LANGMUIR WAVE SPECTRUM IN A PLASMA
WITH FINITE ION TEMPERATURE

B.N.Breizman, M.S.Pekker
Yu.M.Rozenraukh

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The effect of ion thermal motion on the modulational instability of Langmuir waves is studied for the case in which the spread of Langmuir wave group velocities is much larger than the ion sound velocity. The equations describing the nonlinear stage of instability are derived under the assumption that the energy of Langmuir waves is close to the instability threshold. The conditions of soft and hard nonlinear development of the instability are formulated.

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ШИРОКОГО СПЕКТРА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С КОНЕЧНОЙ
ТЕМПЕРАТУРОЙ ИОНОВ

Б.Н.Брейзман, М.С.Пеккер, Ю.М.Розенраух

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено влияние теплового движения ионов на модуляционную неустойчивость спектра ленгмюровских волн, в котором разброс групповых скоростей плазмонов существенно превышает скорость звука. Получены и решены уравнения, описывающие нелинейную стадию неустойчивости при малой надпороговости. Выявлены условия мягкого и жесткого перехода неустойчивости в нелинейный режим.

MODULATIONAL INSTABILITY OF A BROAD
LANGMUIR WAVE SPECTRUM IN A PLASMA
WITH FINITE ION TEMPERATURE

B.N.Breizman, M.S.Pekker
Yu.M.Rozenraukh

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk 90, USSR

A b s t r a c t

The effect of ion thermal motion on the modulational instability of Langmuir waves is studied for the case in which the spread of Langmuir wave group velocities is much larger than the ion sound velocity. The equations describing the nonlinear stage of instability are derived under the assumption that the energy of Langmuir waves is close to the instability threshold. The conditions of soft and hard nonlinear development of the instability are formulated.

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ШИРОКОГО СПЕКТРА
ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С КОНЕЧНОЙ
ТЕМПЕРАТУРОЙ ИОНОВ

Б.Н.Брейзман, М.С.Пеккер, Ю.М.Розенраух

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено влияние теплового движения ионов на модуляционную неустойчивость спектра ленгмюровских волн, в котором разброс групповых скоростей плазмонов существенно превышает скорость звука. Получены и решены уравнения, описывающие нелинейную стадию неустойчивости при малой надпороговости. Выявлены условия мягкого и жесткого перехода неустойчивости в нелинейный режим.

I. В в е д е н и е

При исследовании модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн [1,2] рост возмущений плотности под действием высокочастотной силы Миллера [3] обычно описывается уравнениями гидродинамики:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \vec{v}) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{M} \left[\frac{T_e}{n_0} \nabla n + \frac{e^2}{4\pi m \omega_p^2} \nabla |E|^2 \right]. \quad (2)$$

В дополнение к этим уравнениям используется (в зависимости от постановки задачи) либо уравнение Лиувилля для плазмонов [2]

$$\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} + \vec{v}_g \frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial \vec{r}} - \frac{\omega_p}{2n_0} \frac{\partial n}{\partial \vec{r}} \frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial \vec{k}} = 0; \quad (3)$$

либо уравнение для огибающей электрического поля [4,5]

$$i \vec{E}_t + \frac{3}{2} \omega_p^2 \nabla^2 \vec{E} - \frac{c^2}{2\omega_p} [\nabla \times [\nabla \times \vec{E}]] = \frac{\omega_p}{2n_0} n \vec{E}. \quad (4)$$

При гидродинамическом описании движения ионов подразумевается, что отношение инкремента неустойчивости γ к волновому числу возмущения q велико по сравнению с ионной тепловой скоростью v_{Ti} :

$$\frac{\gamma}{q} \gg v_{Ti}. \quad (5)$$

Это неравенство выполняется в том случае, когда плотность энергии ленгмюровских волн W достаточно сильно превышает величину W_* , соответствующую порогу неустойчивости. Если же энергия ленгмюровских волн близка к порогу, то неравенство (5) может нарушаться, так как вблизи порога инкремент неустойчивости мал (подробнее о поведении инкремента при $\varepsilon \equiv \frac{W-W_*}{W_*} \ll 1$ см., например, [6]). Неравенство (5) является особенно жестким при сопоставимых значениях ионной и электронной температур. В этом случае система уравнений (1)-(2) вообще не позволяет рассмотреть

*) Как показано в разделе 2, частота растущих модуляционных возмущений равна нулю.

режим малой надпороговости ($\epsilon \ll 1$). Исследование модуляционной неустойчивости в условиях, когда неравенство (5) нарушено, требует, очевидно, перехода от уравнений гидродинамики к кинетическому описанию ионов:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} - \vec{\nabla} \Phi \frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} = 0. \quad (6)$$

Здесь через Φ обозначен потенциал поляризационного электрического поля, возникающего за счет газокинетического давления электронов и давления высокочастотного электрического поля:

$$\Phi = \frac{T_e}{n_0} n + \frac{e^2}{4m\omega_p^2} |E|^2. \quad (7)$$

Возмущение плотности электронов n , входящее в формулу (7), в силу квазинейтральности равно возмущению плотности ионов:

$$n = \int f_i d\vec{p} - n_0.$$

Используя систему уравнений (3), (4), (6), мы решим в настоящей работе одномерную задачу о нелинейной стадии модуляционной неустойчивости широкого $\Delta k \sim k_0$ спектра ленгмюровских волн; относительно характерного волнового числа k_0 в этом спектре предполагается, что

$$k_0 \gg \frac{1}{r_D} \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (8)$$

В гидродинамической постановке эта задача была ранее решена в работах [6,7]. Неравенство (8) означает, что распределение ленгмюровских волн адиабатически "следит" за возмущениями плотности плазмы. Это позволяет относительно просто выразить высокочастотный потенциал через возмущение плотности плазмы $n(x,t)$ и исходную спектральную функцию плазмонов N_k . Соответствующие вычисления изложены в работах [6,7]. Ввиду того, что в этих вычислениях используются только уравнения (3) и (4), переход к кинетическому описанию ионов никак не влияет на связь между $|E|^2$ и $n(x,t)$, найденную в работах [6,7].

В дальнейшем нас будет интересовать ситуация, в которой роль теплового движения ионов проявляется наиболее отчетливо, т.е. режим малой надпороговости:

$$\epsilon \ll \frac{T_i}{T_i + T_e}. \quad (9)$$

Это неравенство, как мы увидим ниже, эквивалентно условию

$$\frac{\lambda}{q} \ll V_{Ti}. \quad (10)$$

Важной особенностью данного режима является наличие резонансного взаимодействия модуляционных возмущений с ионами плазмы (затухания Ландау). По этой причине уравнения, описывающие развитие возмущений, не сохраняют полную энергию волн, что качественно отличает рассматриваемый режим неустойчивости от гидродинамического.

Мы будем придерживаться ниже следующего порядка изложения. В разделе 2 будет получено нелинейное уравнение для возмущения плотности плазмы и проанализирована линейная стадия неустойчивости. В разделе 3 мы рассмотрим поведение неустойчивости в нелинейном режиме и укажем условия, при которых рост возмущений стабилизируется малой нелинейностью. Заключительный (четвертый) раздел содержит сводку основных результатов работы.

2. Основные уравнения. Линейное приближение

Главной причиной нелинейных эффектов в интересующей нас задаче является нелинейная зависимость высокочастотного давления, определяемого из уравнений (3), (4), от возмущения плотности плазмы. Что же касается движения ионов в потенциале Φ , то его можно с достаточной точностью описывать в линейном приближении, поскольку добавки, обусловленные ионной нелинейностью, содержат дополнительный малый параметр $k_0^2 r_D^2$. Линейная по Φ поправка к функции распределения ионов имеет в фурье-представлении следующий вид:

$$f_q(t) = f_0(v) e^{iqvt} + iq \int_{-t}^0 e^{iqv\tau} \frac{\partial F_0}{\partial p} \Phi_q(t+\tau) d\tau, \quad (II)$$

где $f_0(v)$ - начальное возмущение функции распределения; невозмущенная функция распределения F_0 предполагается максвелловской:

$$F_0 = \frac{n_0}{(2\pi m T_i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m T_i}\right).$$

Если $f_0(v)$ является плавной функцией v , то на достаточно больших временах первое слагаемое в правой части формулы (II) не дает вклада в возмущение плотности $n_q(t)$, т.е.

$$n_q(t) = \frac{q^2 n_0}{M} \int_{-\infty}^0 \Phi_q(t+\tau) \tau \exp\left(-\frac{v_{Ti}^2 q^2 \tau^2}{2}\right) d\tau. \quad (I2)$$

При записи этой формулы мы учли быструю сходимость интеграла по τ на нижнем пределе и заменили этот предел на $-\infty$.

Характерное время изменения функции $\Phi_q(t)$ по порядку величины равно γ^{-1} . Согласно условию (I0), это время существенно превышает ширину области интегрирования по τ в формуле (I2). Поэтому в интеграле (I2) можно положить

$$\Phi_q(t+\tau) = \Phi_q + \tau \frac{\partial \Phi_q(t)}{\partial t}.$$

Тогда

$$n_q(t) = -\frac{n_0}{T_i} \left[\Phi_q(t) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v_{Ti} |q|} \frac{\partial \Phi_q(t)}{\partial t} \right]. \quad (I3)$$

В нулевом приближении по параметру δ/qv_{Ti} имеем:

$$\Phi_q(t) = \frac{-T_i}{n_0} n_q(t).$$

Подстановка этого выражения под знак производной в формуле (I3) приводит к следующему уравнению для $n_q(t)$:

$$\frac{\partial n_q(t)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} |q| \left[n_q(t) + \frac{n_0}{T_i} \Phi_q(t) \right]. \quad (I4)$$

Уравнение (I4) необходимо дополнить соотношением между $\Phi_q(t)$ и $n_q(t)$, вытекающим из уравнения (4) или (3). В линейном по $n_q(t)$ приближении это соотношение имеет вид [6]:

$$\Phi_q(t) = \left[\frac{T_e}{n_0} + F(q) \right] n_q(t) \quad (I5)$$

где

$$F(q) = \frac{\omega_p}{12 n_0^2 v_D^2} \int \frac{N_{k+\eta_2} - N_{k-\eta_2}}{k q} dk.$$

Здесь и далее спектральная функция плазмонов N_k нормируется условием:

$$\int N_k dk = \frac{W}{\omega_p}$$

и для простоты считается четной.

Соотношения (I4) и (I5) дают следующее уравнение для возмущения плотности:

$$\frac{\partial n_q(t)}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} |q| \frac{n_0}{T_i} \left[\frac{T_e + T_i}{n_0} + F(q) \right] n_q(t). \quad (I6)$$

Отсюда видно, что условием роста возмущений является неравенство

$$F(q) < -\frac{T_e + T_i}{n_0},$$

причем порог неустойчивости по плотности энергии ленгмюровских волн определяется соотношением

$$F(q_m) = -\frac{T_e + T_i}{n_0},$$

где q_m — точка абсолютного минимума функции $F(q)$. Следуя работам [6,7] мы будем называть неустойчивость длинноволновой при $q_m = 0^*$ и коротковолновой при $q_m \sim k_0$.

Анализируя длинноволновую неустойчивость, удобно разложить функцию $F(q)$ в ряд по параметру q/k_0 . С точностью до членов порядка $(q/k_0)^2$ разложение $F(q)$ имеет следующий вид:

$$F(q) = \frac{W}{12 n_0^2 v_D^2 k_0^2} \left[I_1 + \frac{q^2}{k_0^2} I_2 \right]. \quad (I7)$$

Здесь величины

$$I_1 \equiv \frac{\omega_p k_0^2}{W} \int \frac{1}{k} \frac{\partial N_k}{\partial k} dk$$

$$I_2 \equiv \frac{\omega_p k_0^4}{24 W} \int \frac{1}{k} \frac{\partial^3 N_k}{\partial k^3} dk$$

— это безразмерные константы, каждая из которых по модулю порядка единицы.

Предположение о длинноволновом характере неустойчивости означает, что $I_1 < 0$, а $I_2 > 0$. При этом уравнение (I6) записывается в виде:

$$\frac{\partial n_q(t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_{Ti} |q| \frac{T_e + T_i}{T_i} \left[\epsilon - \frac{q^2}{k_0^2} \frac{I_2}{|I_1|} \right] n_q(t). \quad (I8)$$

* Специальное обсуждение случая $q_m = 0$ обусловлено тем, что функция $F(q)$, будучи четной, обязательно имеет экстремум при $q = 0$.

Пороговое значение плотности энергии ленгмюровских волн равно

$$W_* = \frac{12 n_0 k_0^2 t_0^2}{|I_2|} (T_e + T_i),$$

а максимальный инкремент достигается при

$$q_{\max} = k_0 \left(\frac{|I_2|}{3 I_2} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2}$$

и равен

$$\gamma_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{T_e + T_i}{T_i} V_{Ti} k_0 \left(\frac{|I_2|}{I_2} \right)^{1/2} \varepsilon^{3/2}.$$

Зависимость γ от q приведена на рис.1, из которого видно, что область неустойчивых волновых чисел ограничена сверху значением

$$q_* = k_0 \left(\frac{|I_2|}{I_2} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2}.$$

Для сравнения укажем, что в плазме с холодными ионами (см. [6])

$$W_* = \frac{12 n_0 k_0^2 t_0^2}{|I_2|} T_e;$$

$$\gamma_{\max} = \frac{k_0 c_s}{2} \left(\frac{|I_2|}{I_2} \right)^{1/2} \varepsilon.$$

В случае коротковолновой модуляционной неустойчивости зависимость γ от q имеет вид, показанный на рис.2. При выполнении условия (9) инкремент коротковолновой неустойчивости задается следующим выражением:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{Ti} |q| \frac{T_e + T_i}{T_i} \left[\varepsilon - A^2 (q - q_m)^2 \right], \quad (19)$$

где

$$A^2 = \frac{n_0}{T_e + T_i} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \Big|_{q=q_m} > 0.$$

В отличие от гидродинамического режима максимальное значение инкремента пропорционально ε , а не $\varepsilon^{1/2}$. Что же касается ширины области неустойчивости по q , то она (так же, как и в гидродинамическом режиме) пропорциональна $\varepsilon^{1/2}$.

Формула (14) и следующие из нее выражения (18), (19) справедливы только при достаточно малых превышениях энергии ленгмюровских волн над порогом неустойчивости, когда выполнено условие

(9). Линейную теорию нетрудно, однако, обобщить на случай произвольных ε . Для этого следует перейти в формулах (12) и (15) к фурье-представлению по времени, после чего эти формулы дают искомое дисперсионное соотношение:

$$\left[\frac{T_e}{n_0} + F(q) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \frac{\partial F_0}{\partial v}}{q v - \Omega} dv = 1. \quad (20)$$

Поскольку в интересующей нас ситуации $\text{Im } \Omega \equiv \gamma > 0$, интегрирование здесь можно проводить по вещественной оси. Из формулы (20) следует, в частности, что в плазме с максвелловским распределением ионов модуляционная неустойчивость является апериодической ($\text{Re } \Omega \equiv \omega = 0$). Чтобы показать это, заметим, что вследствие вещественности функции $F(q)$ мнимая часть интеграла в формуле (20) должна быть равна нулю, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial F_0}{\partial v}}{(q v - \omega)^2 + \gamma^2} dv = 0.$$

Воспользуемся теперь четностью функции $F_0(v)$ и выделим в подынтегральном выражении четную по v часть:

$$\int_0^{\infty} \frac{q v \omega \frac{\partial F_0}{\partial v}}{(q^2 v^2 + \omega^2 + \gamma^2)^2 - 4 q^2 v^2 \omega^2} dv = 0.$$

Если функция F_0 монотонно убывает с ростом v^2 , то это соотношение выполняется только при $\omega = 0$, т.е. неустойчивость действительно является апериодической.

3. Нелинейная стадия неустойчивости

Для анализа нелинейной стадии неустойчивости необходимо учесть квадратичную по возмущению плотности плазмы добавку к высокочастотному давлению. В случае длинноволновой неустойчивости искомую добавку можно получить с помощью уравнения (3) точно так же, как это было сделано в работе [6]. С учетом нелинейной добавки уравнение (14) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial n_1^{(4)}}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{Ti} |q| \frac{T_e + T_i}{T_i} \left[\left(\varepsilon - \frac{q^2 I_2}{k_0^2 |I_2|} \right) n_1 - \frac{I_3}{12 n_0 k_0^2 t_0^2} (n_1^2) \right], \quad (21)$$

где I_3 - безразмерная константа, модуль которой по порядку величины равен единице:

$$I_3 \equiv \frac{\omega_p k_0^4}{W|I_1|} \int \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial N}{\partial k} \right) dk.$$

Перепишем уравнение (21) в координатном представлении, совершив обратное преобразование Фурье, и перейдем к безразмерным переменным, сделав следующие замены:

$$n = n_0 \frac{12 k_0^2 k_0^2 \epsilon}{I_3} u$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{k_0} \left(\frac{I_2}{|I_1| \epsilon} \right)^{1/2} z$$

$$t = \frac{3}{2} \left(\frac{3\pi I_2}{2 |I_1|} \right)^{1/2} \frac{T_i}{T_i + T_e} \frac{\epsilon^{-3/2}}{k_0 v_{Ti}} \tau.$$

В новых обозначениях уравнение (21) имеет вид:

$$\frac{\partial u(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{3}{2\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} [u_+^2 + u_-^2] dy - \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} [u_+ + u_-] dy - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} [u_+ + u_-] dy \right\}, \quad (22)$$

где $u_{\pm} \equiv u(z \pm y, \tau)$. Отметим, что уравнение (22), в отличие от соответствующего уравнения для плазмы с холодными ионами, оказывается нелокальным.

Уравнение (22) не содержит параметра ϵ . Поэтому ограниченность во времени его решений означала бы, что рост возмущений плотности стабилизируется за счет нелинейности на уровне

$\frac{n}{n_0} \sim k_0^2 k_D^2$, т.е., что режим возбуждения неустойчивости является мягким. С другой стороны, неограниченный рост решения

$u(z, \tau)$ означал бы, что малая нелинейность не способна привести к стабилизации неустойчивости независимо от величины ϵ . Такая ситуация соответствует жесткому режиму возбуждения. Чтобы выяснить, какая из этих двух возможностей реализуется в действительности, мы провели численное интегрирование уравнения (22). В качестве начального условия выбиралось периодическое возмущение малой амплитуды

$$u(z, 0) = -u_0 \cos z \quad (23)$$

с длиной волны, соответствующей максимуму инкремента (при этом сам безразмерный инкремент равен единице). С учетом периодичности $u(z, \tau)$ уравнение (22) записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{3}{8\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 y/2} [u_+^2 + u_-^2 - 2u^2] dy - \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 y/2} [u_+ + u_- - 2u] dy - \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 y/2} [u_+ + u_- - 2u] dy \right\}. \quad (24)$$

Пространственный шаг при численном решении уравнения (24) выбирался таким образом, чтобы в любой момент времени область существенного изменения функции $u(z, \tau)$ по z содержала не менее 10-20 точек. Шаг по времени подбирался исходя из требования устойчивости разностной схемы. Результат интегрирования уравнения (24) с начальным условием (23), в котором $u_0 = 0.01$, показан на рис.3. На начальной стадии неустойчивости ($\tau \leq 1$) поведение функции $u(z, \tau)$ соответствует линейной теории, т.е.

$$u(z, \tau) = -u_0 e^{\tau} \cos z.$$

В дальнейшем, как видно из рис.3, наблюдается тенденция к локализации возмущения плотности в окрестности точки $z = 0$. При этом амплитуда возмущения растет быстрее, чем по линейной теории, и к моменту времени $\tau = 4.62$ в решении возникает сингулярность. Учитывая такое поведение $u(z, \tau)$, на далекой нелинейной стадии неустойчивости можно опустить второе слагаемое в правой части (22). Получающееся при этом уравнение допускает автомодельную подстановку:

$$u = \frac{1}{(\tau - \tau_0)^{2/3}} f(\xi) \quad (25)$$

$$\xi = \frac{z}{(\tau - \tau_0)^{1/3}}.$$

Для ответа на вопрос о выходе численного решения $u(z, \tau)$ на автомодельную стадию заметим, что в автомодельном режиме отношение максимального значения функции u к ее минимальному значению не зависит от времени. Численное решение показывает, что на далекой нелинейной стадии это отношение действительно стремится

к постоянной величине, равной $-0,1$. Другим свидетельством в пользу выхода численного решения на автомодельную стадию является поведение функции $U(z, \tau)$ при $z = 0$. Из формулы (25) легко получить следующее соотношение:

$$G(U(0, \tau)) \equiv \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{U(0, \tau)}{\frac{\partial U(0, \tau)}{\partial \tau}} \right] = 1. \quad (26)$$

В автомодельном режиме соотношение (26) выполняется в любой момент времени. График левой части этого соотношения, построенный по результатам численных расчетов, представлен на рис. 4. Из рисунка 4 видно, что при $U(0, \tau) \gg 5$ ($\tau > 4,54$) величина

$G(U(0, \tau))$ оказывается близкой к единице, что хорошо соответствует автомодельному решению (25).

Изложенные результаты показывают, что в случае длинноволновой модуляционной неустойчивости реализуется жесткий режим возбуждения, т.е. возмущения плотности плазмы обязательно нарастают до уровня, соответствующего границе применимости уравнения (21): $\frac{n}{n_0} \sim \kappa_0^2 \tau_0^2$.

Перейдем теперь к обсуждению нелинейной стадии коротковолновой модуляционной неустойчивости. В этом случае волновые числа нарастающих возмущений сосредоточены в узкой окрестности точки $q = q_m$ (см. рис. 2). Поэтому в качестве первого шага естественно проанализировать поведение чисто синусоидального возмущения плотности (монохроматическая волна):

$$n(x, t) = a(t) e^{iq_m x} + a^*(t) e^{-iq_m x}. \quad (27)$$

Из результатов работы [7] следует, что главным нелинейным эффектом в обсуждаемой ситуации является взаимодействие возмущения (27) с парой резонансных плазмонов, имеющих волновые числа, близкие к $\pm q_m/2$. При этом нелинейная добавка к высокочастотному потенциалу оказывается квадратичной по амплитуде $a(t)$, так что уравнение (14) можно записать в виде:

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_{T_i} |q| \frac{T_e + T_i}{T_i} (\epsilon + \alpha |a(t)|) a(t), \quad (28)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{T_e + T_i} \frac{q_m^2 \omega_p}{9 n_0^2 q_m^4 \tau_0^4} \frac{\partial N_\kappa}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa = q_m/2}.$$

Решение уравнения (28) существенно зависит от знака производной спектральной функции плазмонов при $\kappa = q_m/2$. Если $N' \equiv \frac{\partial N}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa = q_m/2} > 0$, то рост амплитуды $a(t)$ не ограничивается малой нелинейностью, и амплитуда возрастает до величины, отвечающей границе применимости уравнения (28): $\frac{a(t)}{n_0} \sim \kappa_0^2 \tau_0^2$. Иными словами, при $N' > 0$ реализуется жесткий режим возбуждения неустойчивости.

Если же $N' < 0$, то рост возмущения плотности стабилизируется, причем амплитуда волны стремится к стационарному значению

$$a_{max}: \quad |a_{max}| = -\frac{\epsilon}{\alpha}.$$

Нелинейное ограничение амплитуды монохроматической волны с волновым числом $q = q_m$, вообще говоря, оставляет возможность для роста возмущений с другими волновыми числами из "неустойчивого" интервала (см. рис. 2), поскольку ширина области неустойчивости ($\Delta q \sim \epsilon^{1/2}$) значительно превышает ширину резонанса для отдельной волны (подробнее об этом см. [7]). По этой причине возмущение плотности при $N' < 0$ представляет собой не отдельную волну (27), а широкий набор волн с независимыми начальными фазами. Указанное обстоятельство, однако, не меняет качественного вывода о мягкости нелинейного режима при $N' < 0$. Воспользовавшись результатом вычисления нелинейной добавки к высокочастотному потенциалу для возмущения с широким спектром (см. [7]), нетрудно показать, что при $N' < 0$ в системе устанавливается следующее стационарное распределение возмущения плотности:

$$f_q = \frac{6 n_0 q_m^2 \tau_0^2}{\pi^2 q_m |d|} \begin{cases} [\epsilon - A^2 (q - q_m)^2]; & |q - q_m| \leq \frac{\epsilon^{1/2}}{A} \\ 0 & ; \quad |q - q_m| > \frac{\epsilon^{1/2}}{A} \end{cases} \quad (29)$$

Здесь через f_q обозначена фурье-компонента корреляционной функции возмущения:

$$f_q \equiv \frac{1}{2\pi} \int \langle n(x+z) n(x) \rangle e^{-iqz} dz,$$

а угловые скобки означают усреднение по пространству.

4. Заключение

Резюмируя результаты данной работы, можно сформулировать

следующие качественные утверждения.

1. Тепловое движение ионов приводит к повышению порога модуляционной неустойчивости по плотности энергии ленгмюровских волн и изменяет зависимость инкремента от величины надпороговости по сравнению со случаем плазмы с холодными ионами.

2. Длинноволновая модуляционная неустойчивость характеризуется жестким режимом возбуждения. При этом возмущения плотности на нелинейной стадии неустойчивости приобретают вид узких каверн, эволюционирующих по автомодельному закону (25) вплоть до

$$\frac{n}{n_0} \sim k_0^2 t_0^2.$$

3. В случае коротковолновой неустойчивости характер нелинейного режима определяется знаком производной спектральной функции плазмонов в точке резонанса $k = \varphi_m/2$. При $N' > 0$ неустойчивость возбуждается жестко. При $N' < 0$ режим возбуждения оказывается мягким, и развитие неустойчивости ведет к установлению стационарного спектра возмущений плотности (29).

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Веденов, Л.И.Рудаков. О взаимодействии волн в сплошных средах. ДАН СССР, 159, 767, 1964.
2. A. A. Vedenov, A. V. Gordeev, L. I. Rudakov. Oscillations and instability of a weakly turbulent plasma. *Plasma Phys.*, 9, 719, 1967.
3. А.В.Галонов, М.А.Миллер. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле. ЖЭТФ, 34, 242, 1958.
4. В.Е.Захаров. Коллапс ленгмюровских волн. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.
5. Е.А.Кузнецов. Коллапс электромагнитных волн в плазме. ЖЭТФ, 66, 2037, 1974.
6. Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин. Динамика модуляционной неустойчивости широкого спектра ленгмюровских волн. ЖЭТФ, 79, 857, 1980.
7. Б.Н.Брейзман, В.М.Малкин. Нелинейная стабилизация одномерной коротковолновой модуляционной неустойчивости. Препринт ИЯФ № 66. Новосибирск, 1981.

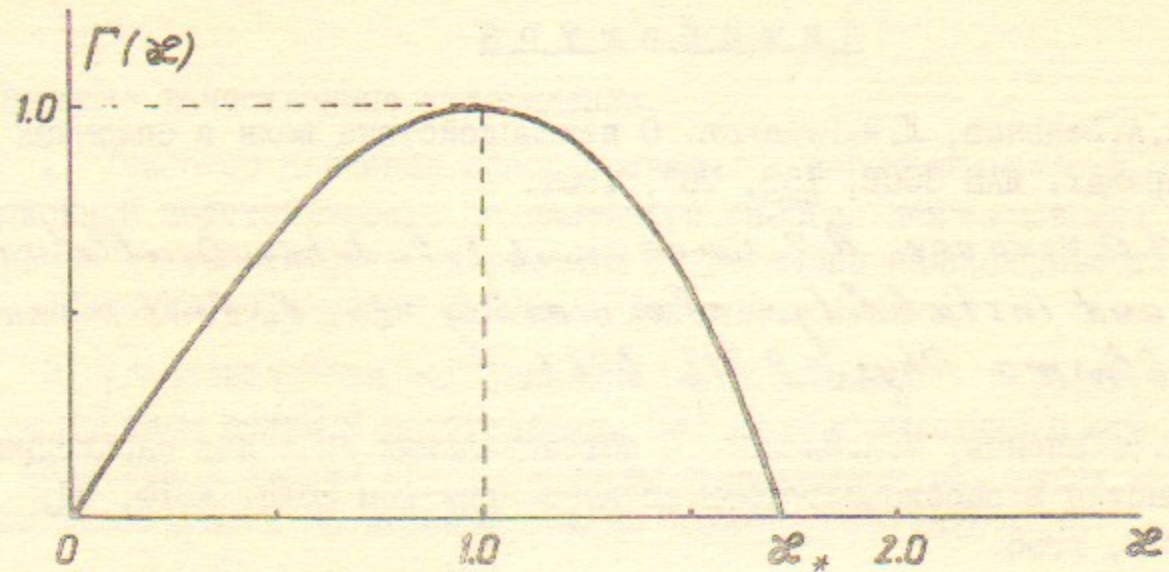


Рис.1. Зависимость безразмерного инкремента длинноволновой неустойчивости Γ от безразмерного волнового числа α .
Связь Γ и α с соответствующими размерными величинами γ и q определена соотношениями:

$$\gamma = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{T_e + T_i}{T_i} v_{Ti} K_0 \left(\frac{|I_1|}{I_2} \right)^{1/2} \epsilon^{3/2} \Gamma;$$

$$q = K_0 \left(\frac{|I_1|}{3I_2} \right)^{1/2} \epsilon^{1/2} \alpha.$$

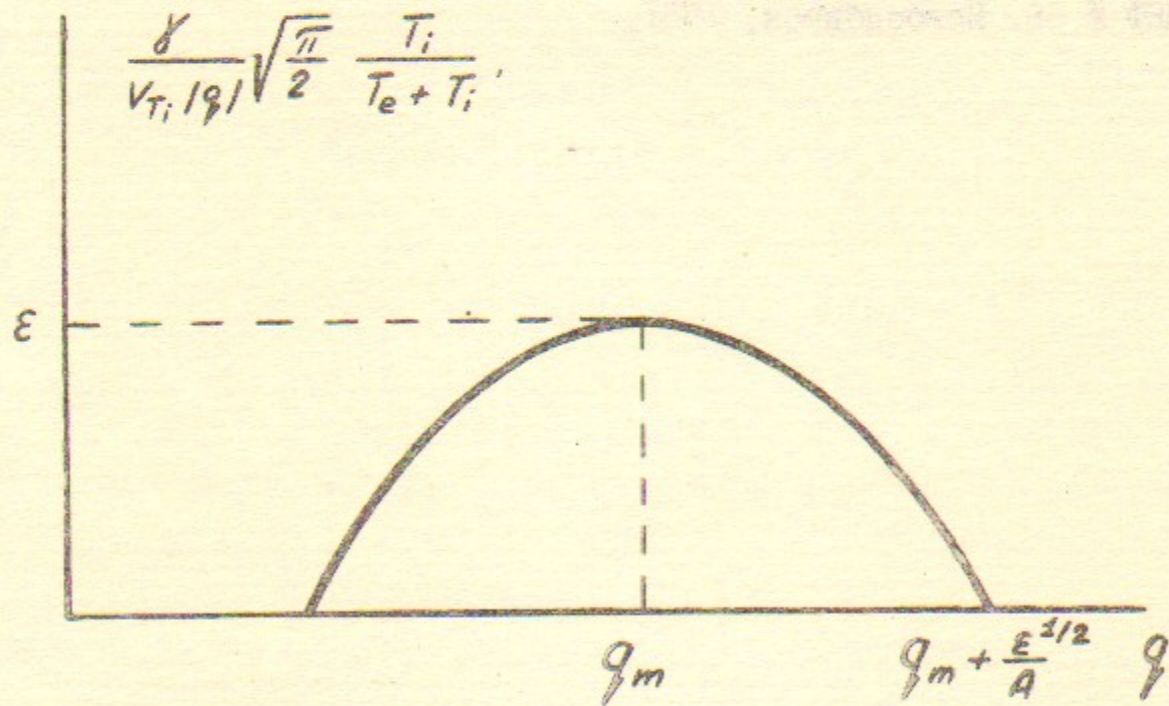


Рис.2. Зависимость инкремента коротковолновой неустойчивости от волнового числа.

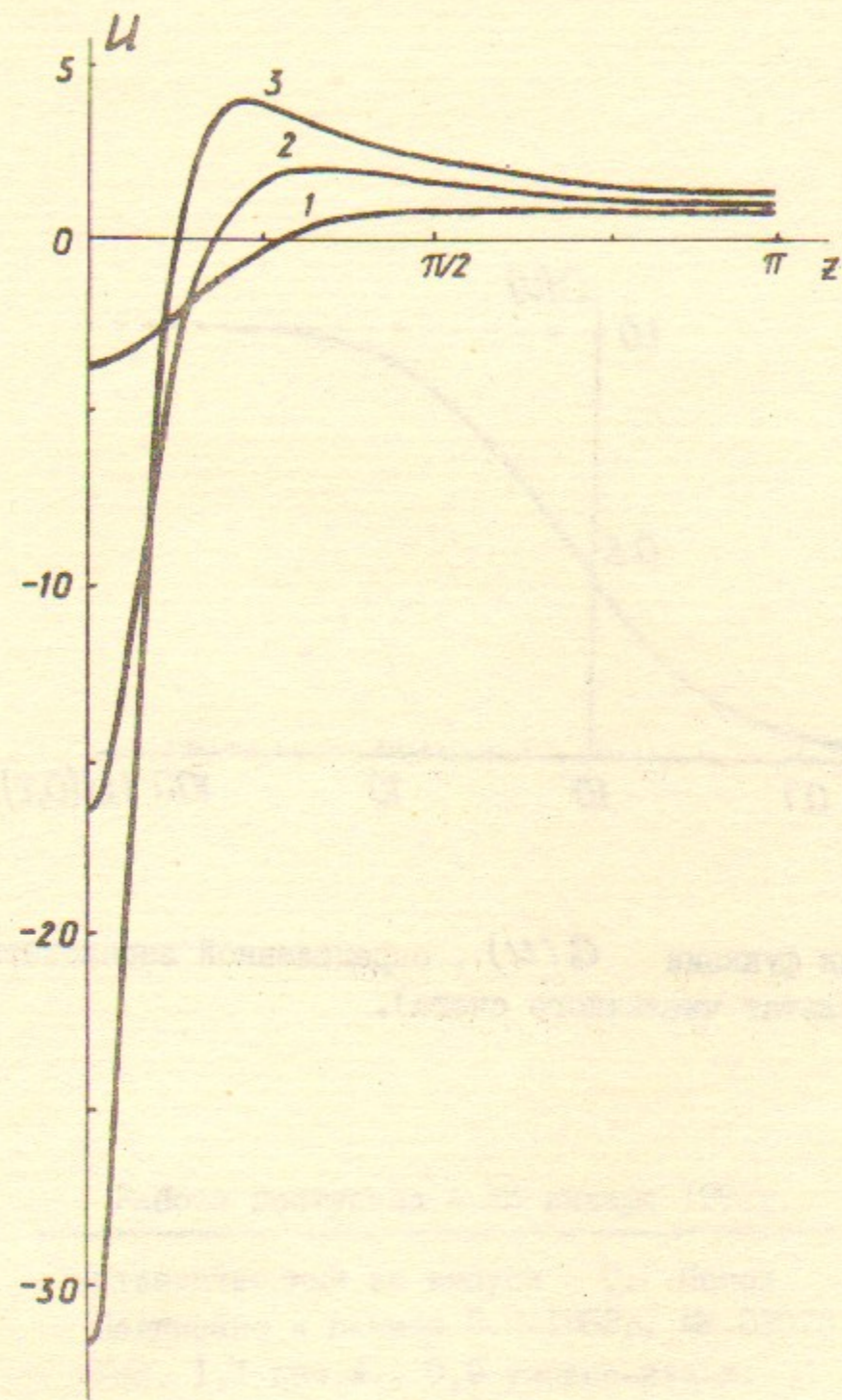


Рис.3. Результат численного решения уравнения (24) с начальным условием (23). Показано пространственное распределение безразмерного возмущения плотности U в различные моменты времени:

$$1 - \tau = 4,50; \quad 2 - \tau = 4,60; \quad 3 - \tau = 4,61.$$

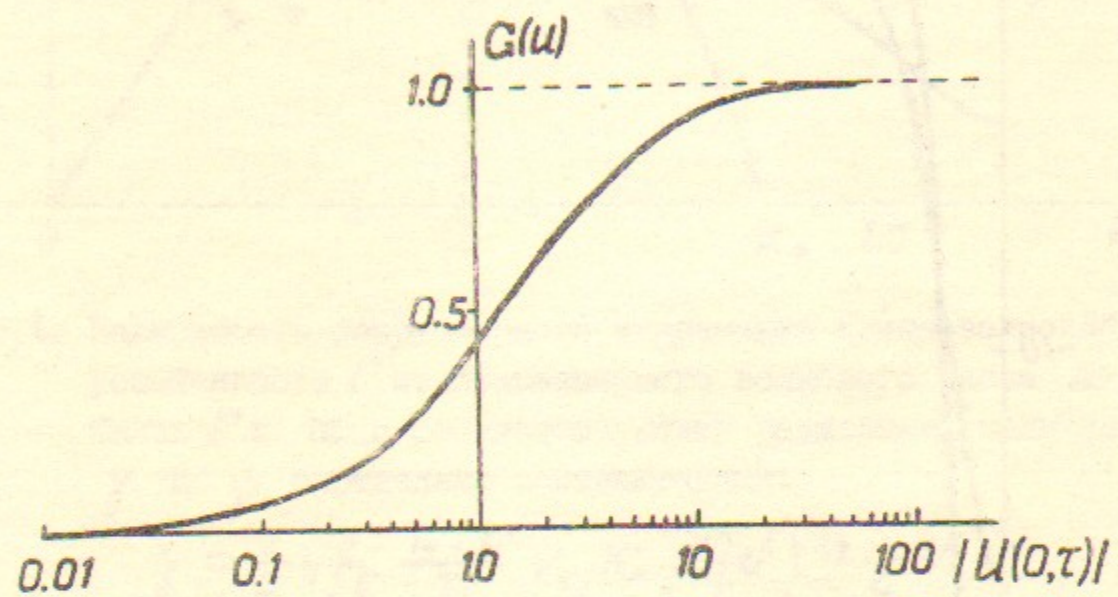


Рис.4. График функции $G(u)$, определенной выражением (26) (результат численного счета).

Работа поступила - 25 января 1982г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
 Подписано к печати 3.П-1982г. МН 03073
 Усл. I, I печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
 Тираж 290 экз. Бесплатно
 Заказ № 19.

Отпечатано на роталпринте ИЯФ СО АН СССР